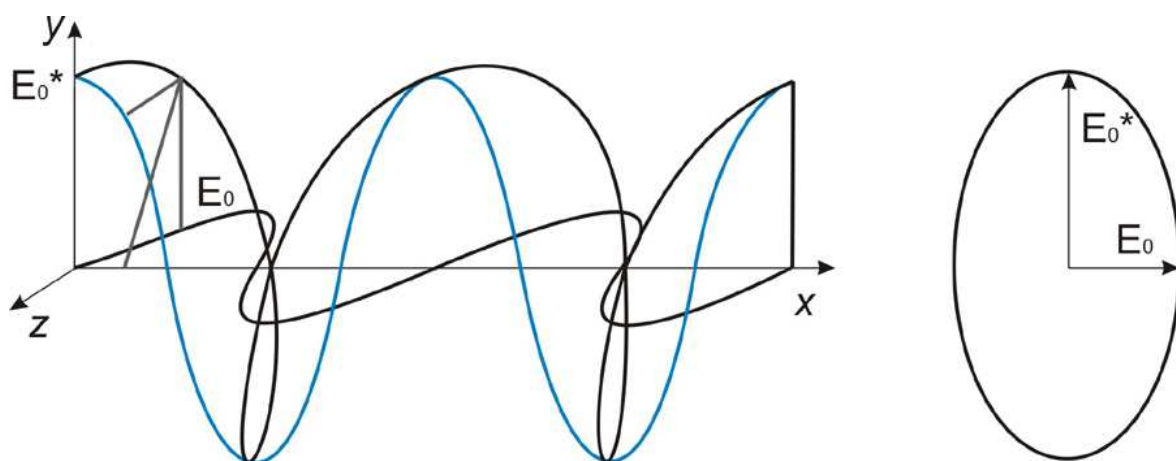


Dr. Zombory László

Elektromágneses terek



Dr. Zombory László

Elektromágneses terek

Dr. Zombory László

Elektromágneses terek

Műszaki Kiadó, Budapest, 2008

Kempelen Farkas Felsőoktatási Digitális Tankönyvtár vagy más által közreadott digitális tartalom a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. tv. 33.§ (4) bekezdésében meghatározott oktatási, illetve tudományos kutatási célra használható fel. A felhasználó a digitális tartalmat képernyőn megjelenítheti, letöltheti, elektronikus adathordozóra vagy papírra másolhatja, adatrögzítő rendszerében tárolhatja. A Kempelen Farkas Felsőoktatási Digitális Tankönyvtár vagy más weblapján található digitális tartalmak üzletszerű felhasználása tilos, valamint kizárt a digitális tartalom módosítása és átdolgozása, illetve az ilyen módon keletkezett származékos anyag további felhasználása is. A jelen digitális tartalom internetes közreadását a Nemzeti Kutatási és Technológiai Hivatal 2009-ben nyújtott támogatása tette lehetővé.

Szakmai lektor:
Dr. Veszely Gyula

Nyelvi lektor:
Kárász Katalin

Szerkesztette:
Ling János

© Dr. Zombory László, 2008
© Hungarian edition Műszaki Könyvkiadó Kft., 2008

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó Kft.
Felelős kiadó: Orgován Katalin ügyvezető igazgató
Felelős szerkesztő: Ling János

A könyv formátuma: A4. Terjedelme: 31,375 (A5) ív

e-mail: vevoszolg@muszakikiado.hu
www.muszakikiado.hu

TARTALOMJEGYZÉK

ELEKTROMÁGNESES TEREK

BEVEZETÉS

1. AZ ELEKTROMÁGNESES TEREK ALAPVETŐ ÖSSZEFÜGGÉSEI

A töltés. Az elektromos tér

Mozgó töltések, az áram

Az időbeli változás

A közegek hatása a tér szerkezetére

Maxwell-egyenletek

Gauss-tétel

Stokes-tétel

Mi jellemző a Maxwell-egyenletekre?

Energiasűrűség és energiaáramlás

A Maxwell-egyenletek egyértelmű megoldhatósága

Az elektrodinamika felosztása a Maxwell-egyenletek alapján

1. Időtől független jelenségek

2. Időfüggő jelenségek

A Maxwell-egyenletek tiszta szinuszos időbeli változás esetén

A Poynting-vektor szinuszos időfüggés esetén

2. AZ ELEKTROMÁGNESES TÉR ÉS KÖZEG KÖLCSÖNHATÁSA

A dipólus

A dipólus alkalmazása

A közegek hatása a térre

Térjellemező vektorok a közegek határán

A térvektorok töréstörvényei

3. ELEKTROSTATIKA ÉS STACIONÁRIUS ÁRAMLÁSI TÉR

Poisson-egyenlet, Laplace-egyenlet, Coulomb-potenciál

A fémelektrodák tere

Az elektrosztatika egyenleteinek egyértelmű megoldása

Kapacitás. Az elektrosztatikus tér energiája

Kondenzátorok

Részkapacitások

Stacionárius áramlási tér

4. STACIONÁRIUS ÁRAM MÁGNESES TERE

Vonalszerű vezetékben folyó áram tere

Mágneses skalárpotenciál

Stacionárius áramok mágneses tere közeg jelenlétében

Magnetosztatika. Permanens mágnesek

A mágneses tér energiája, ön- és kölcsönös induktivitás

Kölcsönös indukció, önindukció

5. SZTATIKUS, STACIONÁRIUS FELADATOK MEGOLDÁSI MÓDSZEREI

Analitikus megoldások

Ismert töltéseloszlás tere homogén közegben

Fémelektrodok homogén izotróp közegben

Helyettesítő töltések módszere

Integrálegyenletek módszere

Parciális differenciálegyenletek

Variációs formalizmus

Numerikus módszerek

A véges differenciák módszere

A véges elemek módszere

Momentumok módszere

Elektrosztatikai feladatok változó ϵ esetén

Analitikus megoldások

Numerikus módszerek

További feladatok

Mágneses tér számítása vektorpotenciálból

Parciális differenciálegyenlet

Variációs formalizmus

Állandó mágnesek

6. KONCENTRÁLT PARAMÉTERŰ HÁLÓZATOK

Egyenáramú hálózatok

Tetszőleges időfüggésű hálózatok

7. TÁVVEZETÉKEK

Elosztott paraméterű hálózatok

A távíróegyenletek megoldása szinuszos gerjesztés esetén

Speciális távvezetékek

Ideális vezeték

Kis csillapítású vezeték

Torzításmentes vezeték

Fázis- és csoportsebesség

Lezárt távvezeték

Különleges lezárások

Hullámimpedancia

Rövidzár

Szakadás

Ideális vezetékszakasz

Összetett vezetékhalózatok

Ideális vezeték speciális lezárással

Hullámimpedancia

Rövidzár

Szakadás

Tiszta reaktáns lezárás

Általános lezárás

Távvezetékek illesztése

Illesztő kétkapuk

1. Soros reaktancia

2. Párhuzamos reaktancia

3. Illesztés két csonkkal

4. Illesztés transzformátorral

Távvezeték-rezgőkör

Távvezetékek időtartománybeli vizsgálata

1. Kezdetiérték-feladat

2. Peremérték-feladat

3. Kezdetiérték- és peremérték-feladat

A menetdiagramok módszere

Általános tranziensek

8. ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK KELTÉSE

A Hertz-dipólus sugárzása

A Hertz- dipólus távoli tere

A távoli tér legfontosabb tulajdonságai

A kisugárzott teljesítmény

A Föld hatása a tér kialakulására

Középen táplált egyenes huzalantennák tere

9. ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK TERJEDÉSE

Síkhullámok

A síkhullámok távvezetékmodellje

A síkhullámok vezető közegben

10. CSŐTÁPVONALAK, ÜREGREZONÁTOROK

Fázissebesség, diszperzió, határfrekvencia

A módusfüggvények

A csőtápvonalban haladó teljesítmény

Csőhullámok téglalap keresztmetszetű csövekben

Nyitott hullámvezetők

Üregrezonátorok

Dielektromos rezonátorok

IRODALOMAJÁNLÁS

FÜGGELÉK

Elektromágneses SI-mértékegységek

Alapvető állandók

Fénysebesség

Vákuum permeabilitása

Vákuum permittivitása

Elemi töltés

Összetett vektoroperációk

Descartes-féle koordináta-rendszerben

Más koordináta-rendszerben

Integráltételek

BEVEZETÉS

Ez az elektronikus könyv az elektromágneses terek egyik lehetséges tárgyalását ismerteti. Ez a tárgyalásmód lényegében Maxwell klasszikus egyenletein alapul, és azokat kifejtve veszi sorra a jelenségeket. Ennek megfelelően alapvetően fenomenologikus, tehát nem érinti a mikrofizikai hátteret, beleértve a kvantumfizikai megfontolásokat is.

Az elektromágneses terek tárgyalása a szokásos vektoranalitikai apparátust használja és nem érinti a relativitáselmélet kalkulusát.

Összefoglalva: a könyv az elektromágneses tereket abban a mélységben és olyan módon tárgyalja, ahogyan ez a műszaki felsőoktatás magasabb évfolyamain szokásos. Ennek megfelelően feltételezi az alapvető matematikai és fizikai (elektrotechnikai, villamosságtani) ismeretek birtoklását.

A szerző e helyen is kötelességének érzi, hogy a megköszönje Veszely Gyula professzornak a társszerzőséggel egyenértékű lektori munkáját. Ugyancsak köszöni a Műszaki Kiadó munkatársainak a mű lelkiismeretes gondozását.

1. AZ ELEKTROMÁGNESES TEREK ALAPVETŐ ÖSSZEFÜGGÉSEI

Az elektromágneses tér fizikai erőter. Az erőter vektortér, amelyben a térbeli erőhatást vektorok fejezik ki. Az erőteret gyakran mezőnek nevezzük, ha meg akarjuk különböztetni a geometriai tértől.

Az elektromágneses térben erő hat minden olyan testre, amelynek (elektromos) töltése van. Az elektromos töltés az elemi részecskék megszüntethetetlen, maradó tulajdonsága. Mai tudásunk szerint létezik legkisebb töltés, az elektron, illetve a proton töltése. Kétféle minőségű elektromos töltés van, amelyek egymástól előjelben különböznek. Az elektron töltése megállapodás szerint negatív, a protoné pozitív előjelű.

Az elektromágneses erőt a *Lorentz-törvény* írja le, amelynek alakja az általunk használt SI-mértérendszerben

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.1)$$

ahol \mathbf{F} az erő, *newton* [N], Q a (kismértékű) részecske töltése, coulomb [C], \mathbf{E} az elektromos tér-erősség [A/m], \mathbf{v} a részecske sebessége [m/s], \mathbf{B} a mágneses indukció vektora, tesla [T]. (Az SI-egységeket lásd a 1. függelékben.)

Az elektromágneses teret az (1.1) összefüggés alapján két vektor jellemzi. Az elektromos térerősség vektora mindig erőt fejt ki a részecskére. A mágneses indukcióvektor csak mozgó részecskére fejt ki erőhatást. Ez az erő mindig merőleges a mozgás pillanatnyi sebességére, ezért nem változtatja meg a részecske energiáját.

Newton második törvényéből (nem relativisztikus sebességek esetén)

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.2)$$

Ebből

$$m\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = Q\mathbf{v}\mathbf{E}, \quad (1.3)$$

ahol m a töltött részecske tömege, \mathbf{v} a sebessége,

mivel a jobb oldalon a $\mathbf{v}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ zérus értékű. Az (1.3) egyenlet mindkét oldalát integrálva

$$\Delta W_{\text{kin}} = \int_{t_1}^{t_2} m\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \Big|_{t_1}^{t_2} = Q \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}\mathbf{E} dt. \quad (1.4)$$

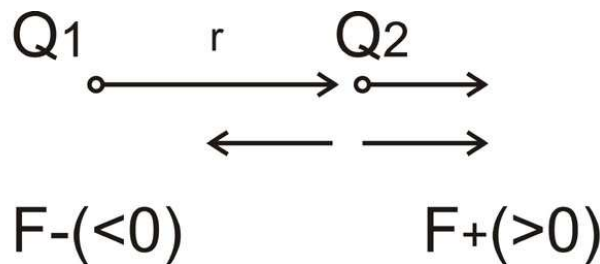
A töltés. Az elektromos tér

A töltés az elektromos tér jelenlétének jelzője, és egyidejűleg az elektromos tér létrehozója, a tér *forrása* is. Igen korai tudományos felismerés, hogy a töltések egymásra erőt fejtenek ki, a töltések között erő hat. Azonos előjelű töltések taszítják, ellenkező előjelűek vonzzák egymást. Az erőhatás kvantitatív kifejezése a *Coulomb-törvény*. E szerint a töltések között ható erő

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (1.5)$$

ahol Q_1 és Q_2 a pontszerű töltések nagysága [C], r a köztük lévő távolság [m], ϵ_0 a vákuum permittivitása: $8,856 \cdot 10^{-12}$ [F/m], F a töltésekre ható erő [N = kg·m·s⁻²].

Az erő a töltéseket összekötő egyenes irányába mutat és az azonos előjelű töltéseket taszítja egymástól, az ellenkező előjelű töltéseket vonzza egymáshoz. Ha tehát a töltések számértékét előjellel helyettesítjük a képletbe, a pozitív előjelű erő taszító, a negatív előjelű vonzó (1.1. ábra).



1.1. ábra. Ponttöltések között ható erő (Coulomb-erő)

A Lorentz-törvény értelmében az egységnyi pontszerű töltésre ható erő az elektromos térerősség. Legyen az 1.1. ábra elrendezésében Q_2 egységnyi töltés, amelyet az 1.2. ábrán az origóba helyezett Q töltéstől induló \mathbf{r} helyvektor jelöl ki.



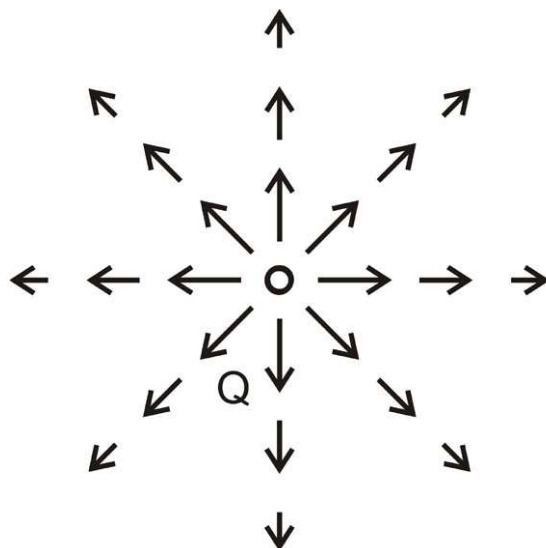
1.2. ábra. Térerősség = egységnyi töltésre ható erő

Ebből következően a pontszerű töltés által létrehozott térerősség

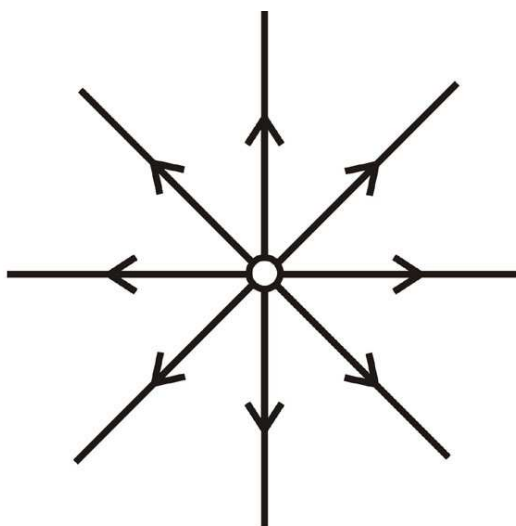
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \mathbf{r}_e, \quad (1.6)$$

ahol \mathbf{r}_e az \mathbf{r} irányba mutató egységvektor.

A térerősség által leírt teret (mezőt) a térerősség abszolút értékével arányos vektorokkal ábrázolhatjuk az 1.3. ábra szerinti módon.



1.3. ábra. Térerősség ponttöltés közelében



1.4. ábra. Ponttöltés erővonalai

A teret az *erővonalakkal* ábrázolhatjuk (1.4. ábra). Az erővonalak érintője mindenütt a térerő irányába mutat.

A töltések erőhatásai függetlenek. A független erők eredője az erővektorok összege, maga is vektor. Ilyen módon tetszőleges töltésselrendezés tere számítható és erővonalas ábrázolása bemutatatható.

Az elektromos töltések által létrehozott tér vizsgálatánál feltételeztük, hogy a töltések mozdulatlanok. Ezért az előző elrendezéseknél a töltéseket rögzítettnek képeztük el. Miután a töltések egymásra is erőhatást fejtenek ki, vákuumban, szabadon mozgó töltések esetén az egyszerű sztatikus kép csak elvi szemléltetés, a töltésselrendezés tartósan nem állhat fenn.

A Coulomb-törvény következménye, hogy a pontszerű töltés középpontú gömbfelületen a térerősség mindenütt merőleges a gömbfelületre és az abszolút értéke állandó. Az A gömbfelület és az E térerősség szorzata a gömb belsejében lévő töltéssel arányos (1.7).

$$EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = Q/\epsilon_0 \quad (1.7)$$

Ha a térerősség helyett bevezetjük az eltolási vektort a

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.8)$$

definícióval, akkor eltüntethetjük az arányossági tényezőt, a permittivitást. Ekkor

$$DA = Q. \quad (1.9)$$

Az elektromos tér általános törvényének sajátos alakját találtuk meg. Az általános törvényhez bevezetjük a *fluxus* fogalmát.

A fluxus a vektormező felületi integrálja. A felület normális egységvektorát n -nel jelölve a v mező Φ fluxusának definíciója

$$\Phi = \int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_A \mathbf{v} d\mathbf{A}, \quad (1.10)$$

ahol $d\mathbf{A} = \mathbf{n} dA$ a felületelem vektora. A felület normális vektorát általában tetszés szerinti irányba választhatjuk, *de* zárt felületen megállapodás szerint a felület által bezárt térfogathoz *kifelé* mutat.

Az előző elrendezésünkre belátható, hogy az eltolási vektormező fluxusa a gömbfelületen a felület által bezárt térfogatban lévő töltés

$$\Phi_D = \int_A \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA = Q. \quad (1.11)$$

Az (1.11) összefüggés nemcsak egy pontszerű töltés, hanem tetszés szerinti töltéselrendezés esetén igaz az elektromos tér egyik alaptörvénye. Felfedezőjéről *Gauss-törvénynek* nevezzük.

A törvény más töltéseloszlások esetén is igaz: lehet térben, felületen vagy vonal mentén elosztott (1.1. táblázat).

1.1. táblázat. A töltés típusai

Töltéstípus	Töltéssűrűség	Összes töltés
Térfogati	$\rho \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^3} \right]$	$Q = \int_V \rho dV$
Felületi	$\sigma \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right]$	$Q = \int_A \sigma dA$
Vonal menti	$q \left[\frac{\text{C}}{\text{m}} \right]$	$Q = \int_l q dl$
Pontszerű	$Q [\text{C}]$	$Q = \sum_i Q_i$

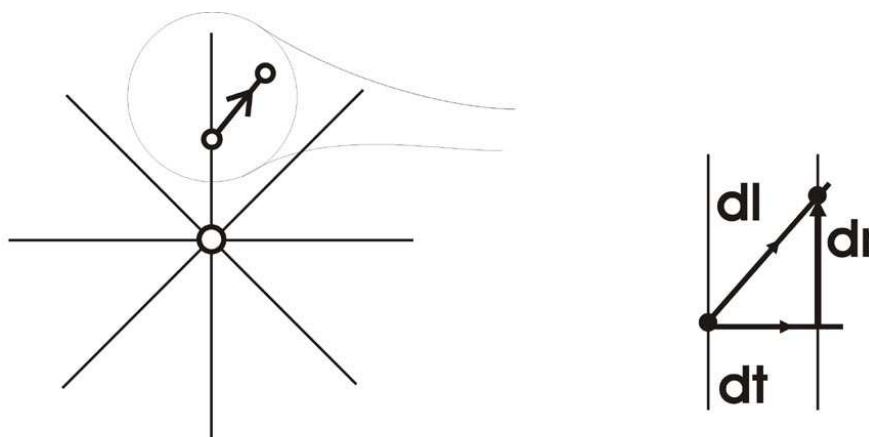
A Gauss-törvényt a legáltalánosabb (térfogati) töltéseloszlásra írjuk fel

$$\oint_A \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = \int_V \rho dV, \quad (1.12)$$

ahol az A felület V térfogatot határoló felület, és a jobb oldali integrálba valamennyi töltéseloszlás töltését beleértjük.

A Coulomb-törvény egy másik fontos felismerésre is módot ad. Vizsgáljuk meg a tér által végzett munkát, amit az erőhatás egy zárt pályán mozgó töltésen végez.

Bármilyen elmozdulás esetén a pontszerű töltés terében az elmozdulásnak van radiális (sugárirányú) és arra merőleges (tangenciális) összetevője az 1.5. ábrán látható módon.



1.5. ábra. Elmozdulás elektromos erőterben

Munkavégzés csak a sugárirányú elmozdulás irányában történik, a tangenciális elmozdulás merőleges az erőre. A kis elmozduláson végzett munka

$$dW = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2}. \quad (1.13)$$

Tetszés szerinti véges úton végzett munka tehát csak a mozgó töltés origótól való kezdeti és végső távolságától függ

$$W = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_{\text{kezdő}}}^{r_{\text{vég}}} \frac{dr}{r^2}. \quad (1.14)$$

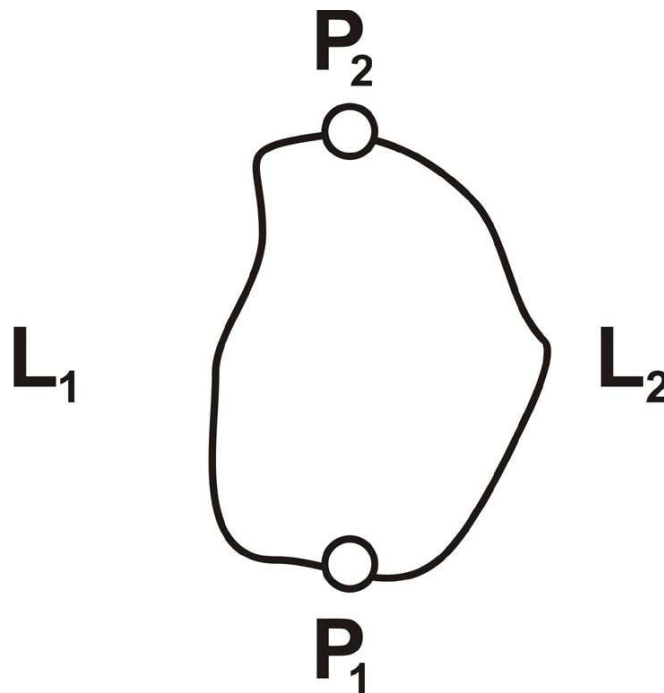
Nyilvánvaló, hogy zárt úton történő mozgás esetén a végzett munka zérus. Tetszés szerinti sztatikus teret létrehozó töltések pontszerű töltések összegeként írhatók fel. Az erőhatások függetlenek, tehát elektrosztatikus térben általánosan igaz, hogy töltéssel zárt úton végzett munka zérus

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = 0. \quad (1.15)$$

Az ilyen tulajdonságú erőtereket *konzervatív erőternek* nevezzük.

Következmenye, hogy két különböző úton, amelynek kezdő- és végpontja azonos, a végzett munka azonos, hiszen a zárt görbét két részre vágva (1.6. ábra) azt kapjuk, hogy a különböző utakon végzett munka csak az út kezdő- és végpontjától függ.

$$\int_{P(l_1)}^P E \, d\mathbf{l} + \int_{P(l_2)}^P E \, d\mathbf{l} = \int_{P(l_1)}^P E \, d\mathbf{l} - \int_{P(l_2)}^P E \, d\mathbf{l} = 0. \quad (1.16)$$



1.6. ábra. Zárt integrálási út

A tetszés szerinti Q nagyságú töltésen végzett munka elektrosztatikus térben

$$W = \int_{P_1}^{P_2} F \, d\mathbf{l} = \int_{P_1}^{P_2} QE \, d\mathbf{l} = Q \int_{P_1}^{P_2} E \, d\mathbf{l} = QU \quad (1.17)$$

alakba írható, ahol

$$U = \int_{P_1}^{P_2} E \, d\mathbf{l} \quad (1.18)$$

a kezdő- és végpont közötti *feszültség*, amelyet *voltban* [V] mérünk. Az előbbieket értelmében a feszültség csak a kezdő- és végpont függvénye, az úttól független.

Az út végpontját gondolatban rögzítve, a feszültség csak a kezdőpont függvénye lesz. Ez a függvény a *skalárpotenciál*

$$\varphi(r) = \int_P^{P_0} E \, d\mathbf{l}. \quad (1.19)$$

Mértékegysége a volt.

A skalárpotenciál a tér egyszerűbb leírása, mint a térerősség vektormezeje, mert minden ponthoz egy skaláris mennyiséget rendel a vektor három komponense helyett. A skalárpotenciál egy additív konstans erejéig határozatlan. Ha megváltoztatjuk az integrálás végpontját \mathbf{r}_{alt} -ra, akkor a potenciál kifejezése

$$\varphi_{\text{alt}}(r) = \int_P^{\mathbf{r}_{\text{alt}}} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = \int_P^{P_0} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} + \int_{P_0}^{\mathbf{r}_{\text{alt}}} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = \varphi(r) + \text{konstans}. \quad (1.20)$$

A potenciál vonatkoztatási pontját tehát tetszőlegesen választhatjuk meg. Ez a választás a két pont közötti feszültség értékét változtatlanul hagyja

$$U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} E \, d\mathbf{l} = \int_{P_1}^{P_0} E \, d\mathbf{l} + \int_{P_0}^{P_2} E \, d\mathbf{l} = \int_{P_1}^{P_0} E \, d\mathbf{l} - \int_{P_2}^{P_0} E \, d\mathbf{l} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2). \quad (1.21)$$

A feszültség tehát *potenciálkülönbség*.

A pontszerű töltés terének potenciálja a *Coulomb*-potenciál

$$\varphi(r) = \int_P^{P_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (1.22)$$

Az előzőek alapján csak a radiális elmozdulás irányába kell integrálnunk, és a potenciál csak a ponttöltéstől mért távolságtól függ.

A Coulomb-potenciál végpontját (a potenciál zérus értékét) rendszerint a végtelenben választjuk ($r_0 \rightarrow \infty$). Ekkor a potenciál alakja

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}. \quad (1.23)$$

Az így kapott potenciál azt a munkavégzést jelenti, amely a Q töltés terében egységnyi töltésnek az r távolságra juttatásához szükséges.

A térből a potenciált könnyen meg tudjuk határozni. Igaz-e a fordított állítás is: meg tudjuk-e határozni a teret a potenciál ismeretében?

Az (1.19) összefüggésből következik, hogy a potenciál megváltozása elemi kicsi $d\mathbf{l}$ szakaszon:

$$d\varphi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.24)$$

A matematikából ismert, hogy φ skalárfüggvény megváltozását elemi kicsi szakaszon a gradiensfüggvény írja le

$$d\varphi = \text{grad}\varphi \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.25)$$

Derékszögű koordináta-rendszerben

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (1.26)$$

ahol \mathbf{i} , \mathbf{j} és \mathbf{k} a koordinátatengelyek irányába mutató egységvektorok.

Az (1.24) és az (1.25) összevetéséből a térerősség minden pontban a skalárpotenciál negatív gradienseként számolható

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (1.27)$$

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a töltések mozdulatlanok.

Mozgó töltések, az áram

A mozgó töltések hozzák létre az *áramot*. Ha a ρ térbeli töltéssűrűség \mathbf{v} lokális sebességgel mozog, *áramsűrűséget* hoz létre:

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right]. \quad (1.28)$$

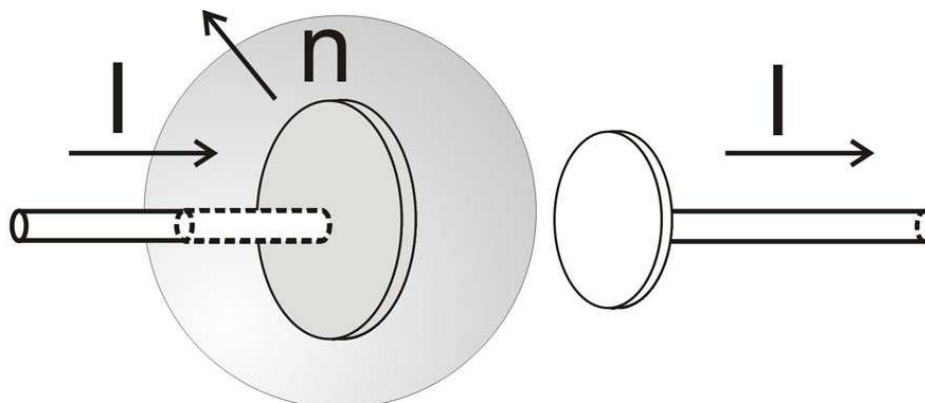
Az elemi $d\mathbf{A}$ felületen átfolyó áram

$$dI = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}.$$

Ha az áram kis keresztmetszetű, vonalszerű zárt vezetéken folyik, akkor a vezetéken folyó összes áram a vezeték mentén nem változik:

$$I = \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} A = \rho v A. \quad (1.29)$$

Nem ez a helyzet, ha a vezeték valahol megszakítjuk. Az áram a szakadási helyre folyamatosan töltéseket szállít, illetve elmozgat onnan. Ezért a töltés felhalmozódik, illetve lecsökken a szakadás két oldalán (1.7. ábra).



1.7. ábra. Megszakított áram

A szakadását körülölelő zárt felület belsejében kis dt idő alatt a töltés megváltozása

$$dQ = -I dt \quad [C = A \cdot s], \quad (1.30)$$

ahol a befolyó áram szembefolyik a felület normális vektorával (befelé folyik a zárt térfogatba), ez okozza a negatív előjelet.

Az (1.30) kifejezésből a töltés változásának sebessége

$$\frac{dQ}{dt} = -I, \quad (1.31)$$

ahonnan az 1.1. táblázat alapján

$$Q = \int_V \rho dv, \quad (1.32)$$

helyettesítéssel

$$\oint_A \mathbf{J} d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (1.33)$$

Ez a kifejezés az áram *folytonossági egyenlete*, amely időben nem változó esetben a

$$\oint_A \mathbf{J} d\mathbf{A} = 0 \quad (1.34)$$

egyenletre egyszerűsödik.

A Lorentz-erőtörvény szerint a mozgó töltéseket a mágneses tér eltéríti. Az első megfigyelt jelenség azonban a fordítottja volt: árammal átjárt vezető közelében a mágnesű fordult el. Ennek ismeretében *Ampère* hosszas kísérletsorozattal bemutatta, hogy az áramok hatnak egymásra és leírta a kölcsönhatás törvényét is. Ez alakilag különbözik a következőkben bemutatott törvénytől, de tartalmilag megegyezik vele.

Két párhuzamos vezetékben folyó áram vonzza egymást, ha az áramok azonos irányúak, ellenkező esetben taszítja. Az áram a töltések áramlása. A Lorentz-erőtörvény alapján a jelenséget úgy magyarázhatjuk, hogy az áram mágneses teret hoz létre és ez a mágneses tér erőhatást fejt ki a másik áramban mozgó töltésekre.

Eddig a térben eloszló és a vonalszerű áramról volt szó. Elvben létezik felületen folyó áram is (1.2. táblázat).

1.2. táblázat. Az áramok típusai

Áramtípus	Áramsűrűség	Összes áram
Térben eloszló	$\mathbf{J} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right]$	$I = \int_A \mathbf{J} \, dA$
Felületen eloszló	$\mathbf{K} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$	$I = \int_S \mathbf{K} \, \mathbf{n} \, ds,$ ahol \mathbf{n} a felületen fekvő ds ívelemre merőleges, szintén a felületben fekvő vektor.
Vonaláram (lineáris áram)	$I \text{ [A]}$	$I = \sum_k I_k$

Az áramok erőhatásának törvényét két párhuzamos, igen kis keresztmetszetű, vezető l hosszúságú szakasza között vákuumban a következő összefüggés írja le

$$|\mathbf{F}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{|I_1||I_2|l}{d}, \quad (1.35)$$

ahol d a vezetékek távolsága.

A képletbe SI-mértékegységben az áramot amperben [A] helyettesítjük. Definíció alapján az áram 1 A erősségű, ha a két vezeték 1 m hosszúságú szakasza között $2 \cdot 10^{-7}$ N erő hat. Ehhez a μ_0 értékét, amely a vákuum permeabilitása $4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A² értékűnek kell választanunk. Az elektrodinamikában a N helyett az alábbi egyenlőségáncsal definiált mennyiséget használjuk

$$N = W \cdot s/m = V \cdot A \cdot s/m = \frac{T \cdot A}{m}.$$

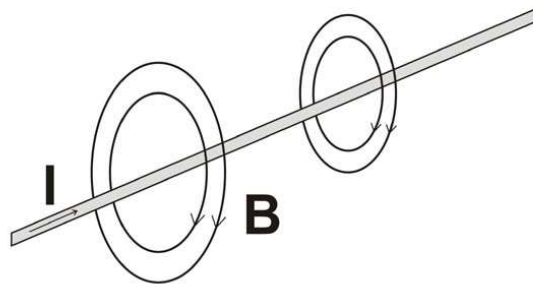
Ezzel

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T}{A \cdot m} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}. \quad (1.36)$$

Fontos tudnunk, a vákuum permeabilitása definiált mennyiség.

Az előzőkben már jeleztük: az árammal átjárt vezető a mágneses tér indikátora, de ugyanakkor a mágneses tér forrása is.

A vékony vezetékben folyó áramnál a mozgó töltéseknek a vezeték tengelyével párhuzamos sebessége van (legalábbis a sebességek átlagát tekintve). A *Lorentz-erőtörvénynek* (1.1) megfelelően a vezetékre merőleges hatás úgy magyarázható, hogy a mágneses indukció merőleges a vezeték közös síkjára. A szimmetriák miatt (a vezeték mentén eltolási, a vezeték körül elforgatási invariancia áll fenn) a vezetékben folyó áram által gerjesztett tér mágneses indukciójának „erővonalai” a vezetékre merőleges síkban kör alakúak. Ez azt is jelenti, hogy az indukció értéke csak a vezetéktől mért távolságtól függ (1.8. ábra).



1.8. ábra. Egyenes vezeték áramának indukcióvonalai

A vezetékben folyó áramra ható erő: a mágneses teret létrehozó áram (legyen az I_2) l hosszúságú vezetékszakra eső töltésének és a töltés átlagsebességnek szorzata

$$I_2 l = \rho v A \cdot l = Qv,$$

ahonnan az (1.1) és az (1.35) felhasználásával

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}. \quad (1.37)$$

A szimmetria felhasználásával bármely, az áramot körülölelő zárt görbére

$$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \mu_0 I. \quad (1.38)$$

Az áramot körül nem ölelő görbére

$$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \mathbf{0}. \quad (1.39)$$

Az ívelemeket az indukcióvonalakra illeszkedő (tangenciális) és arra merőleges összetevőkre bontva az (1.38)–(1.39) integrálhoz csak a tangenciális komponenseken végzett összegzés ad járulékot.

A fenti formulát egyszerűsíti a mágneses térerősség bevezetése. Definíciója

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}. \quad (1.40)$$

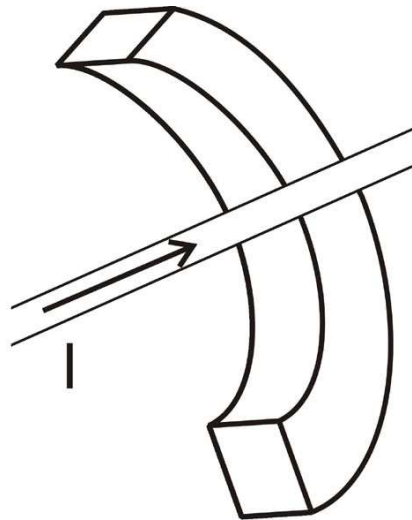
Ezzel az (1.30) a következő alakba írható

$$\oint \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = I. \quad (1.41)$$

Ez a törvény általánosan is érvényes, ha I az integrálás zárt útja által kifeszített felületen átfolyó előjeles áram. (Pozitív, ha a felületi normális irányába folyik, negatív ellenkező esetben. A felületi normálist és az integrálási út körüljárását a jobbszabály rendeli egymáshoz.)

A törvény neve *gerjesztési törvény*. Gyakran *Ampère* nevéhez kapcsolják, de ez téves. Ampère az (1.35) összefüggéssel tartalmilag azonos összefüggést állított fel. Az (1.37) összefüggést *Biot* és *Savart* ismerte fel. A Biot–Savart-törvény részletes alakjával később találkozunk.

Az indukció fluxusát meghatározhatjuk bármely felületre. Különleges szerepe zárt felület esetén van. A fluxust számítva észrevehetjük, hogy alkalmasan választott „csövek” mentén a fluxus bármely keresztmetszetben azonos értékű (1.9. ábra).



1.9. ábra. Mágneses tér „fluxuscsőve”

A fluxusvonalakkal határolt alakzat bármely keresztmetszetén azonos a fluxus. Bármely zárt felület térfogata kitölthető kis keresztmetszetű fluxuscsővekkel. Ezek metszési keresztmetszetén a felülettel mindig páros számú felületet kapunk, amelyeken a fluxus abszolút értéke azonos, de páronként ellenkező előjelű. Így a térfluxusok előjeles összege zérus

$$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = 0. \quad (1.42)$$

Ezt az (1.12)-vel összevetve, a következőket állíthatjuk: *mágneses töltés* nem létezik. Az (1.42) egyenletet néha mágneses Gauss-törvénynek nevezik.

Gyűjtsük össze az eddigi összefüggéseinket

$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_A \mathbf{J} d\mathbf{A}$	(1.42a)
$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$	(1.42b)
$\oint_A \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0$	(1.42c)
$\oint_A \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_V \rho dV$	(1.42d)

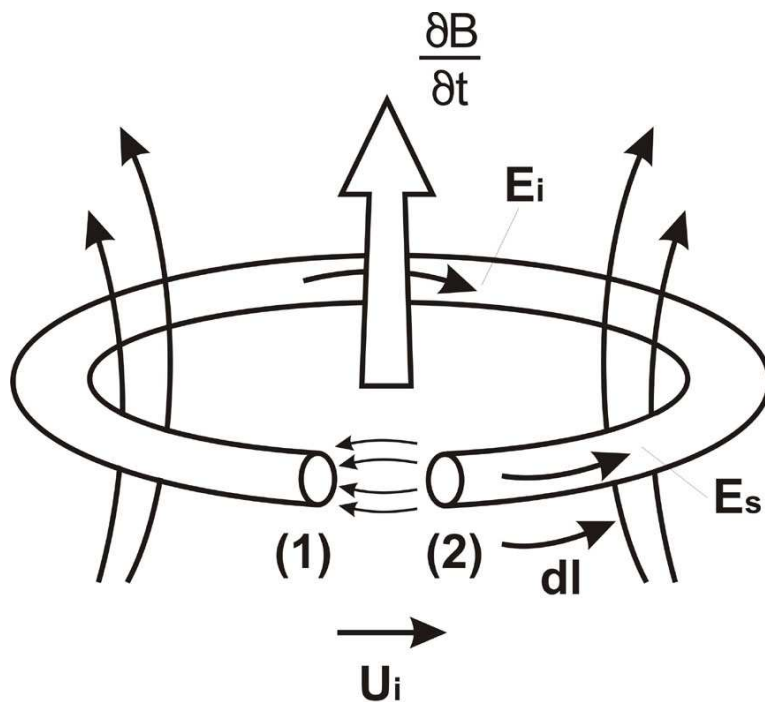
Ezek az egyenletek az időben változatlan terek alapvető összefüggései. Az elektromos és a mágneses terek függetlenek egymástól, nincsen közöttük kapcsolat.

Az időbeli változás

Faraday nevéhez fűződik az a felismerés, hogy bármely zárt görbe által kifeszített felületen áthaladó fluxus időbeli változása elektromos térerősséget hoz létre (indukál). Ha a zárt görbe egy vezető keret, akkor a keret két közeli végpontja között

$$U_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.43a)$$

feszültség jön létre, a keret mintegy „integrálja” a keletkezett térerősséget (1.10. ábra).



1.10. ábra. Faraday indukciótörvénye

A térerősséget a majdnem zárt vezető oly módon „integrálja”, hogy az indukált térerősség addig mozgatja el a töltéseket, amíg az eredő térerősség (az E_i indukált és az E_s sztatikus tér összege) a vezetőben zérus nem lesz. A vezeték végpontjaiban felhalmozódott töltés csak a légrésben hoz létre teret.

$$U_i = \oint_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad \left(\cong \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} \right). \quad (1.43b)$$

A negatív előjel a Lenz-törvényt fejezi ki: az indukált feszültség által keltett áram csökkenteni igyekszik a fluxus változását. (A parciális derivált itt azt jelzi, hogy a keret alakjának változásából származó fluxusváltozást figyelmen kívül hagyjuk, nem tárgyaljuk a mozgási indukciót.)

Az (1.43) összefüggésbe a mennyiségek definícióit behelyettesítve a

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (1.44)$$

egyenletre jutunk.

Nyilvánvaló, hogy időben változó mennyiségek esetén az (1.42a) egyenlet nem lehet helyes. Az időfüggő áram ugyanis az (1.33) alapján időben változó töltést produkál. Az időben változó töltés időben változó elektromos teret gerjeszt. Ezért az (1.12) felhasználásával a következőképpen alakítjuk át az (1.41) egyenletet

$$\oint_I \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}, \quad (1.45)$$

ami az integrálás és az időbeli derivális sorrendjét felcserélve (az integrálási tartományok nem függenek az időtől!)

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \int_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A},$$

azaz

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A} \quad (1.46)$$

alakba írható. Ebből az egyenletből következik az (1.33) egyenlet. Ha ugyanis a jobb oldali integrálást *zárt* felületen végezzük, a bal oldali integrálási görbe ponttá zsugorodik, az integrál értéke zérus. Miután a jobb oldali integrál minden zárt felületre zérust ad és az (1.12) felhasználásával az eltolás fluxusa a térfogatban levő töltéssel egyenlő, visszakapjuk az (1.33) folytonossági egyenletet.

A (vezetési) áram kiegészítése az *eltolási árammal* *Maxwell* felismerése. Az eltolási áram sűrűsége az eltolási vektor időbeli deriváltja. Ezzel a felismeréssel indult a modern elektrodinamika és bizonyos értelemben a modern fizika diadalútja.

A közegek hatása a tér szerkezetére

Az eddigi megfontolásaink mind vákuumra vonatkoztak. Ezt a közeget az ε_0 permittivitás és μ_0 permeabilitással jellemeztük. (Hallgatólagosan érintettük az áramot jól vezető közegeket, de nem elemeztük.)

Vákuumban (szabad térben) \mathbf{D} és \mathbf{E} , \mathbf{H} és \mathbf{B} lineáris, homogén *izotróp* kapcsolatban vannak.

Más közegek jellemzésének is legegyszerűbb módja, ha lineáris, homogén, izotróp összefüggést feltételezünk, azaz

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}, \quad (1.47)$$

ahol $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ és $\mu = \mu_r \mu_0$ a közeg permittivitása és permeabilitása. ε_r és μ_r a relatív permittivitás és permeabilitás.

Bonyolultabb az áram összefüggése a térerősséggel. A legkézenfekvőbb esetben az áram és az elektromos térerősség összefüggése szintén lineáris, homogén és izotróp

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.48)$$

ahol $\sigma \left[\frac{\text{S}}{\text{m}} \right]$ a fajlagos vezetőképesség (nem a felületi töltéssűrűséget jelöli.) Sajnos ez az összefüggés egyszerű esetekben sem igaz, ha az áramot nem elektromos hatás kelti, hanem pl. galvánelem. A nem elektromos hatásokat az \mathbf{E}_b beiktatott térerősséggel jelöljük, és így az áram teljes kifejezése inhomogén

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b). \quad (1.49)$$

Ezzel együtt is az egyszerű (1.48) összefüggés a differenciális *Ohm-törvény*.

Véges A keresztmetszetű, l hosszúságú egyenes vezetőken a *konduktív (vezetési) áram*:

$$I = JA = \frac{\sigma A}{l} El = \frac{1}{R} U \quad (1.50)$$

Az egyenletekben szabadon mozgó töltések esetén (1.28) alakú konvektív áramok is megjelenhetnek.

Miért szükséges \mathbf{E} és \mathbf{D} , illetve \mathbf{H} és \mathbf{B} megkülönböztetése? Láttuk, hogy vákuumban a kifejezések egyszerűbbé tételére vezettük be, \mathbf{D} -t és \mathbf{H} -t, fizikailag nem hordoztak új tartalmat. Ez azonban közegekben nem igaz. Itt élesen szétválik \mathbf{E} és \mathbf{B} , valamint \mathbf{D} és \mathbf{H} szerepe. Előbbiek a valódi *térmennyiségek*, amelyek a Lorentz-törvényben az erőhatásért felelősek. Utóbbiak a *gerjesztett mennyiségek*, amelyek a teret gerjesztő töltésekkel és áramokkal állnak közvetlen kapcsolatban. Közegben a *tér*- és a *gerjesztett* vektorok közötti összefüggés az arányosságon túl is hordoz fizikai tartalmat. Ennek háttéréről a következő fejezetben lesz szó.

Egyenleteink fenomenologikusok. Ez azt jelenti, hogy a jelenségeket és kapcsolatukat írják le és nem foglalkoznak a mikrofizikai háttér viselkedésével, a mikrofizikai mennyiségek és a fenomenologikus leírás makrofizikai jellemzőinek kapcsolatával.

Maxwell-egyenletek

Mielőtt összegyűjtenének az egyenleteket, hangsúlyozzuk, hogy a négy alapegyenletet integrálok közötti összefüggések formájában fogalmaztuk meg. A felhasználások során gyakran a differenciálegyenleti forma is megfelelő. A két formalizmus közötti összefüggést két matematikai tétellel (az integrálredukciós tételekkel) hozzuk létre.

Gauss-tétel

A matematika *Gauss tétele* szerint

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \oint_A \mathbf{v} \, d\mathbf{A}, \quad (1.51)$$

ahol \mathbf{v} a vektortér, A a V térfogatot határoló zárt felület, $\operatorname{div} \mathbf{v}$ skalár értékű elsőfokú vektorderivált.

Descartes-rendszerben

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (1.52)$$

míg a koordináta-rendszertől független definíció

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_A \mathbf{v} \, d\mathbf{A}, \quad (1.53)$$

ahol az A által határolt V térfogat úgy zsugorodik egy pontra, hogy legnagyobb lineáris mérete a zérushoz tart.

Stokes-tétel

$$\int_A \operatorname{rot} \mathbf{v} \, d\mathbf{A} = \oint_L \mathbf{v} \, d\mathbf{l}, \quad (1.54)$$

ahol \mathbf{v} a vektortér, az A felület határgörbéje L , és a körüljárás a felület normálisához jobbszabály szerint van hozzárendelve; $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ vektor értékű vektorderivált, amely Descartes-féle koordináta-rendszerben:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \mathbf{k}.$$

A könnyebb megjegyezhetőség végett gyakran determináns formában írjuk fel

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}, \quad (1.55)$$

ahol $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ az x, y, z irányú egységvektorok.

Koordinátafüggetlen definíciója szerint

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{\mathbf{A}} d\mathbf{A} \times \mathbf{v} \quad (1.56)$$

ahol a határértékképzés szabályai az előzővel megegyeznek. \times a vektoriális szorzás jele. A rotáció bármely \mathbf{e} egységvektor irányába mutató komponense

$$\mathbf{e} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.57)$$

ahol a síkbeli L görbe síkja \mathbf{e} -re merőleges, A zérushoz tart, miközben a határgörbe legnagyobb átmérője is zérushoz tart. L körüljárása és az \mathbf{e} normális jobbcavar-szabály szerint vannak összerendelve.

Alkalmazzuk a Stokes-tételt például az (1.46) összefüggésre

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{A} = \int_A \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A}. \quad (1.58)$$

A jobb oldali egyenlőség minden A felületre igaz. Ez csak úgy lehetséges, ha az integranduszok majdnem mindenütt azonosak. Az összefüggés tehát minden ponthoz (pontosabban minden pont kicsiny környezetéhez) a

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.59)$$

differenciálegyenletet rendel. Ez az I. Maxwell-egyenlet differenciális alakja.

Ismét csak példaképpen alkalmazzuk a matematika Gauss-tételét az (1.12) egyenlet bal oldalán

$$\oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{D} \cdot dV = \int_V \rho \cdot dV. \quad (1.60)$$

Az előbbi argumentációval az integrandusok (majdnem mindenütt) azonosak, azaz

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (1.61)$$

Hasonlóan átalakítva az (1.42) és az (1.44) egyenleteket az 1.3. táblázatban látható differenciálegyenletekhez jutunk.

1.3. táblázat. Maxwell-egyenletek

Integrálformában	Differenciális formában
$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \int_A \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{A} \quad (1.46)$	$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{I})$
$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{A} \quad (1.44)$	$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{II})$
$\oint_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = 0 \quad (1.42)$	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{III})$
$\oint_A \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = \int_V \rho dV \quad (1.12)$	$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (\text{IV})$

Az (I)–(IV) differenciálegyenletek általában a *Maxwell-egyenleteknek*. Tudománytörténeti érdekesség, hogy Maxwell sokkal bonyolultabb formában írta fel egyenleteit és az eredetiekkel egyenértékű fenti négy egyenletet követői vezették le az eredetiekből.

A Maxwell-egyenletek a közegektől függetlenül írják le az elektromágneses tér jelenségeit. A közeg figyelembevétele az \mathbf{E} és \mathbf{B} térvektorok és a \mathbf{D} , \mathbf{H} gerjesztett vektorok, valamint a vezetőközegekben a \mathbf{J} és a térvektorok kapcsolatát leíró konstitúciós egyenletek. Ezek alkotják a kiterjesztett egyenletek (V) csoportját. A már vizsgált egyszerű lineáris, izotróp, nem diszperzív közegben

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_b). \quad (\text{Va, b, c})$$

A konstitúciós egyenletekkel az egyenletrendszer teljes. Visszavezethető ugyanis két vektortér, például \mathbf{E} és \mathbf{B} rotációját és divergenciáját leíró egyenletekre. A vektoranalízis alaptétele (*Helmholtz-tétel*) értelmében igen általános feltételekkel minden vektortér egyértelműen kifejezhető a rotációja és divergenciája ismeretében.

Mi jellemző a Maxwell-egyenletekre?

1. Az egyenletek *differenciálegyenletek*. Már a folytonossági egyenletnél megállapítottuk, hogy a differenciálegyenletek egy pont kicsiny környezetének viszonyait írják le. Pontosabban: egy kicsiny környezetben megadják a vizsgált fizikai mennyiségek változásának kapcsolatát. Ezért ezek az egyenletek feltételezik, hogy a hatások a közvetlen szomszédságban működnek, azaz *közvetlen törvények*. Ez a szemlélet a fizikai tér (mező) létre fekteti a hangsúlyt. Ez ellentétes a *távolhatási törvényekkel*, mint amilyen a Coulomb-törvény vagy az áramok egymásra hatásának törvénye. A közvetlen törvények szerint a hatást távolba a mező közvetíti, így ennek ugyanolyan fizikai tulajdonságokat kell értelmeznünk, mint a töltésnek vagy az áramnak. A közvetlen szemléletet esetünkben az

eltolási áram bevezetése, és ennek következtében a gerjesztéseket elhagyó, azoktól függetlenül terjedő elektromágneses hullám támasztja alá.

2. Az egyenletek *evolúciós egyenletek*. Ez azt jelenti, hogy a tér pillanatnyi (és esetleg múltbeli) értékeinek ismeretében leírják a tér alakulását, változását a jövőben. És valóban: a térjellemezők pillanatnyi értékei meghatározzák azok időbeli deriváltjait a vizsgált térrész minden pontjában. Így a térjellemezők időbeli változása minden pontban nyomon követhető.
3. Az egyenletek megoldását rendszerint adott időpillanattól kezdve keressük. A jelenség „előéletét” az úgynevezett *kezdeti feltételek* segítségével adjuk meg.

Az (I) egyenlethez \mathbf{D} kezdeti értékeit kell ismernünk a vizsgált térrészben. Ezekre vonatkozó feltételeket a (IV) egyenlet szab meg: csak olyan kezdeti \mathbf{D} vektort választhatunk, amelynek divergenciája megegyezik a kezdeti töltéeloszlással. A továbbiakban az (I) egyenlet mindkét oldalának divergenciáját véve

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 = \operatorname{div} \mathbf{J} + \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}, \text{ azaz röviden}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} = 0. \quad (1.62a)$$

Ez az áram folytonossági egyenletének differenciális alakja. Láthatjuk: \mathbf{D} úgy változik, hogy a folytonossági egyenlet minden időpillanatban automatikusan teljesül.

Hasonlóan, a \mathbf{B} vektor kezdeti értéke eleget kell tegyen a (III) egyenletnek. Az előző gondolatmenettel

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = f(r), \quad (1.62b)$$

azaz a mágneses indukció divergenciája időtől független, csak a helytől függ. Miután ez a mennyiség kezdetben zérus, a továbbiakban mindvégig zérus marad.

4. Az egyenletek megoldását kereshetjük zárt térrészben vagy nyitott (végtelen) térben. Az első esetben a zárt térrészen kívül a „külvilágban” szereplő gerjesztések hatását úgy vesszük figyelembe, hogy a térrészüket határoló zárt felületen *peremfeltételeket* írunk elő. Ezek általában a teret jellemző vektorok, vagy azok egyes komponensei. Nyitott tér esetén a mező egyes vektorainak, illetve komponenseinek a végtelenben megfelelő határértékhez kell tartaniuk.

Végezetül: elemezve a (I)–(V) egyenleteket, felismerhetjük, hogy csak elektromos és mágneses mennyiségeket tartalmaznak. Együtt tehát zárt rendszert képeznek, amely alkalmas az elektromágneses jelenségek leírására, de nem kapcsolja össze azokat a fizika más ágaival. Ahhoz, hogy az elektrodinamikát elhelyezzük a fizika tudományterületén, szükségünk van egy olyan mennyiség elektromágneses definíciójára, amely a fizika lehetőleg minél szélesebb területein szintén értelmezett. Ilyen mennyiség lehet az erő. Van olyan leírás, amelyik a Maxwell-egyenletek rendszerét az (1.1) Lorentz-erővel egészíti ki. Mi a másik általános mennyiséget definiáljuk: az *energiát*.

Energiasűrűség és energiaáramlás

A Maxwell-egyenletek által leírt közelítés jellegéből következik, hogy az elektromágneses mező energiája a konfigurációs geometriai térben elosztva helyezkedik el. Egy pont környezetében az energia megváltozása és az itt „eltűnő” energia megjelenése egy másik pont környezetében csak az energia áramlása útján képzelhető el. A w energiasűrűség és az \mathbf{S} energiaáram vektora között tehát a töltés és áram folytonossági egyenletéhez hasonló összefüggésnek kell fennállnia

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \quad (1.63)$$

Könnyen belátható, hogy ez a törvény nem igaz. A töltéssel ellentétben, amely nem keletkezik és nem tűnik el, az elektromágneses energia keletkezik és eltűnik. Az energiamegmaradás törvénye valamennyi energiatípusra együtt érvényes, külön az elektromágneses energiára nem. Az elektromágneses energia például csökken, amikor a közeg melegíti.

A közeggel való kölcsönhatást a Lorentz-törvény (1.1) írja le. Munkát csak az elektromos térerő végez, a mágneses erőhatás mindig merőleges a részecske sebességére. Belátható, hogy egységnyi térfogatú, elektromosan töltött anyagon a teljesítmény $\mathbf{E}\mathbf{J}$. A (mechanikai) teljesítmény erő \times sebesség formában számítható. Esetünkben ez egy töltésre $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$, a térfogategységre $\mathbf{F} = \rho\mathbf{E}$. A teljesítménysűrűség tehát $\mathbf{p} = \mathbf{F}\mathbf{v} = \rho\mathbf{E}\mathbf{v} = \mathbf{E}\rho\mathbf{v} = \mathbf{E}\mathbf{J}$. Pozitív \mathbf{p} esetén a tér végez munkát a közegen, tehát a tér energiasűrűsége csökken. Ezt is figyelembe véve a következő egyenletet keressük

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{E}\mathbf{J}. \quad (1.64)$$

Azt felesleges hangsúlyozni, hogy az egyenletnek a Maxwell-egyenletekkel teljes összhangban kell állnia. Ez biztos, ha az (1.64) egyenletet azokból származtatjuk.

A levezetést *Poynting* 1884-ben végezte el.

$\mathbf{E}\mathbf{J}$ -re szükségünk van, ezért (I)-et megszorozzuk \mathbf{E} -vel. A szimmetria végett szorozzuk meg (II)-t \mathbf{H} -val. A jobb oldalon azonos előjeleket kapunk, ha ezek után a második egyenletből kivonjuk az elsőt

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E}\mathbf{J}. \quad (1.65)$$

Használjuk fel a $\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}$ azonosságot. Némi rendezés után kapjuk:

$$-\left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E}\mathbf{J}. \quad (1.66)$$

Az összefüggést *Poynting-tételnek* nevezzük.

Az (1.66) Poynting-tétel akkor felel meg egyértelműen az (1.64) összefüggésnek, ha

$$dw = \mathbf{E}d\mathbf{D} + \mathbf{H}d\mathbf{B} \quad (1.67)$$

teljes differenciál. Lineáris összefüggéseket feltételezve ekkor a w energiasűrűség alakja

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2. \quad (1.68)$$

Ezt az energiasűrűséget tekintjük a (VI) egyenletnek a Maxwell-egyenletek teljes rendszerében.

Különböző körülmények között az esetek egy részében dw nem teljes differenciál. Ilyenkor w nem adható meg zárt alakban a teret jellemző mennyiségek függvényeként. Ez a helyzet például hiszterézises karakterisztikák vagy erősen veszteséges közegek esetén.

Vizsgáljuk meg az (1.66) jobb oldalán álló tagokat. Használjuk fel az áram (\mathbf{V}) kifejezését:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b),$$

ahonnan

$$\mathbf{J} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} - \mathbf{E}_b \mathbf{J}. \quad (1.69)$$

Az első tagot nem nehéz azonosítani: ez az egységnyi térfogatban az áram által keltett Joule-hő. A Joule-hő mindig pozitív, az előjeleket figyelembe véve mindig csökkenti az elektromágneses energiát. A második tag előjele az áram és a beiktatott tér vektora közötti szögtől függ. A skaláris szorzat pozitív, ha az áram a tér irányában folyik. Ekkor az elektromágneses energia növekszik, ellenkező esetben csökken.

Az energiaáramlást leíró \mathbf{S} vektort *Poynting-vektornak* nevezzük. Definiáló egyenlete

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{\text{V} \cdot \text{A}}{\text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]. \quad (1.70)$$

A vektor az irányára merőleges felületegységen időegység alatt áthaladó energia amint ezt a mértékegysége is jelzi. A Poynting-tételben azonban a divergenciája szerepel. A tételt nem sérti, ha \mathbf{S} -et kiegészítjük egy divergenciamentes vektorral. (Bármely vektortér rotációját képezve divergenciamentes vektorteret kapunk.) A ma általános felfogás szerint (ezt támasztják alá relativisztikus megfontolások is) az \mathbf{S} vektor egyértelmű, és az (1.70) alaknak van valódi fizikai tartalma.

Az (1.66) differenciális összefüggés. A gyakorlatban véges térfogatra integrális mérlegegyenletet lehet kísérletileg igazolni. Az integrális mérlegegyenlet

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B} \right) dV = \oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{A} + \int_V \mathbf{E} \mathbf{J} dV, \quad (1.71)$$

amelyik kiemeli, hogy a térfogatban az energia megváltozása egyrészt a térfogatban lejátszódó folyamatok következménye, másrészt a térfogatot körülvevő zárt felületen átáramló energia függvénye.

Az elektromágneses térben energia áramlik, és erre az energiamegmaradási törvény érvényes. Az elektromágneses tér impulzussal is rendelkezik és az impulzusra is érvényes a megmaradási tétel. Az impulzus sűrűsége (ami értelemszerűen vektormennyiség)

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \quad (1.72)$$

A Maxwell-egyenletek egyértelmű megoldhatósága

Az (I)–(V) axiomatikus egyenletrendszerrel kapcsolatban felmerül: létezik-e megoldása, és ha igen, milyen feltételek mellett egyértelmű. Az első kérdésre a válasz általában igen nehéz, és jelentős matematikai apparátus igénybevételét feltételezi. A második kérdésre a válaszadás sokkal egyszerűbb. A továbbiakban bebizonyítjuk, hogy egyenleteink egyértelmű megoldásához egyrészt ismernünk kell a vizsgált tér minden pontjában a térerősségek értékét a $t = t_0$ kezdeti időpontban, másrészt a határoló felület minden pontjában vagy \mathbf{E} , vagy \mathbf{H} tangenciális komponensének értékét a t_0 kezdeti időponttól a vizsgált t időpontig. Ez megfelel a „Mi jellemző a Maxwell-egyenletekre?” szakaszban a kezdeti és peremfeltételekről mondottaknak.

Feltételezzük, hogy az ε , μ , σ anyagállandók az időtől és a térerősségektől függetlenek. A beiktatott térerősségek hely- és időfüggése adott.

Bizonyításuk alapötlete a matematikából jól ismert: a bizonyítandó állítás ellenkezőjéről állítjuk, hogy ellentmondáshoz vezet. Esetünkben tételezzük fel, hogy az egyenleteknek két eltérő megoldása létezik: \mathbf{E}' és \mathbf{E}'' , \mathbf{H}' és \mathbf{H}'' , amelyek külön-külön eleget tesznek a kezdeti és peremfeltételeknek. Miután mindkét vektorpár a Maxwell-egyenletek megoldása, nyilvánvalóan az $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}' - \mathbf{E}''$, $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}' - \mathbf{H}''$ különbségük is az, hiszen az egyenletek lineárisak. Ezért a különbségi térre is érvényes a Poynting-tétel, vagyis

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} (\varepsilon \mathbf{E}_0^2 + \mu \mathbf{H}_0^2) dV = \int_V \frac{\mathbf{J}_0^2}{\sigma} dV - \int_V \mathbf{E}_{0b} \mathbf{J}_0 dV + \oint_A (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0) d\mathbf{A}. \quad (1.73)$$

A jobb oldalon álló második és harmadik integrál eltűnik. A második integrálban szereplő beiktatott különbségi tér mindig zérus: $\mathbf{E}_{0b} = \mathbf{E}_b - \mathbf{E}_b'' = 0$. A harmadik integrálban szereplő különbségi térvektorok közül legalább az egyiknek csak normális komponense van a felületen, mert a megoldásvektorok tangenciális komponense a felületen azonos, a különbségi vektoré tehát zérus. Ennek következtében a különbségi Poynting-vektornak nincsen normális komponense a felületen, az integrál zérus.

Végezetül tehát az (1.73) összefüggés az alábbi egyenletre redukálódik

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} (\varepsilon \mathbf{E}_0^2 + \mu \mathbf{H}_0^2) dV = \int_V \frac{\mathbf{J}_0^2}{\sigma} dV. \quad (1.74)$$

A jobb oldalon álló integrál nem lehet negatív. Ez nemcsak matematikai alakjából, de fizikai tartalmából (Joule-hő) is következik. Ekkor a bal oldalon álló integrál (a negatív előjelet figyelembe véve) időben nem növekedhet. A $t = t_0$ kezdeti pillanatban felvett értéke zérus (miért?) és miután nem vehet fel negatív értéket, zérus marad. Ez az integrál alakjából következően csak akkor lehetséges, ha

$$\mathbf{E}_0 \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}_0 \equiv \mathbf{0}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{E}' \equiv \mathbf{E}'', \quad \mathbf{H}' \equiv \mathbf{H}'' \quad (1.75)$$

A két különbözőnek feltételezett megoldás tehát azonos, a *megoldás egyértelmű*.

Megjegyzések:

1. A megoldás egyértelműségét beláttuk, de – ahogy erre utaltunk – nem tudjuk, hogy egyáltalán létezik-e megoldás. Erre a kérdésre jóval nagyobb matematikai eszköztárral felvértezve lehet választ adni.
2. A gondolatmenet nem alkalmazható időben nem változó (sztatikus, stacionárius) terek esetén. Ekkor ugyanis (1.74) bal oldalán az idő szerinti derivált eltűnik, függetlenül a tér viselkedésétől. Az ilyen feladatokban a „kezdeti érték” nem értelmezhető, ezek „peremérték”-feladatok. Megoldásuk egyértelműségére később visszatérünk.
3. Amennyiben a megoldást az egész térben keressük, a határfelület helyett a végtelenben kell feltételt kitűznünk. Ezt a „sugárzási feltételek” megadásával teljesíthetjük. Ezek két egyenértékű alakja

$$\mathbf{E} \rightarrow -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(\mathbf{r}^0 \times \mathbf{H}) \quad \mathbf{H} \rightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(\mathbf{r}^0 \times \mathbf{E}), \quad (1.76)$$

ahol $\rightarrow a$ végtelenben vett határértéket jelenti, \mathbf{r}^0 a kifelé mutató egységvektort.

A fenti összefüggések biztosítják, hogy az elektromágneses tér kifelé haladó hullámként viselkedjen, amely véges energiát szállít.

4. Az egyértelmű megoldás bizonyításában alapvető, hogy az energia a térmennyiségek négyzetes (tehát nem negatív) kifejezése. Ez a gyakori eset (például a mozgási energia $\frac{1}{2}mv^2$) máskor is felhasználhatóvá teszi a gondolatmenetet.

Az elektrodinamika felosztása a Maxwell-egyenletek alapján

Az elektrodinamika valamennyi jelenségét a Maxwell-egyenletek írják le, amelyek általános tér- és időfüggő egyenletek. A jelenségek a változóktól függően oszthatók fel.

A térbeli változást elhanyagolva elejtjük az erőter (mező) vizsgálatát, amelynek specifikuma a térbeli kiterjedés és változás. Ha a térbeli változástól eltekintünk, csak időbeli változásokat vehetünk figyelembe. Vannak csak időtől függő elektromágneses jelenségek! Ezek a koncentrált paraméterű hálózatok jelenségei. A hálózategyenletek és a Maxwell-egyenletek kapcsolatára még visszatérünk.

Ezt előre bocsátva az egyenletek két nagy jelenségek körét tartalmaznak: *időtől független* és *időfüggő* jelenségeket.

1. Időtől független jelenségek

Írjuk fel a Maxwell-egyenleteket időfüggetlen $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ esetre, általánosabb konstitúciós egyenletekkel.

$$\text{rot}\mathbf{E} = 0 \quad (1.77a) \quad \text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.78a)$$

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho \quad (1.77b) \quad \text{div}\mathbf{B} = 0 \quad (1.78b)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.77c) \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (1.78c)$$

Az első felismerés, hogy időtől független esetben az elektromos jelenségek körét leíró egyenletek, az (1.77a, b, c) teljesen függetlenek a mágneses egyenletektől. Az (1.77) egyenletcsoport által leírt jelenségkör az *elektrosztatika*.

Az (1.78) egyenletek csak akkor függetlenek az elektromos tértől, ha $\mathbf{J} = 0$. Ez az eset a *magnetosztatika* jelenségköre.

Ha $\mathbf{J} \neq 0$, de az áram és a többi mennyiség időben nem változik, ez a *stacionárius áramlás* jelenségköre. Az (1.62a) folytonossági egyenlet értelmében ekkor $\text{div}\mathbf{J} = 0$ és az áramra vonatkozó alapegyenletek

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{J} = 0, \quad \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b) \quad (1.79)$$

Az egyenletek teljes analógiában vannak a $\rho = 0$ tértöltés nélküli elektrosztatika egyenleteivel. Kérdés, hol lehetnek a tér forrásai? Válasz: az elektródákon elhelyezkedő felületi töltések létrehozhatják a teret.

A stacionárius mágneses tér egyenletei az (1.78) egyenletek, amelyekben \mathbf{J} -t adottnak tekintjük, illetve az (1.79)-ből határozzuk meg.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy az időtől független jelenségek magukban rejtik azt a feltételezést, hogy a fénysebesség végtelen nagy. Ilyen értelemben nyilván csak közelítő megoldást jelentenek.

2. Időfüggő jelenségek

A Maxwell-egyenletek teljes rendszerét jelentik. A jelenségekört összefoglalóan *elektromágneses hullámoknak* nevezzük. Van azonban egy – *kevésbé definiált* a esetünk, amikor az eltolási áramtól eltekintünk: a hullámtan jelenségei között eltekintünk az elektromos tér változása által keltett mágneses tértől.

A $\left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \ll |\mathbf{J}|$ feltétel figyelembevételével a *kvázistacionárius jelenségek* egyenleteihez jutunk. Ez a közelítés igen jól működik a villamos gépek területén, ahol nagyok a vezetési áramok és nagy a mágneses tér intenzitása, de kicsi a frekvencia, és ezért lassú a terek változási sebessége.

A kvázistacionárius jelenségek minőségileg eltérnek a hullámjelenségektől.

A Maxwell-egyenletek tiszta szinuszos időbeli változása esetén

A gyakorlatban a szinuszos időbeli változás kitüntetett szerepű. Ennek oka egyrészt a tiszta szinuszos gerjesztés gyakori előfordulása. A forgógépek és a rezonátoros oszcillátorok (rezgőkör, üregrezonátor) szinuszos feszültséget, illetve áramot állítanak elő. Másrészt a Fourier-transzformáció igen általános függvények esetén lehetővé teszi az időben változó jelenségek vizsgálatának visszavezetését szinuszos gerjesztésre. Nem mellékes, hogy a szinuszos gerjesztés teszi lehetővé az impedanciakoncepció általános használatát térben lejátszó jelenségekre is.

Tiszta szinuszos időbeli változás esetén komplex számítási technikával dolgozunk. A hálózat-elméletből ismert módon a szinuszos jeleket komplex amplitúdójú exponenciális függvények valós részeként értelmezzük

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}, \quad (1.80)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \Re \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}, \quad (1.81)$$

ahol a \sim (tilde) a komplex amplitúdót jelenti, \Re a valós (reális) rész jele.

Figyelem! Az elektromágneses jelenségek tárgyalása során mindig a mennyiségek komplex amplitúdójával dolgozunk. Ezért ezt általában nem jelöljük külön.

Az időbeli derivált a komplex amplitúdóra felírt egyenletben a $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$ szorzóoperátorba megy át, így az (I) és (II) Maxwell-egyenlet alakja

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E} = (\sigma + \mathbf{j}\omega\epsilon)\mathbf{E}, \quad (1.82)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}. \quad (1.83)$$

(1.82) feltételezi, hogy csak \mathbf{E} tér által létrehozott vezetési áram szerepel az egyenletben.

Az (1.82) egyenletet az

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon - j\sigma/\omega = \epsilon'(\omega) - j\epsilon''(\omega) \quad (1.84)$$

komplex permittivitás bevezetésével még egyszerűbb alakba írhatjuk. Itt ϵ'' láthatóan a veszteségeket írja le. Ez a veszteség nemcsak a véges vezetőképességből, hanem más mikrofizikai hatásokból is származhat. A veszteségeket jellemzi a δ veszteségi szög. A veszteségi szögre

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}. \quad (1.85)$$

Hasonlóan értelmezhető a komplex permeabilitás

$$\tilde{\mu}(\omega) = \mu'(\omega) - j\mu''(\omega), \quad (1.86)$$

ahol a képzetes rész a permittivitáshoz hasonlóan a veszteségeket reprezentálja.

Az egyenletekben a komplex amplitúdókhöz hasonlóan a komplex anyagállandókat sem jelöljük külön. Így az első két Maxwell-egyenlet alakja homogén közegben

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r}; \omega) = j\omega\epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}; \omega), \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}; \omega) = -j\omega\mu(\omega)\mathbf{H}(\mathbf{r}; \omega). \quad (1.87)$$

Monokromatikusak az egyetlen frekvencián lejátszódó tiszta szinuszos folyamatok. A kifejezést az optikából kölcsönözték, görögül „egyszínű”, „egyetlen színt tartalmazó” jelentésű. Monokromatikus esetben az ω paraméterként jelenik meg az egyenletben. Többfrekvenciás esetben a térjellemező vektorok és az anyagjellemző mennyiségek is a frekvencia függvényei.

A Poynting-vektor szinuszos időfüggés esetén

A Maxwell-egyenletek komplex alapjából energia-mérlegegyenlet vezethető le. Ennek következményeit egy aspektusa kivételével nem használjuk a továbbiakban. Ezért a levezetést és az energiaegyenletet nem részletezzük.

A Poynting-vektor komplex alakja, a *komplex Poynting-vektor* definíciószerűen

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*), \quad (1.88)$$

ahol $*$ a komplex konjugáltat jelöli.

Az $\frac{1}{2}$ szorzót az indokolja, hogy amplitúdókkal (csúcsértékekkel) számolunk. A komplex Poynting-vektornak általában van valós és képzetes része is. Ennek megfelelően a felületi integrálja a zárt felületen átáramló hatásos és meddő teljesítményt adja

$$P + jQ = \oint_A \mathbf{S} \, d\mathbf{A}. \quad (1.89)$$

A hatásos teljesítmény a veszteségeken átalakuló elektromágneses energia mellett az elektromágneses sugárzással eltávozó energiát is tartalmazza. A meddő teljesítmény a negyedperiódusonként oda-vissza áramló elektromágneses energiát szállítja, amely a térben tárolt.

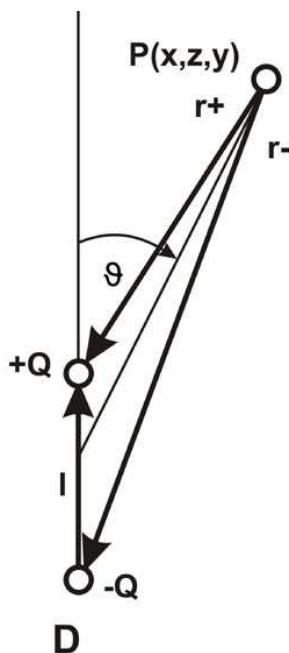
2. AZ ELEKTROMÁGNESES TÉR ÉS KÖZEG KÖLCSÖNHATÁSA

A dipólus

A mágneses tér alapegyenleteiből következik, hogy *mágneses töltés* nem létezik. Az anyagok mikrostruktúrájának ismeretében tudjuk, hogy az elektromos töltés is igen kiegyensúlyozott, hiszen egy atom össztöltése zérus. Ezért a (nemionizált) atom kifelé nem hoz létre a Coulomb-potenciálnak megfelelő teret.

Felmerül a kérdés: létezik-e zérus össztöltésű elemi töltéselrendezés, amely zérustól eltérő teret és potenciált hoz létre? Ha ilyen nem létezne, a permanens mágnesek viselkedését a Maxwell-egyenletek alapján nem tudjuk leírni.

Szerencsére van ilyen töltéselrendezés, a *dipólus*. A dipólus két, egymástól igen kis távolságra elhelyezkedő, azonos abszolút értékű, de ellentétes előjelű töltés együttese. A dipólus szerkezete olyan, hogy a töltéseket nem engedi a Coulomb-erő hatására elmozdulni. Helyezzük a két töltést egymástól l távolságra az origó közelébe a 2.1. ábrán látható módon D pontba.



2.1. ábra. A dipólus potenciáljának levezetéséhez

A töltéselrendezés által létrehozott potenciál a P pontban

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_+} - \frac{Q}{r_-} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_- + \mathbf{l}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_-|} \right). \quad (2.1)$$

Ha az l távolság r -nél sokkal kisebb, a zárójelben álló kifejezés közelíthető az alábbi módon

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_- + \mathbf{l}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_-|} \approx \mathbf{l} \operatorname{grad}_D \frac{1}{r}, \quad (2.2)$$

ahol jelöltük, hogy a differenciálást a D pont koordinátái szerint végezzük. Ezzel a közelítéssel

$$\varphi(P) \approx \frac{Q\mathbf{l}}{4\pi\epsilon_0} \text{grad}_D \frac{1}{r}. \quad (2.3)$$

Az elemi dipólust úgy származtatjuk, hogy a két töltést minden határon túl közelítjük egymáshoz, miközben a $Q\mathbf{l} = \mathbf{p}$ szorzat állandó marad. Ekkor \mathbf{p} elnevezése: *dipólusnyomaték* vagy *dipólusmomentum*, mértékegysége: C·m. A (2.3) egyre kisebb hibával adja meg a töltéselrendezés potenciálját, míg határesetben

$$\varphi(P) = \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \text{grad}_D \frac{1}{r}. \quad (2.4)$$

Létezik elemi dipól? Nem, de adott töltéseloszlás tere igen jól közelíthető vele. Az absztrakció ugyanolyan jellegű, mint a pontszerű töltésé. Tudjuk, hogy közelítés, de elfogadjuk és számolunk vele.

Megjegyzés: Aki a Dirac- δ -t ismeri, látja, hogy a pontszerű töltés sűrűségfüggvénye egy térbeli (háromdimenziós) Dirac- δ . A dipólus töltéssűrűsége δ deriváltja.

A számítások során általában a P pont koordinátái szerinti deriváltakkal számolunk. (Gondoljunk csak a térkiszámításra a potenciálból!) Ezért (2.4)-ben is áttérünk a P pont koordinátái szerinti deriválásra. Miután

$$r = \sqrt{(x_D - x_P)^2 + (y_D - y_P)^2 + (z_D - z_P)^2}, \quad (2.5)$$

nyilvánvaló, hogy a P és D szerinti deriváltak csak előjelben különböznek. Ezért

$$\varphi(P) = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \text{grad}_P \frac{1}{r}. \quad (2.6)$$

Megállapodás szerint a \mathbf{p} *dipólusnyomaték* a negatív töltéstől a pozitív töltés irányába mutat. A potenciál másik kifejezése

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}_0}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \cos \vartheta}{r^2}, \quad (2.7)$$

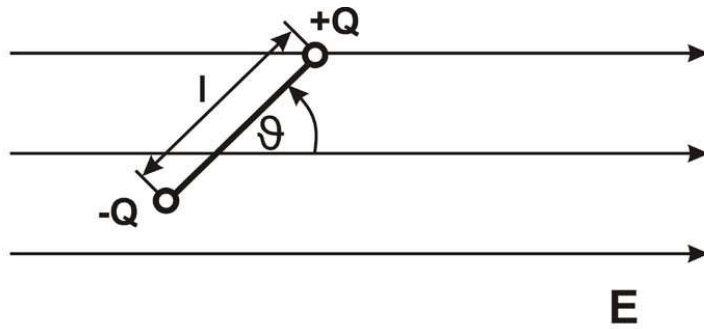
ahol \mathbf{r}_0 az \mathbf{r} irányba mutató egységvektor, ϑ a \mathbf{p} és \mathbf{r} által bezárt szög.

Némi számolással igazolható, hogy a térerősség kifejezése

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r}_0)}{r^3} \mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right]. \quad (2.8)$$

A pontszerű töltés $1/r^2$ távolságfüggésénél a dipólus tere a végtelenben gyorsabban, $1/r^3$ arányosan tűnik el.

Vizsgálható dipólus viselkedése elektromos térben? Homogén tér látható a 2.2. ábrán.



2.2. ábra. Dipólus homogén erőterben

$$\mathbf{E} = E\mathbf{i}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{p} = Ql(\cos\vartheta\mathbf{i} + \sin\vartheta\mathbf{j}). \quad (2.10)$$

Az eredő erő

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = Q\mathbf{E} + (-Q)\mathbf{E} = 0. \quad (2.11)$$

A dipólusra tehát nem hat (transzlációs) erő, forgatónyomaték azonban igen

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{l} \times (Q\mathbf{E}) = Q\mathbf{l} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (2.12)$$

A (2.9) és a (2.10) összefüggés felhasználásával

$$T = pE \sin\vartheta. \quad (2.13)$$

A nyomaték tehát az elektromos tér irányába igyekszik beforgatni a dipólust.

Ha a mező nem homogén, a dipólusra a forgatónyomatékon kívül eredő erő is hat, a dipólus elmozdul a térben.

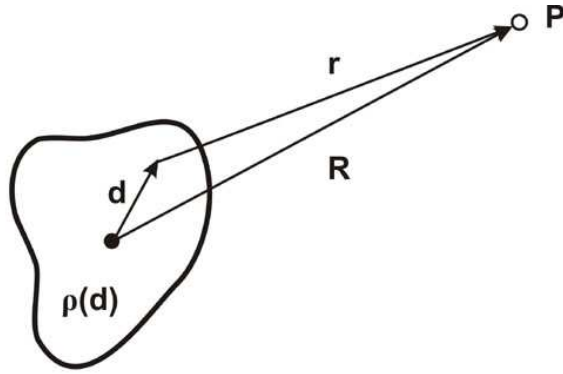
A dipólus alkalmazása

Adott töltéseloszlás terét viszonylag pontosan akarjuk számítani. Határozzuk meg azt az egyszerű eloszlást, amelynek potenciálja jól közelíti a töltéseloszlást!

Ha a távolság elegendően nagy és a tér finomabb részletére nem vagyunk kíváncsiak, a töltéseloszlás helyettesíthető egyetlen ponttöltéssel a 2.3. ábra szerinti módon.

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} \int_V \rho dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}, \quad (2.14)$$

ahol az $r \approx R$ az egész töltéselrendezésre közelítéssel éltünk. Az R értékét egy, a töltésen belüli pont határozza meg. A közelítés semleges ($Q = 0$) töltéselrendezésnél nem ad értékelhető eredményt.



2.3. ábra. Helyettesítő töltéselrendezés számítása

Ez a helyzet nem olyan ritka, hiszen az atomok és az azokból felépülő struktúrák pozitív és negatív össztöltése alaphelyzetben azonos. De a közelítés mindenképpen romlik, ha az R távolság annyira lecsökken, hogy a tér nem tekinthető gömbszimmetrikusnak.

Éljünk ekkor az alábbi közelítéssel: a \mathbf{d} helyvektorral rendelkező dV térfogat r távolságát a P ponttól határozzuk meg úgy, hogy a \mathbf{d} vektor \mathbf{R} helyvektorra vett vetületét kivonjuk a helyvektorból, azaz

$$r \approx R - \mathbf{d} \cdot \mathbf{r}_0, \quad (2.15)$$

ahol \mathbf{r}_0 az \mathbf{R} irányú egységvektor. Ha a P pont távolsága elegendően nagy, a két vektor közel párhuzamos, a (2.15) közelítés hibája igen kicsi.

A potenciál kifejezésébe helyettesítendő $\frac{1}{r}$ közelítése

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{d}} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{d}}{R}\right)} \approx \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{d}}{R}\right), \quad (2.16)$$

ahol az $1/R$ magasabb rendű tagjait elhanyagoltuk.

A potenciálfüggvény:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{R} \left(1 + \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}_0}{R}\right) dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} \int_V \rho dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r}_0}{R^2} \int_V \rho \mathbf{d} dV \quad (2.17)$$

A fenti kifejezés

$$\int_V \rho dV = Q \quad \text{és} \quad \int_V \rho \mathbf{d} dV = \mathbf{p} \quad (2.18)$$

jelöléssel

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0}{R^2} \quad (2.19)$$

alakba írható. Látható, hogy a térbeli töltéseloszlás egy ponttöltéssel és egy \mathbf{p} dipólnyomatékú dipólussal helyettesíthető, ahol Q és \mathbf{p} az eloszlásból a (2.18) összefüggés alapján számítható.

Megjegyzések:

1. A potenciál (2.19) formulája egyértelműen a függvény $\frac{1}{R}$ hatványai szerinti sorának első két tagja. A sor természetesen folytatható. A magasabb rendű tagok úgynevezett *multipólusok* potenciáljai, a sor a potenciál sorfejtése multipólus-potenciálok szerint. A magasabb rendű tagok együtthatóinak számítása egyre bonyolultabb. Szükség van rá, ha a szimmetria miatt a dipólusmomentum zérus. Ilyen tulajdonsága van például a CO_2 -molekulának.

2. Ha az össztöltés nem zérus, definiálható a „töltésközéppont” a tömegközépponthez hasonlóan. A töltés középpontjának definíciója

$$\int_V \rho \mathbf{d}V - \mathbf{r}_{\text{tk}} \int_V \rho dV = 0, \quad (2.20)$$

azaz

$$\mathbf{r}_{\text{tk}} = \frac{\int_V \rho \mathbf{d}V}{\int_V \rho dV} = \frac{\mathbf{p}}{Q}, \quad (2.21)$$

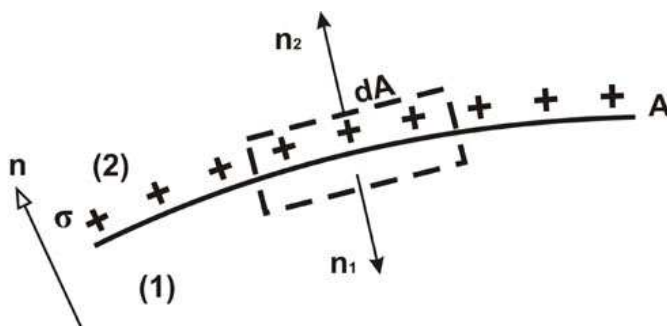
az önkényesen felvett D origóból mérve.

Elvi jelentőségű a következő felhasználási példa.

Ismerjük a felületi töltést és potenciálját

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\sigma dA}{r}. \quad (2.22)$$

Ezen a felületi töltésen a potenciál folytonos, azaz azonos a felület két oldalán. A potenciál normális irányú deriváltja változik a 2.4. ábrán látható módon.



2.4. ábra. A felületi töltés potenciáljának meghatározásához

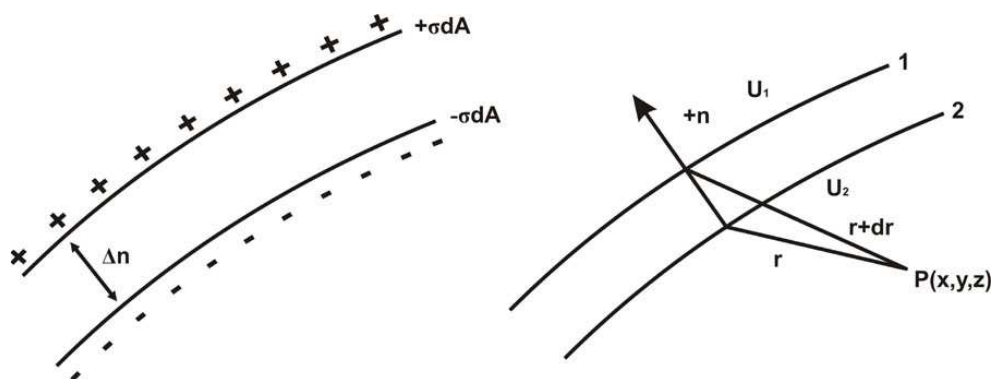
A Gauss-tételt alkalmazva az ábrán látható felületre és a bezárt térfogatra

$$\sigma \, dA = -\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} \right) dA = -\varepsilon_0 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 \right] dA ,$$

ahonnan

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 . \quad (2.23)$$

Képzeljük el ezek után azt a dipólus analógiájára kialakított helyzetet, hogy két azonos abszolút értékű, de ellenkező előjelű felületi töltéssűrűséggel ellátott réteget igen közel helyezünk el egymáshoz! Az elrendezést *kettős rétegnek* nevezzük (2.5. ábra).



2.5. ábra. Kettős réteg potenciálja

A kettős réteg a $\sigma dA \cdot \Delta n \cdot \mathbf{n}$ nyomatékú dipólusok folytonos elosztása a felületen. Itt Δn a két felület távolsága, \mathbf{n} a negatív töltésű felülettől a pozitív töltésű felület felé irányított, a felületre merőleges egységvektor. Ha a felületek közötti távolság úgy csökken, hogy a $\sigma \Delta n$ szorzat állandó marad, az ideális kettős réteget kapjuk. Ennek jellemzője a

$$\mathbf{v} = \sigma \Delta n \mathbf{n} , \frac{C}{m} \quad (2.24)$$

a kettős réteg felületi nyomatéka.

A kettős réteg dA felületeleme elemi dipólusnak tekinthető $\mathbf{v} dA$ dipólusnyomatékkal. Ennek hozzájárulása a kettős réteg potenciáljához a (2.4) összefüggés alapján:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{v} \operatorname{grad} \frac{1}{r} dA .$$

A teljes kettős réteg potenciálja a sok elemi dipólus potenciáljának összegzésével kapható

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \mathbf{v} \operatorname{grad} \frac{1}{r} dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \mathbf{v} \operatorname{grad} \frac{1}{r} dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A v \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dA. \quad (2.25)$$

A kettős rétegen a potenciál normális irányú deriváltja folyamatosan halad át, viszont a potenciál ugrik, eltérő értékű a kettős réteg két oldalán. Igazolható, hogy

$$\varphi_1 - \varphi_2 = v / \epsilon_0. \quad (2.26)$$

A felületi töltés és a kettős réteg potenciálja és térerőssége a véges vastagságú elrendezések tulajdonságának határértékeként értelmezhető.

A kettős réteg jelentősége, hogy a természetben fellépő struktúrák igen jó modellje lehet. Példa: az élő szervezetek sejtfalának két oldalán ellentétes töltés halmozódik fel és potenciálkülönbség van. A sejtfal modellje elektromos szempontból a kettős réteg.

A közegek hatása a térre

A konstitúciós egyenletekben a lehető legegyszerűbb feltételezéssel élünk: az intenzitásvektorok és a gerjesztett vektorok között homogén, lineáris és izotróp összefüggés áll fenn. A mező kölcsönhatása a közeggel ennél bonyolultabb összefüggéseket is teremthet.

A közegekben tér hatására dipólusok alakulnak ki. Egyes esetekben, például ferromágneses közegekben a dipólusok a tértől függetlenül, állandóan léteznek.

A további megfontolásokat elektromos dipólus esetére tesszük. Az alapösszefüggések mágneses dipólus esetén lényegében azonosak.

A dielektrikumokat a bennük elhelyezkedő dipólusok sűrűsége jellemzi. Legyen N az egységnyi térfogatban levő dipólusok száma. Ekkor a dipólussűrűséget a közegben a polarizáció vektora adja meg

$$\mathbf{P} = NQ\mathbf{l} = N\mathbf{p} \frac{1}{m^3} C \cdot m = \frac{C}{m^2}. \quad (2.27)$$

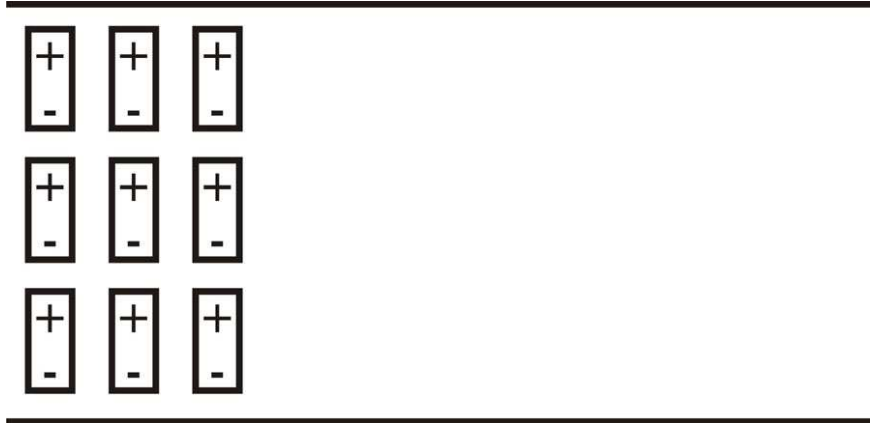
A dipólussűrűség mértékegysége és dimenziója megegyezik az eltolási vektoréval (és a felületi töltéssűrűségével). Ez lehet véletlen, de aligha az.

A dipólussűrűség hatásának vizsgálata előtt nézzük meg, miért is alakulnak ki a dipólusok. Előre kell bocsátani, hogy a közegek elektromosan általában semlegesek, a pozitív és negatív töltések összege megegyezik, és így egészében semlegesítik egymást. Ez áll az anyag kisebb részeire, atomokra és molekulákra is. Az elektromos tér hat az atomok és molekulák töltött részecskéire, és igyekszik azokat elmozdítani. A pozitív és negatív részecskék ellenkező irányba mozdulnak el. Elszakadni egymástól azonban nem tudnak, mert az atomot, illetve molekulát összetartó erők ezt megakadályozzák. A deformálódott anyagrészecske pozitív és negatív töltéseinek középpontja többé nem esik egybe, és ez mindaddig fennáll, amíg a külső elektromos tér hat. A tér jelenlétében tehát a közeg meghatározott dipólussűrűséggel rendelkezik.

Tételezzük fel, hogy a tér hatására kialakult dipólussűrűség egyenletes eloszlású. Ekkor a közeg belsejében a szembeforduló pozitív és negatív töltések semlegesítik egymást. Más a

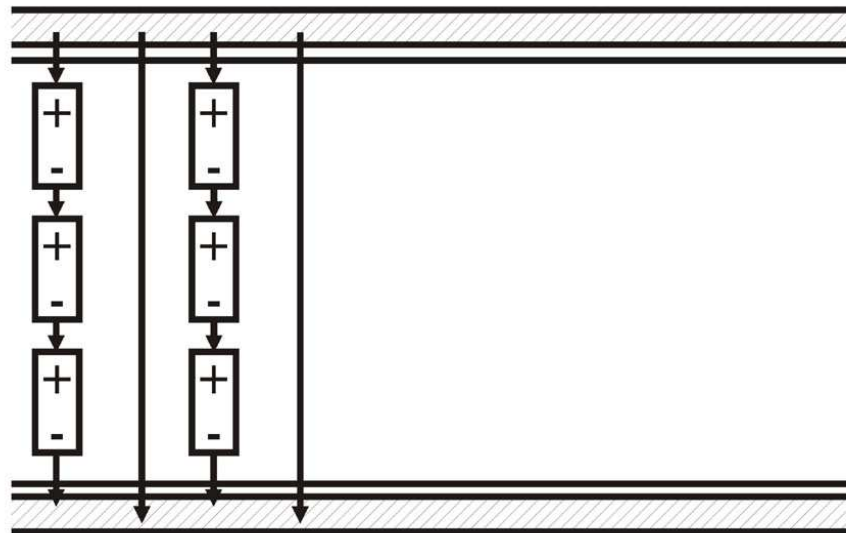
helyzet a dielektrikum felületén (2.6. ábra). A felületen a töltéssűrűség éppen a kompenzáló polarizációs töltés

$$\sigma_{\text{pol}} = P. \quad (2.28)$$



2.6. ábra. Dipólusok a közegben

Tételezzük fel, hogy a dielektrikum egy síkkondenzátor lemezei közt helyezkedik el (2.7. ábra). A kondenzátor fegyverzetén legyen a teret – és így a polarizációt is – létrehozó σ valódi töltéssűrűség. A Gauss-tételt alkalmazva a dielektrikumon belüli teret a teljes felületi töltéssűrűség hozza létre



2.7. ábra. Polarizált dielektrikum

$$E = \frac{\sigma - \sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0}, \quad (2.29)$$

ahonnan a (2.28) összefüggés felhasználásával

$$D = \sigma = \varepsilon_0 E + P. \quad (2.30)$$

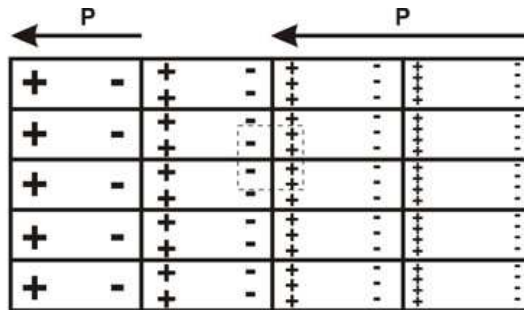
Általánosságban (2.30) vektoriális megfelelőjét használjuk (lásd 1.77c)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (2.31)$$

A (IV) $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ egyenletből (2.31) behelyettesítésével és némi rendezés után kapjuk, hogy

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}), \quad (2.32)$$

amit (2.29) összefüggéssel összehasonlítva látjuk, hogy a polarizációs töltés általánosságban a dipólussűrűség negatív divergenciája (2.8. ábra).



2.8. ábra. Ha \mathbf{P} polarizációvektor divergenciája különbözik zérustól, tértöltés lép fel

A (2.31) összefüggésnek az egyenletek felírása szempontjából akkor van jelentősége, ha ismerjük a \mathbf{P} és \mathbf{E} közötti kapcsolatot. Kis térerősség esetén a mennyiségek arányosak és egy irányba mutatnak:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad (2.33)$$

ahol $\chi_e (>0)$ az elektromos szuszceptibilitás. Ezzel (2.31)-ből

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad (2.34)$$

ahol az ε_r relatív permittivitás definícióját is megadtuk.

A mágneses térben a $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ állítás alapján a tér létrehozásában a mágneses töltés *nem, csak* mágneses dipólusok játszhatnak szerepet. A \mathbf{B} és \mathbf{H} közti kapcsolat (2.31)-gyel analógiában a

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (2.35)$$

alakba írható, ahol \mathbf{M} a mágnesezettség, a mágneses dipólussűrűség vektora (lásd 1.78c).

Lineáris esetben

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (2.36)$$

ahol χ_m a mágneses szuszceptibilitás. Ezzel

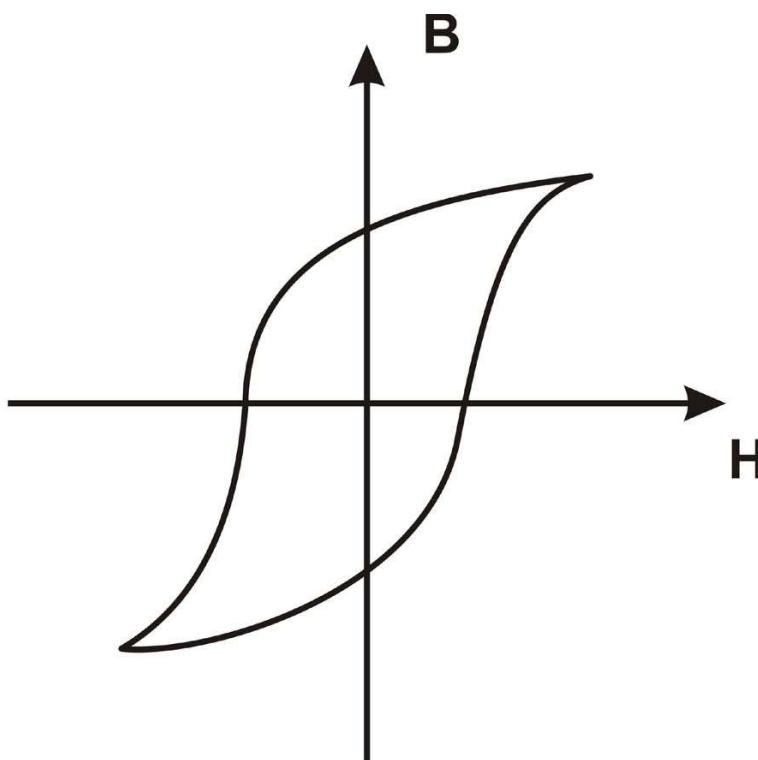
$$\mu = (1 + \chi_m) \mu_0 = \mu_r \mu_0, \quad (2.37)$$

amely teljes analógiában van az elektromos jelenségekkel.

Az alapvető különbség χ_e és χ_m nagyságrendjében van. Amíg az elektromos szuszceptibilitás értéke általában 1 és 20 között van, bár ennél nagyobb értékek is előfordulnak, a mágneses szuszceptibilitás értéke nem ferromágneses anyagokra $-10^{-2} < \chi_m < 10^{-4}$ nagyságrendű. A nem ferromágneses anyagok a teret gyakorlatilag nem befolyásolják. Ferromágneses anyagokra χ_m akár a 10^6 -t is elérheti. Ferromágneses anyagoknál illuzórikus a lineáris modellel számolni. Ilyenkor a konstitutív reláció nemlineáris:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}(\mathbf{H}). \quad (2.38)$$

A nemlineáris kapcsolat a 2.9. ábrán látható.



2.9. ábra. Mágneses hiszterézis

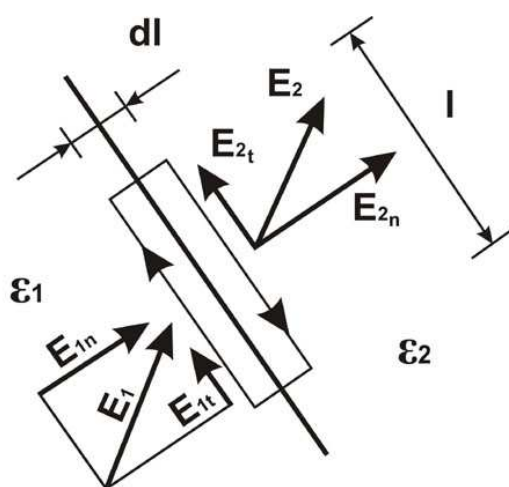
A legszembevetőbb, hogy a függvény nem egyértékű. \mathbf{B} aktuális értéke az előéletől függ. Lineáris összefüggést csak kezeletlen anyagok és igen kis terek esetén kapunk. μ_r értéke 10 és 10^4 közötti.

Térjellemező vektorok a közegek határán

A vizsgált térrészekben a közegek inhomogének lehetnek. Ennek leggyakoribb formája, hogy előírt felületeken az ε , μ és σ közegjellemzők hirtelen változnak. Az ugrásszerű változás következtében a térjellemező vektorok is ugrásszerűen változni fognak. Ennek az ugrásnak a meghatározása a következő célkitűzés.

Mint az elektrodinamika valamennyi feladatát, ezt is az alapegyenletekkel oldjuk meg a szemléletes integrális egyenleteket felhasználva.

Az elektromos térerősség vizsgálatához a határfelület közelében vegyünk fel egy kis hurkot (2.10. ábra) a felület mentén.



2.10. ábra. Elektromos térerősség közegek határán

Az (1.44) egyenletből

$$\oint_l \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = - \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{A} \, , \quad (2.39)$$

amit az adott geometriára alkalmazva

$$E_{1t}l - E_{2t}l = - \frac{\partial B}{\partial t} l \, dl \, . \quad (2.40)$$

Zsugorítsuk a hurkot a felületre, azaz $dl \rightarrow 0$. Ekkor (2.40) jobb oldala eltűnik, mivel $\frac{\partial B}{\partial t}$ nem tart a végtelenhez,

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad (2.41)$$

azaz a felület két oldalán az elektromos térerősség tangenciális komponense azonos, a tangenciális komponens folytonos.

Ez az összefüggés vektoriális formában $\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}$ alakba írható, ahol \mathbf{n} a határfelületre merőleges, az 1 jelű közegből a 2 jelű közegbe mutató egységvektor.

Sajátos esetet kapunk, ha az egyik közeg ideális vezető. Ideális vezetőben $\sigma \rightarrow \infty$, $1/\sigma \rightarrow 0$. A közegben a térerősség, és így tangenciális komponense is zérus, mivel tetszőleges áramsűrűség esetén $E = J/\sigma = 0$. Ennek megfelelően ideális fémfelületen a térerősség tangenciális komponense zérus

$$E_t = 0. \quad (2.42)$$

Más szavakkal: *ideális fém felületére az elektromos térerősség mindig merőleges.*

Hasonlóan a mágneses térerősségre az (1.46) egyenletből

$$\oint_l \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \int_A \mathbf{J} \, d\mathbf{A}. \quad (2.43)$$

Az egyenletből az előzőekhez hasonló megfontolással elhagytuk a $\partial \mathbf{D} / \partial t$ tagot.

A 2.10. ábrán látható hurokra, illetve az általa körülvelt felületre integrálva (E helyére H -t helyettesítve)

$$H_{1t} l - H_{2t} l = J l \, dl. \quad (2.44)$$

Van létjogosultsága azt feltételezni, hogy $J \, dl$ állandó marad a határátmenet során. Ez a felületi áram, amelynek sűrűsége

$$\lim_{dl \rightarrow 0} \mathbf{J} \, dl = \mathbf{K} \quad \frac{\text{A}}{\text{m}}. \quad (2.45)$$

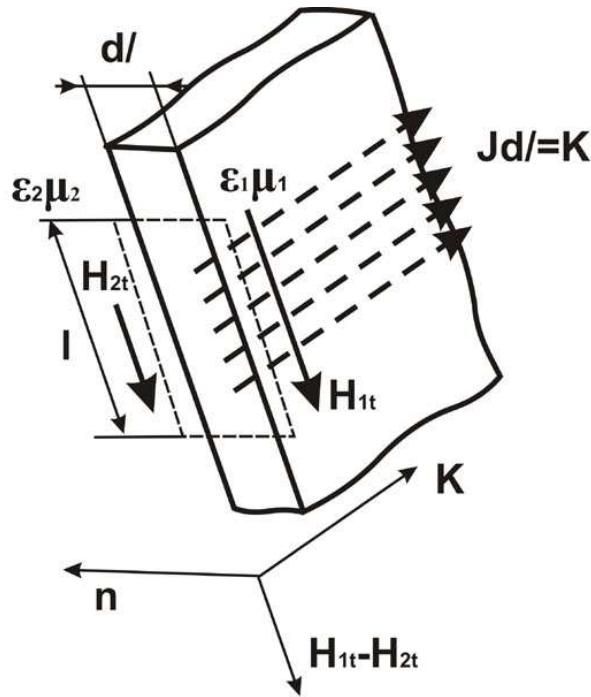
Ezzel a felületi áramsűrűséggel

$$H_{1t} - H_{2t} = K, \quad (2.46)$$

azaz a felületen a mágneses térerősség tangenciális komponense a felületi áram sűrűségének megfelelő értékkel *ugrik*. (2.43)-ból következik, hogy (2.46) a \mathbf{K} vektor $H_{1t} - H_{2t}$ -re *merőleges* komponensére érvényes. Ezért vektoriálisan az

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \quad (2.47)$$

összefüggés érvényes a 2.11. ábrán látható módon.



2.11. ábra. Mágneses tér folytonossági feltétele

Felületi áramsűrűség hiányában a mágneses térerősség tangenciális komponense folytonos.

Ferromágneses közegben $\mu \rightarrow \infty$, ezért $H = B/\mu = 0$, a mágneses térerősség zérus. A közeg felszínén nem lehet tangenciális térerősség-komponens és így a külső térben is

$$H_t = 0, \quad (2.48)$$

azaz ferromágneses közeg felszínén a mágneses térerősség *merőleges*.

Ideális vezető felszínén elenyésző vékony szabad töltésréteg tud kialakulni. Ez nem tévesztendő össze a szigetelők felszínén kialakuló polarizációs töltéssel, ami a dipólusok kompenzálatlan töltésének következménye és helyhez kötött.

A vezető felszínén kialakuló töltésekre hat a Lorentz-erő, a töltések felületi áramot hoznak létre. Miután végtelen jó vezetőben az elektromos térerősség eltűnik, az (1.36) egyenlet értelmében a mágneses indukció is eltűnik és így a mágneses térerősség is zérus, feltéve, hogy a közeg permeabilitása véges. Ezért az így kialakuló felületi áram megegyezik a mágneses tér tangenciális komponensével

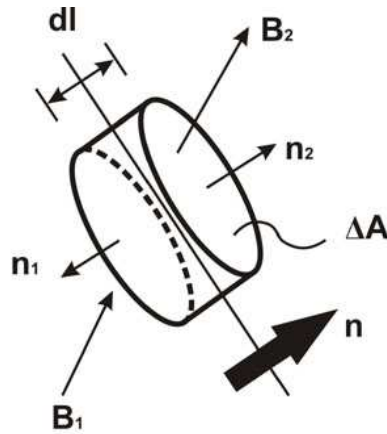
$$H_{2t} = K, \quad (2.49)$$

vektoriális formában

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{K}. \quad (2.50)$$

A további két térvektor eltérően viselkedik. Ennek oka, hogy amíg az \mathbf{E} és \mathbf{H} vektorok *rotációjára* vonatkozik a Maxwell-egyenlet, addig a \mathbf{D} és \mathbf{B} vektorok *divergenciájáról* kapunk adatot.

A mágneses indukcióra vonatkozó határfeltétel megállapításához helyezzünk egy lapos hengert a határfelületre a 2.12. ábra szerint oly módon, hogy a határfelület normális vektora és az A felületek normális vektora egy irányba mutasson.



2.12. ábra. Mágneses indukcióvektor közegek határán

A henger felületére a (III) Maxwell-egyenlet integrális alakját alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} \, dV = \oint_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = B_{2n} \Delta A - B_{1n} \Delta A + d\Phi, \quad (2.51)$$

ahol $d\Phi$ a henger palástján fellépő fluxus.

Zsugorítsuk a hengert a felületre oly módon, hogy dl és így $d\Phi$ is tartson zérushoz. Végezetül kapjuk, hogy

$$B_{2n} \Delta A - B_{1n} \Delta A = 0, \quad (2.52)$$

ahonnan

$$B_{2n} = B_{1n}. \quad (2.53)$$

Tehát a felületen a mágneses indukcióvektor normális komponense folytonos. Vektorjelöléssel

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \mathbf{n} = 0. \quad (2.54)$$

Hasonló gondolatmenettel az eltolási vektorra (B helyére D -t helyettesítve)

$$\int_V \rho \, dV \Rightarrow \rho \, dl \Delta A = \oint_A \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = (D_{2n} - D_{1n}) \Delta A + d\psi, \quad (2.55)$$

ahol $d\psi$ az eltolási vektor fluxusa a henger palástján. Ez a mennyiség dl csökkenésével a nullához tart. Nem ez a helyzet a $\rho \, dl \, \Delta A$ töltéssel, ha a határon felületi töltés van. Ekkor

$$\lim_{dl \rightarrow 0} \rho \, dl = \sigma, \quad (2.56)$$

és végül

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (2.57)$$

A (2.57) jelentése, hogy az eltolási vektor normális komponense ugrik, ha a közegethatáron felületi töltés van. Ellenkező esetben az eltolási vektor normális komponense folytonos.

Vektoriális formában

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \mathbf{n} = \sigma. \quad (2.58)$$

Ha az egyik közeg ideális vezető, abban $E = 0$ és így $D = 0$ is igaz ($\varepsilon \neq \infty$). Ekkor E és D is merőleges a határfelületre, és

$$D = \sigma; \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (2.59a, b)$$

Az áramsűrűsége a folytonossági egyenlet alapján az előzőekhez hasonló gondolatmenettel a következő egyenlet írható fel

$$J_{2n} - J_{1n} + \operatorname{div}_F K = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (2.60)$$

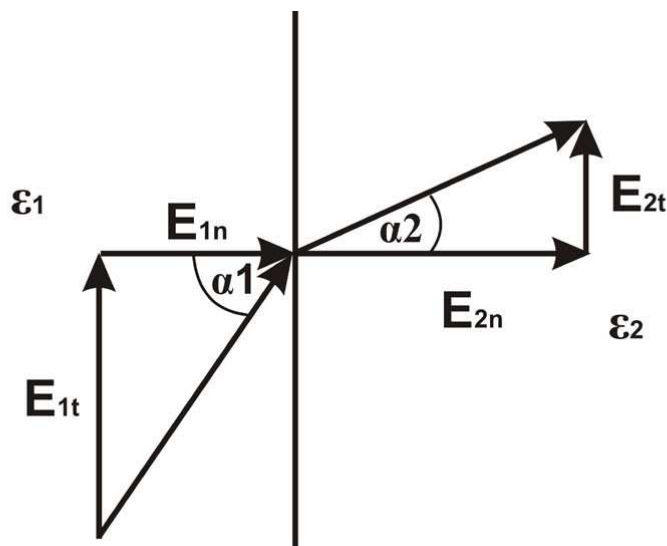
Ez a felületi töltéssűrűsége érvényes folytonossági egyenlet. A benne szereplő div_F a felületi áram divergenciája. A felületi töltés a térfogati áramok nélkül is változhat, ha felületi áram formájában folyik.

A térvektorok töréstörvényei

Az előzőekben láttuk, hogy a térjellemező vektoroknak csak az egyik komponense folytonos. A másik komponens értéke az anyagjellemzőktől függ.

A 2.13. ábrán láthatjuk a villamos térvektorok viselkedését egy határfelületen, ha ott nincs felületi töltés. A felületre merőleges iránnyal bezárt szögekre:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{E_{1t} / E_{1n}}{E_{2t} / E_{2n}} = \frac{D_{1t} / D_{1n}}{D_{2t} / D_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (2.61)$$



2.13. ábra. Elektromos tér töréstörvénye

Érdeemes megvizsgálnunk azt a helyzetet, amikor az egyik permittivitásérték jóval nagyobb, mint a másik. $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ esetén $\operatorname{tg} \alpha_2 \rightarrow 0$, azaz a térerősség közeledik a felületre merőleges

állapothoz. Ilyenkor $\operatorname{tg} \alpha_1 \gg \operatorname{tg} \alpha_2$; azaz $\alpha_1 \gg \alpha_2$; $\alpha_1 \rightarrow 90^\circ$. A térerősség vektora a felülethez hajlik a nagy permittivitású közegben. A tér mintegy „besűrűsödik” a felület közelében.

Mágneses térjellemzőkre is a (2.61) alkalmazható, *mutatis mutandis*. \mathbf{E} helyére \mathbf{H} -t, \mathbf{D} helyére \mathbf{B} -t és ε helyére μ -t helyettesítve a formula és a megfontolások érvényben maradnak.

Stacionárius, időben változatlan esetben az áram vektorára az analógiák alapján (2.61) változatlanul érvényes, \mathbf{D} helyébe \mathbf{J} -t és ε helyébe σ -t helyettesítve.

Általános esetben ilyenkor a két közeg felületén töltés keletkezik, és \mathbf{D} merőleges komponense nem megy át folytonosan a felületen. A felületi töltéssűrűség

$$\sigma = D_{2n} - D_{1n} = \left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} \right) J_n, \quad (2.62)$$

ami csak az $\varepsilon_2/\sigma_2 = \varepsilon_1/\sigma_1$ speciális esetben zérus.

Az előzőekben láttuk, hogy ezek a megfontolások időben változó terek esetén nem érvényesek.

3. ELEKTROSZTATIKA ÉS STACIONÁRIUS ÁRAMLÁSI TÉR

Poisson-egyenlet, Laplace-egyenlet, Coulomb-potenciál

Az elektrosztatika alapegyenletei vákuumban:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}. \quad (3.1a, b, c)$$

A 1. fejezetben láttuk, hogy a (3.1a) egyenlet következtében az elektromos térerősséget a skalárpotenciál gradienseivel fejezhetjük ki, azaz

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \quad (3.2)$$

és (3.1b)-ből

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.3)$$

felhasználásával adódik a

$$\operatorname{div} \operatorname{grad}\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.4)$$

A $\operatorname{div} \operatorname{grad}$ kettős derivált olyan gyakran fordul elő a vektoranalízisben, hogy külön szimbólumot és elnevezést kapott. A

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta \quad (3.5)$$

a *Laplace-operátor. Descartes-koordinátákban*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.6)$$

A (3.4)–(3.6) összefüggés felhasználásával az ismert töltéeloszlás potenciáljának egyenlete a *Poisson-egyenlet*

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.7)$$

A tér azon helyén, ahol nincsen töltés, az egyenlet átmegy a homogén Laplace-egyenletbe

$$\Delta\varphi = 0. \quad (3.8)$$

A (3.7) megoldása a következő:

A pontszerű töltés terének ismeretében kiszámítható a Q töltés potenciálja, az ún. Coulomb-potenciál. $\varphi(\infty)=0$ választással a Coulomb-potenciál alakja

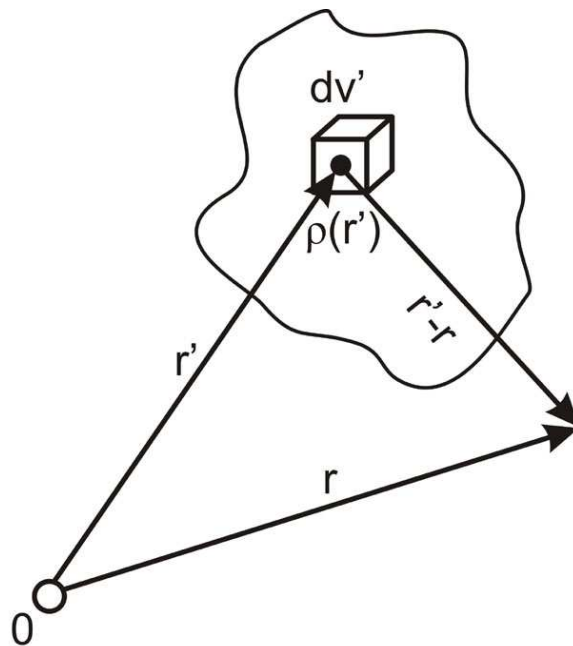
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}. \quad (3.9)$$

Egy elemien kicsi dV' térfogatban elhelyezkedő töltést ponttöltésnek tekinthetünk, így hozzájárulása egy kiterjedt töltéseloszlás potenciáljához

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.10)$$

Ezen potenciálok szuperpozíciója eredményezi a teljes töltéseloszlás potenciáljának (3.11) kifejezését a 3.1. ábra szerinti módon.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (3.11)$$



3.1. ábra. A (3.11) formula értelmezéséhez

A fenti megoldás nem matematikai, hanem fizikai alapon született. A szigorú matematikai levezetés bebizonyítja, hogy a Poisson-egyenlet megoldása elegendő tesz a

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta\varphi}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \oint_A \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dA - \frac{1}{4\pi} \oint_A \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dA$$

egyenletnek, ahol r a dV térfogatelem távolsága attól a ponttól, ahol a potenciált keressük. A fenti kifejezés a zárt A felülettel határolt V térfogatban érvényes. A jobb oldal első tagja a (3.7) egyenletre tekintettel a térfogatban elhelyezkedő töltés hatását írja le. A szigorú matematikai levezetés ennek a tagnak a megjelenésével a Maxwell-egyenletekből származtatva eljut a Coulomb-potenciálra. Így a Coulomb-törvény a Maxwell-egyenletek következményeként adódik.

A jobb oldal második és harmadik tagja a vizsgált térfogaton kívül elhelyezkedő töltések hatását jeleníti meg a vizsgált térfogatban. Látjuk: ehhez meg kell adni (és elegendő is megadni) a határoló felületen a potenciál és normális irányú gradiense értékét. A két kifejezés nem független, ezért egymástól függetlenül nem adható meg. A későbbiekben bebizonyítjuk, hogy a határoló felületen elegendő *vagy* a potenciál, *vagy* a normális irányú deriváltja megadása a feladat egyértelmű megadásához.

Ezért a fenti kifejezés inkább azonosság, mintsem számítási utasítás. Fizikai tartalma azonban rendkívül érdekes.

A jobb oldal második tagja a felületi töltésréteg potenciálja, míg a harmadik tag kettős réteg. Így a fizikai tartalom nyilvánvaló: a vizsgált térfogaton kívüli töltések hatása úgy is figyelembe vehető, mintha a felületen felületi töltés és kettős réteg lenne. Ezeken a felületeken a térerősség, illetve a potenciál ugrik. Ez az ugrás éppen akkora, mint az előírt határfeltétel, tehát ha töltés és kettős réteg fizikailag jelen volna a felületen, ez azt jelentené, hogy a felületen kívül a potenciál és a térerősség is zérus.

A zárt felületen belüli töltés is helyettesíthető a felületre tett töltéssel és kettős réteggel, miközben belül zérus teret és potenciált feltételezünk. Speciális esetben, ha a felület ekvipotenciális, elegendő a felületi töltésréteg helyettesítő töltésként. Ezt a tényt az integrálegyenleteket alkalmazó megoldási módszernél felhasználjuk.

Az egész térben történő potenciáeloszlás meghatározása esetén a fenti egyenlet jobb oldalának második és harmadik tagja eltűnik. Ennek feltétele, hogy töltés csak a véges térrészben legyen. Ekkor a potenciál $\frac{1}{R}$, a potenciál deriváltja $\frac{1}{R^2}$ arányban tűnik el a végtelenben. Mindkét integrandusz tehát $\frac{1}{R^3}$ nagyságrendű, miközben az integrálási felület R^2 -tel arányos. $R \rightarrow \infty$ esetén tehát az $\frac{1}{R^3} R^2 \sim \frac{1}{R}$ rendben tűnik el az integrál. Ezért az egész térben a megoldás (3.11) alakjában írható le.

Megjegyzések:

1. A potenciál (3.11) alakú kifejezésébe a felületi, vonalszerű és ponttöltések is beleértendők. Közülük a felületi töltésnek kitüntetett szerepe van (fémelektrodák felületén és különböző közegek határfelületén), ezért a potenciálok kifejezésében gyakran külön is szerepeltetjük

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{R} dA', \quad (3.12)$$

ahol $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

A kifejezésben csak óvatosan lehet kezelni a vonalszerű és a pontszerű töltés potenciálját, mivel *szinguláris* tulajdonságúak, a végtelenhez tartanak, ha megközelítjük a töltést, azaz $R \rightarrow 0$.

2. Kétdimenziós feladathoz jutunk, ha az elrendezés az egyik koordináta mentén „végtelen”. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy az elrendezés hossza – változatlan keresztmetszettel – olyan nagy, hogy a végek hatásától a vizsgált térközben eltekinthetünk. Ekkor (3.12)-ben a végtelen hosszú vonaltöltés terének ismeretében az $1/R$ helyébe $\ln(1/R)$ -t írhatunk

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \ln \frac{1}{R} dA' + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int \sigma(\mathbf{r}') \ln \frac{1}{R} dl'. \quad (3.13)$$

3. A fenti megfontolásokat szabad térben kialakuló mezőre tettük. Amennyiben a töltések polarizálható szigetelők környezetében helyezkednek el, a tér számítási módszerei különbözhetnek attól függően, hogy a dielektrikum homogén (az egész tér azonos közeggel van kitöltve), vagy inhomogén térrészenként változó permittivitással.

A) Homogén dielektrikum esetén választhatunk: vagy a valódi és polarizációs töltés összegeként kiadódó szabad töltéssel számolunk, vagy a valódi töltésekre írjuk fel a Poisson-egyenletet. Első esetben, szabad töltéssel számolva,

$$\rho_{\text{szabad}} = \rho - \operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (3.14)$$

amivel

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_{\text{szabad}}}{\varepsilon_0}. \quad (3.15)$$

Valódi töltésekre:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (3.16)$$

B) Térrészenként változó permittivitás esetén a valódi töltéssel célszerű számolni. A dielektrikumok határfelületén a térvektorok folytonossági feltételei érvényesek. A Poisson-egyenlet megoldásakor az E tangenciális komponensének folytonossága

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad (3.17)$$

az eltolódási vektor normális komponensének folytonossága

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad (3.18)$$

alakba írható, ahol a $\frac{\partial}{\partial n}$ jelölés a gradiens felületre merőleges komponense

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{n}. \quad (3.19)$$

4. Az elektrosztatika alapegyenlete helyfüggő permittivitás esetén is felírható. A folytonosan változó függvénnyel leírható permittivitás fizikailag nem reális. A térrészenként állandó permittivitást az előzőekben vizsgáltuk.

A fémelektrodák tere

Az eddigiekben előre megadott térbeli (felületi stb.) töltéseloszlás terét kerestük. Ennek a feladatnak kicsi a gyakorlati jelentősége, hiszen a legtrikább esetben ismerjük a töltések eloszlását.

A gyakorlati elektrosztatika alapfeladatai a következők:

1. Ismerjük az elektródok geometriáját. Mindegyik elektróda potenciálja adott (és természetesen állandó). Keressük a tér minden egyes pontjában a potenciált (és térerősséget), miközben mindenütt érvényes a $\Delta \varphi = 0$ egyenlet, azaz az elektródok közötti térben *nincsen töltés!*

2. Ismerjük az elektródok geometriáját, valamint minden egyes elektróda ösztöltését. Keresendő a tér minden pontjában a potenciál (és térerősség), miközben a $\Delta\varphi = 0$ egyenlet mindenütt érvényes, az elektródokon kívüli térben nincs töltés.

Tömör fém esetén magától értetődőnek tekintjük, hogy az elektródák belsejében nincsen töltés, csak a felületükön. Becsüljük meg azt az időt, ami alatt az eredetileg esetleg létezett töltéeloszlás eltűnik a közegből.

Induljunk ki a folytonossági egyenletből

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{J} = 0 \quad (3.20)$$

és helyettesítsük \mathbf{J} divergenciáját az alábbi módon

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = \sigma \operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \operatorname{div}\mathbf{D} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \quad (3.21)$$

a homogén közegben. Ezzel a

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho = 0 \quad (3.22)$$

egyenlethez jutunk, amelynek megoldása

$$\rho(r,t) = \rho_0(r) \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{rel}}}\right), \quad (3.23)$$

ahol a relaxációs időt csak a közegjellemzők szabják meg

$$\tau_{\text{rel}} = \frac{\varepsilon}{\sigma}. \quad (3.24)$$

Jó vezetőnek vegyük példaként a rezet

$$\tau_{\text{rel}} = \frac{\varepsilon_0}{\sigma} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12}}{5,7 \cdot 10^7} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ s}.$$

Az eredeti töltés gyakorlatilag azonnal eltűnik. A mikrofizikai hatások figyelembevételével valamivel nagyobb $10^{-14} \cdot 10^{-15}$ s relaxációs időt kapunk.

Jó dielektrikumokban a relaxációs idő akár napokat is kitehet.

Az elektrosztatika egyenleteinek egyértelmű megoldása

Az 1. fejezetben igazoltuk, hogy a Maxwell-egyenletek megoldása igen általános feltételek mellett egyértelmű. Már ott megjegyeztük, hogy az időben nem változó terek esetén a levezetés nem alkalmazható.

A továbbiakban bemutatjuk, hogy zárt térfogatban a megoldás egyértelmű, ha a térfogat határolófelületén a potenciál vagy a térerősség normális komponense (ez a felületi töltéssűrűségnek felel meg) adott. A bizonyítás homogén közegre vonatkozik.

A bizonyítás elvégzéséhez szükségünk van az úgynevezett *Green-tételre*. Ez a tétel a matematika *Gauss-tételének* közvetlen folyománya.

Alkalmazzuk a Gauss-tételt az

$$\mathbf{u} = \psi \operatorname{grad} \varphi \quad (3.25)$$

vektorfüggvényre, ahol ψ és φ folytonosan differenciálható skalárfüggvények. Az \mathbf{u} -t a Gauss-tételbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\int_V \operatorname{div}(\psi \operatorname{grad} \varphi) dV = \oint_A \psi \operatorname{grad} \varphi \, d\mathbf{A}. \quad (3.26)$$

A vektoranalízisből ismert, hogy

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \varphi,$$

azaz

$$\operatorname{div}(\psi \operatorname{grad} \varphi) = \psi \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \varphi = \psi \Delta \varphi + \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi, \quad (3.27)$$

amit (3.26)-ba helyettesítve kapjuk, hogy

$$\int_V (\psi \Delta \varphi + \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi) dV = \oint_A \psi \operatorname{grad} \varphi \, d\mathbf{A}.$$

ψ -t és φ -t cseréljük fel.

$$\int_V (\varphi \Delta \psi) + (\operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \varphi) dV = \oint_A \varphi \operatorname{grad} \psi \, d\mathbf{A}$$

kivonva kapjuk a *Green-tételt*:

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \oint_A \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dA. \quad (3.28)$$

Abban a sajátos esetben, ha $\varphi = \psi$, a tétel alakja

$$\int_V \left[\varphi \Delta \varphi + (\operatorname{grad} \varphi)^2 \right] dV = \oint_A \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dA. \quad (3.29)$$

Tételezzük fel, hogy a vizsgált térrészperemen: vagy φ adott (Dirichlet-peremfeltétel), vagy $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ adott (Neumann-peremfeltétel).

Mindkét feltételrendszer fizikailag kézenfekvő.

A bizonyítás során feltételezzük, hogy a feltételeknek eleget tevő két különböző megoldása létezik az azonos töltéssűrűséghez tartozó $\Delta \varphi = -\rho/\varepsilon$ Poisson-egyenletnek. A két megoldás különbsége

$$\Phi = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (3.30)$$

a peremfeltételek nullák, és mivel a két megoldásra vonatkozó Poisson-egyenletben a töltéseloszlás azonos, a különbségi megoldásra $\Delta \Phi = 0$. A (3.29)-be Φ -t helyettesítve

$$\int_V \left[\Phi \Delta \Phi + (\operatorname{grad} \Phi)^2 \right] dV = \int_A \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA \quad (3.31)$$

ahonnan az előzőkben elmondottak alapján

$$\int_V (\text{grad } \Phi)^2 dV = 0, \quad (3.32)$$

ami csak $\text{grad } \Phi = 0$ esetén teljesül, tehát a vizsgált térfogatban Φ állandó. (Ismét a négyzetes kifejezés integrálja a bizonyítás kulcsa!)

Dirichlet-peremfeltétel esetén Φ a peremen zérus, tehát zérus kell legyen a térfogatban is. Így $\varphi_1 = \varphi_2$, a különbözőknek feltételezett megoldások azonosak.

Neumann-peremfeltétel esetén a megoldások additív állandó erejéig azonosak. A potenciálok additív állandója ugyanarra az elektromos tereeloszlásra vezet.

A (3.31) egyenlet jobb oldalát tekintve nyilvánvaló, hogy az egyértelműség vegyes peremfeltétel esetén is fennáll. Megadhatjuk tehát φ -t a perem egy részén és $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ -t a perem másik részén.

Nyilvánvaló, hogy a Poisson- és így a Laplace-egyenlet megoldásában is a határoló felületen nem adhatjuk meg egyszerre φ és $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ értékét. Az egyenlet megoldása bármelyik peremfeltétel megadása esetén egyértelmű.

A két megoldás azonban általában nem feleltethető meg egymásnak.

Megjegyzések:

1. Az előző megfontolások az ún. *belső peremérték-feladatok*. A határoló felületen véges térfogatot fognak körül, a vizsgált térfogat koordinátái nem tartanak végtelenhez.

A végtelent is tartalmazó térben számított potenciál, az ún. *külső peremérték-feladat*. A keresett függvény viselkedésére a „végtelenben” külön feltételeket kell előírunk. A gyakorlatban mindig véges töltésmennyiséget tételezünk fel az elektródokon. Ugyanakkor a végtelenben a potenciál legalább $1/r$ módon kell a nullához tartson.

2. A homogén térnél általánosabb, azaz itt nem vizsgált elrendezés, amikor a közeg térrészenként homogén, azaz a permittivitás térrészenként állandó. Ebben az esetben is bizonyítható, hogy a megoldás Dirichlet- vagy Neumann-peremfeltételek esetén egyértelmű. A bizonyítás azonban olyan matematikai apparátust és megfontolásokat igényel, amelyek messze túlmutatnak jelenlegi célkitűzéseinken.

Kapacitás. Az elektrosztatikus tér energiája

Tekintsünk egy magában álló elektródát! Ha az elektródát feszültség alá helyezzük, a felszínén töltés jelenik meg. (A folyamatot úgy kell elképzelnünk, hogy feszültségforrást kapcsolunk az elektród és a 0 potenciálú pont közé. Utóbbi a teljes térben elvben a végtelen, a gyakorlatban egy távoli – és lehetőleg nagy kiterjedésű – elektród.) A Maxwell-egyenletek lineárisak, ha a közeg is lineáris, azaz a permittivitása nem függ a térerősségtől. (A helytől függhet, a közegnek nem kell homogénnek lennie.) A linearitás következtében az elektródán megjelenő töltés és az elektród potenciálja arányosak egymással, kétszer akkora töltés kétszer akkora potenciált hoz létre. A töltés és az elektródapotenenciál hányadosát kapacitásnak nevezzük:

$$C = \frac{Q}{U}, \quad (3.33)$$

ahol U az elektród végtelenhez viszonyított potenciálja.

A kapacitás csak a geometria és a közegjellemzők függvénye, és mint ilyen, az elrendezés sajátos jellemzője. Mértékegysége a farad [F].

Példaként tekinthetünk egy homogén közegben magában álló r_0 sugarú gömböt. Keressünk olyan helyettesítő töltéselrendezést, amelynek a terében a gömb ekvipotenciális felület. Ez a töltéselrendezés a ponttöltés. A ponttöltés potenciálja a Coulomb-potenenciál

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r},$$

amelynek zérus értéke a végtelenben van.

Ha az r_0 sugarú gömb U potenciálon van, akkor

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_0},$$

ahonnan

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 r_0 \quad (3.34)$$

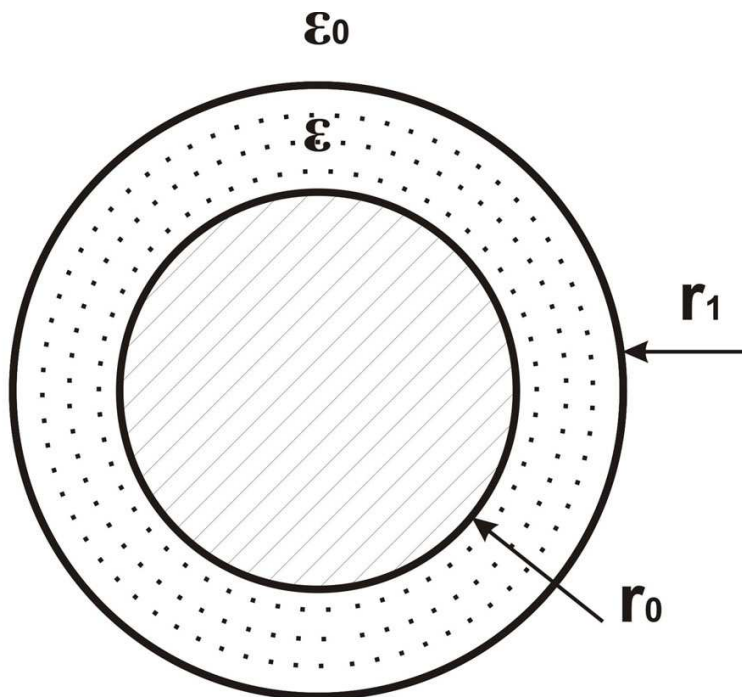
az r_0 sugarú, magában álló gömb kapacitása.

Amint látjuk, a gömb kapacitása arányos a sugarával. (Érdekesség, hogy az 1900-as évek első felében a kereskedelmi forgalomban lévő kondenzátorok kapacitásának értékét sokszor a velük egyenlő kapacitású gömb sugarával adták meg, azaz a kapacitások értékét *cm-ben* mérték; 1 cm 1,1 pF-nak felelt meg.)

A megfontolásból nyilvánvaló, hogy homogén ϵ permittivitású közegben ϵ_0 helyébe ϵ -t kell helyettesíteni. Ez azt jelenti, hogy a kapacitás ϵ_r -szeresére nő.

Egyszerű példán mutassuk be, hogy a kapacitás inhomogén dielektrikum esetén is csak az elrendezés függvénye.

Fedje az r_0 sugarú gömböt egyenletes vastagságú $\epsilon (\neq \epsilon_0)$ dielektrikum a 3.2. ábra szerinti módon.



3.2. ábra. Rétegzett dielektrikum

A Gauss-tétel értelmében mindenütt

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2},$$

ebből következik az

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad r_0 \leq r \leq r_1;$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad r \geq r_1.$$

A potenciál egyszerű számíttással

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1}, \quad r_0 \leq r \leq r_1,$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}, \quad r \geq r_1,$$

ahonnan

$$C = 4\pi \left[\epsilon \frac{r_0 r_1}{r_1 - r_0} + \epsilon_0 r_1 \right], \quad (3.35)$$

ami csak az elrendezés (a geometria és a közegjellemzők) függvénye.

Az elemi hálózatelméletből ismert, hogy a töltött kondenzátorban tárolt energia

$$W = \frac{1}{2} C U^2. \quad (3.36)$$

Kapcsolat van az elektromágneses térben tárolt energia és a (3.36) energiakifejezés között.

Az elektrosztatikai tér energiasűrűsége

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2, \quad (3.37)$$

így az egész térben tárolt energia

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \mathbf{E}^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \mathbf{D} dV. \quad (3.38)$$

Helyettesítsük \mathbf{E} helyébe a $-\text{grad } \varphi$ jelölést

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \mathbf{D} dV = -\frac{1}{2} \int_V (\text{grad } \varphi) \mathbf{D} dV = \frac{1}{2} \int_V \varphi \text{div} \mathbf{D} dV - \frac{1}{2} \int_V \text{div}(\varphi \mathbf{D}) dV, \quad (3.39)$$

ahol felhasználtuk a

$$\text{div}(\varphi \mathbf{D}) = \varphi \text{div} \mathbf{D} + \mathbf{D} \text{grad } \varphi$$

azonosságot, és a Gauss-tétellel együtt:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \varphi \text{div} \mathbf{D} dV - \frac{1}{2} \int_A \varphi \mathbf{D} \mathbf{dA}. \quad (3.40)$$

A felületi integrál a végtelenben eltűnik, hiszen φ a végtelenben $1/r$ -rel, \mathbf{D} pedig $1/r^2$ -tel arányos. Így az integrál határértéke $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 = 0$.

A felületi integrált a véges távolságban azokra a felületekre is ki kell terjesztenünk, amelyek φ vagy \mathbf{D} szakadásait körülfogják és így kizárják a vizsgált térfogattól.

Esetünkben \mathbf{D} -nek az elektróda felületén lévő töltésen van ugrása. A zárt elektróda felületén $D_n = \sigma$, és így (3.40) összefüggés felírható a következő alakban

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV + \frac{1}{2} \oint_A \varphi \sigma dA, \quad (3.41)$$

amelyben a felületi integrál a felületi normális választása miatt vált előjelet.

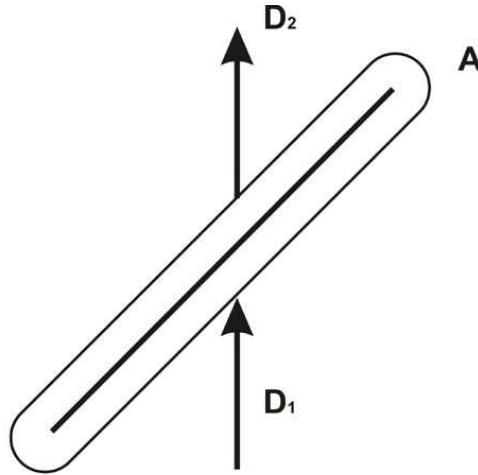
A (3.41) kifejezés a térben elosztott energia helyett az energiát a lokalizált töltések potenciális energiájaként fejezi ki. Ez tipikusan a távolhatási szemléletmód. Ma általánosan az energiát a (geometriai) térben elosztva képzeljük el. A mező mindenütt tárol energiát, ahol térerősség van, nemcsak ott, ahol töltések vannak.

Ha a töltés nyitott felületen helyezkedik el, az eltolási vektor normális komponensének ugrása a folytonossági feltételek következtében éppen σ .

Ekkor

$$-\frac{1}{2} \oint_A \varphi \mathbf{D} \mathbf{dA} = \frac{1}{2} \int_A \varphi (D_{1n} - D_{2n}) dA = \frac{1}{2} \int_A \varphi \sigma dA, \quad (3.41a)$$

mert a felületet körülvevő zárt felületet rázsugorítjuk a nyitott felületre a 3.3. ábrán látható módon. Ezért a (3.41) összefüggés jobb oldalán álló második integrált a nyitott felületre kell számítani.



3.3. ábra. Magyarázat a (3.41) egyenlethez

A magában álló elektródát körülvevő térben nincsen valódi töltés. Az energia számításánál tehát a (3.41) második integrálját kell kiértékelni

$$W_e = \frac{1}{2} \oint_A U \sigma \, dA = \frac{1}{2} U \oint_A \sigma \, dA = \frac{1}{2} UQ, \quad (3.42)$$

mert az elektróda ekvipotenciális. Q az össztöltés. Felhasználva a kapacitás (3.33) definícióját, az ismert eredményre jutunk

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}, \quad (3.43)$$

Hangsúlyozzuk, hogy bár (3.38) és (3.41) azonos eredményre vezet, a mögöttük álló szemlélet gyökeresen különböző.

Kondenzátorok

Az előző alfejezetben a kapacitást egyetlen elektródához rendeltük. Az elektródán véges töltés volt, ezt a töltést az eredetileg mező nélküli elrendezésből feszültségforrás szállította a 0 potenciálú helyről. Mivel nem alakult ki mező, nem lehettek töltések jelen, az elrendezés elektromosan semleges volt. Ezért az elektródán megjelenő Q töltést a 0 potenciálú helyen $-Q$ töltésnek kell kompenzálnia. Miután a 0 potenciálú helyet a végtelenben választottuk, ennek a kompenzáló töltésnek a végtelenben kell megjelennie egy „virtuális elektródán”.

A gyakorlatban rendkívül sokszor ezt a második elektródát a véges térrészben, méghozzá a másik elektródához közelre teszik. A kételektródás elrendezést kondenzátornak, az elektródákat gyakran fegyverzetnek nevezik. A kondenzátorban úgy hozunk létre feszültséget az elektródák között, hogy az eredetileg semleges elrendezésben az egyik lemeztől a másikra viszünk át töltést, így a fegyverzeteken valóban $+Q$ és $-Q$ töltés jelenik meg. A kondenzátor kapacitása a lemezek potenciálkülönbségével, azaz a lemezek közötti $U = \varphi_1 - \varphi_2$ feszültséggel kifejezve, ahol φ_1 és φ_2 a két elektróda potenciálja, formailag egybeesik a (3.33) kifejezéssel: $C = Q/U$. A kondenzátorban tárolt energia kiszámításához a (3.41a) formulát kell használni, ha az elektródák nyitott felületek.

Az integrálást mindkét elektródán el kell végezni. Miután az elektródák ekvipotenciálisak, az integrálokból a potenciált kiemelve az $\int_A \sigma \, dA$ tagok maradnak, amelyek $+Q$ és $-Q$ értéket adnak. Ezzel

$$W_e = \frac{1}{2} \sigma_1 Q + \frac{1}{2} \sigma_2 (-Q) = \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) Q = \frac{1}{2} U Q. \quad (3.44)$$

Az energia kifejezése formailag teljesen megegyezik a (3.42) összefüggéssel. Ne feledjük, Q az egyik fegyverzetten levő töltés abszolút értéke, U a fegyverzetek közötti feszültség. Utóbbinak az abszolút értékét kell vennünk, hiszen az energia nem negatív mennyiség.

Részkapacitások

Az elektrosztatika alapfeladatai között van az a feladat, amikor több elektródából álló rendszerben az elektródák töltése ismert. Ekkor a tér meghatározása visszavezethető az első alapfeladatra, ha meg tudjuk határozni az egyes vezetők potenciálját, majd a potenciálok ismeretében megoldjuk a peremérték-feladatot.

A Maxwell-egyenletek linearitása következtében nyilvánvaló, hogy az elektródok potenciálja és a töltések közötti összefüggés lineáris. Ezért n elektródából álló rendszer elektródapotenciáljaira a következő *lineáris* egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2 + \dots + p_{1n} Q_n, \\ \varphi_2 &= p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2 + \dots + p_{2n} Q_n, \\ &\vdots \\ \varphi_n &= p_{n1} Q_1 + p_{n2} Q_2 + \dots + p_{nn} Q_n. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Az itt szereplő p_{ik} együtthatók csak a geometriától és a (lineáris) közegek permittivitásától függenek. Fizikai jelentésüket könnyen meg tudjuk adni.

Legyen

$$Q_l = 0, \text{ ha } l \neq k, \text{ és } Q_l = 1, \text{ ha } l = k.$$

Ezt (3.45)-be helyettesítve $\varphi_i = p_{ik}$. Más szóval p_{ik} az i -edik elektróda potenciálja, ha a k -adik elektróda töltése egységnyi, míg a többi nulla.

A (3.45) egyenletrendszert a töltésekre megoldva

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{11} \varphi_1 + c_{12} \varphi_2 + \dots + c_{1n} \varphi_n, \\ Q_2 &= c_{21} \varphi_1 + c_{22} \varphi_2 + \dots + c_{2n} \varphi_n, \\ &\vdots \\ Q_n &= c_{n1} \varphi_1 + c_{n2} \varphi_2 + \dots + c_{nn} \varphi_n. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Itt a c_{ik} a kapacitás-együttható. c_{ii} az i -edik vezető *saját kapacitása*, c_{ik} ($i \neq k$) az i -edik és k -adik vezető *kölcsönös kapacitása*. A kapacitás-együtthatók jelentése könnyen magyarázható: c_{ik} az i -edik elektród töltése, ha a k -adik elektród potenciálja egységnyi és a többi elektród potenciálja zérus.

Az együtthatókra reciprocitási tétel érvényes. Bizonyítható ugyanis, hogy $p_{ik} = p_{ki}$ és $c_{ik} = c_{ki}$, azaz a (3.45) és (3.46) egyenletek mátrixa szimmetrikus.

Az energia (3.42) kifejezését használva több elektróda esetén a rendszer elektrosztatikus energiája

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_i \varphi_j. \quad (3.47)$$

Az energiakifejezés a potenciálok szorzatát tartalmazó ún. kvadratikus kifejezés.

Szokásos a (3.46) egyenlet helyett olyan összefüggést használni, amely a potenciálok helyett az elektródák potenciálkülönbségét tekinti ismeretlennek. Ezzel az elektródapárok közötti kapacitásokat definiáljuk.

Alakítsuk át (3.46) minden egyenletét a következőképpen

$$Q_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} \varphi_k = \sum_{k=1}^n c_{ik} (\varphi_k - \varphi_i + \varphi_i) = \sum_{k=1}^n -c_{ik} (\varphi_i - \varphi_k) + \sum_{k=1}^n c_{ik} \varphi_i. \quad (3.48)$$

$$\text{Bevezetve a} \quad C_{i0} = c_{i1} + c_{i2} + \dots + c_{in}, \quad (3.49a)$$

$$C_{ik} = -c_{ik} \quad (i \neq k) \quad (3.49b)$$

együtthatókat, (3.48) a következő alakba írható

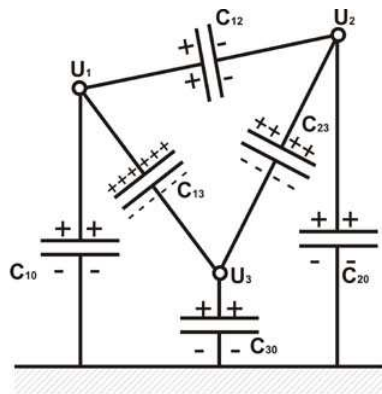
$$Q_i = C_{i0} \varphi_i + \sum_{k=1}^n C_{ik} (\varphi_i - \varphi_k), \quad (3.50)$$

vagy $\varphi_i = U_{i0}$, $\varphi_i - \varphi_k = U_{ik}$ jelöléssel

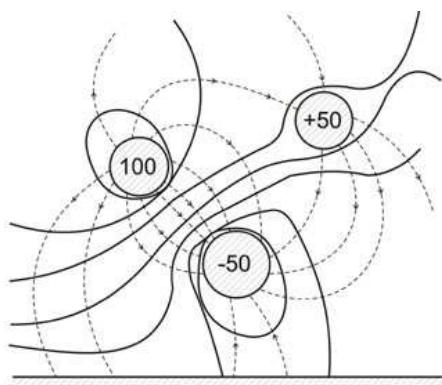
$$Q_i = C_{i1} U_{i1} + C_{i2} U_{i2} + \dots + C_{i0} U_{i0} + \dots + C_{in} U_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.51)$$

Ez az egyenletrendszer is szimmetrikus, azaz $C_{ik} = C_{ki}$.

Az egyenlet úgy értelmezhető, hogy az elektródok között C_{ik} részkapacitású kondenzátor helyezkedik el, míg az elektróda és 0 potenciálú föld között C_{i0} földkapacitású kondenzátor. Három elektródára és a földre az elrendezés és kondenzátorból álló helyettesítő képe a 3.4. és 3.5. ábrán látható.



3.4. ábra. A részkapacitások helyettesítő kapcsolása három vezeték esetén



3.5. ábra. Három különböző feszültségen levő, a föld közelében elhelyezett vezető ekvipotenciális felület- és erővonalrendszer

A részkapacitások fegyverzetein fellépő töltések összege megegyezik az elektróda töltéseivel. A részkapacitások tehát a többielektrodás elrendezés szemléletes áramköri modelljét adják meg.

Stacionárius áramlási tér

Figyelem! A következőkben γ a felületi töltést, σ a vezetőképességet jelöli.

A 3. fejezetben felírtuk az *elektrosztatikus tér* és a *stacionárius áramlási tér* egyenletét:

Elektrosztatika		Stacionárius áramlási tér	
$\text{rot}\mathbf{E} = 0$	(3.52)	$\text{rot}\mathbf{E} = 0$	(3.55)
$\text{div}\mathbf{D} = \rho$	(3.53)	$\text{div}\mathbf{J} = 0$	(3.56)
$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$	(3.54)	$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b)$	(3.57)

Az $\mathbf{E}_b = 0$ feltétel mellett az áramlási tér egyenletei teljes analógiában vannak a töltésmentes térrészben kialakuló elektrosztatikus tér egyenleteivel. Az analóg mennyiségek

Elektrosztatika	Stacionárius áramlási tér
E	E
D	J
ε	σ

Az elektromos tér (3.55) értelmében rendelkezik skalárpotenciállal

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (3.58)$$

és a skalárpotenciálra a

$$\Delta\varphi = 0 \quad (3.59)$$

Laplace-egyenlet érvényes.

Miután a vizsgált térben az áramnak a (3.56) összefüggés értelmében nincsen forrása, az áram forrásai a fémelektrodok lehetnek. Ez az elektrosztatika felületi töltésével analóg. Az áram felületi forrassűrűsége σE_n teljes analógiában van az $\varepsilon E_n = \gamma$ elektrosztatikai azonossággal. Egy elektróda összaráma:

$$I = \int_A \mathbf{J} \, dA = \int_A \sigma \mathbf{E} \, dA, \quad (3.60)$$

ahol a zárt felületet az elektródára kell zsugorítanunk. Összevetve (3.60)-at (1.11)-gyel, kapjuk, hogy az áram és az elektrosztatikai töltés analóg mennyiségek. Az elektróda vezetése

$$G = \frac{I}{U}. \quad (3.61)$$

Ismét teljes az analógia a kapacitással. Miután a (3.59) Laplace-egyenlet megoldása előírt peremfeltételekkel egyértelmű, (3.61)-ből és a kapacitás (3.33) definíciójából homogén térrészben azonos elektróda konfigurációra megadható összefüggés a

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma}. \quad (3.62)$$

A kondenzátor kapacitásához hasonlóan definiálható a vezetés két fémelektroda között, ha a két elektróda árama $+I$ és $-I$. Értelemszerűen több elektróda esetén a részkapacitásokkal analóg részvezetéseket definiálhatunk.

Írjuk fel az analóg mennyiségek teljes listáját:

Elektrosztatika	Stacionárius áram
E	E
D	J
ε	σ
Q	I
C	G

Fontos tudni, hogy áramlási térben – az elektrosztatikával ellentétben – rendkívül gyakori a $\partial\varphi/\partial n=0$ peremfeltétel (homogén Neumann-peremfeltétel). Ennek oka, hogy vezető közegből az áram szigetelőbe átlépni nem tud, ezért a vezető-szigetelő perem felületén az áramnak nincs normális komponense.

4. STACIONÁRIUS ÁRAM MÁGNESES TERE

A Maxwell-egyenleteken alapuló felosztás során stacionárius, időben nem változó áram esetén a következő egyenletek írják le a jelenségeket

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (4.1)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad (4.3)$$

ahol $\mu = \mu_r\mu_0$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$.

Homogén közegben a három egyenlet kettőre redukálható

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu\mathbf{J}, \quad (4.4)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

Ismét a klasszikus feladathoz jutottunk: meg kell határozni egy vektorteret a rotációjának és divergenciájának ismeretében. Az egyenletrendszer megoldása egyszerű azokban a térrészekben, amelyekben az áramsűrűség nulla, mert itt $\operatorname{rot}\mathbf{B} = 0$ és az indukcióvektor előállítható egy (mágneses) skalárpotenciál gradienseként: $\mathbf{B} = -\operatorname{grad} \gamma_m$. Ekkor elvben az elektrosztatika számítási módszerei alkalmazhatók. A peremfeltételek azonban eltérnek, továbbá a közegek mágneses tulajdonságai is más jellegűek, mint a dielektrumok elektromos tulajdonságai. Ezért – és mivel áram jelenlétében *nem* a skalárpotenciál a megoldás segédmenyisége – az általános egyenletrendszer megoldását keressük.

Mivel \mathbf{B} (4.2) értelmében mindig divergenciamentes, kell léteznie olyan \mathbf{A} vektortérnek, amelynek \mathbf{B} éppen a rotációja.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (4.5)$$

Ezt az \mathbf{A} vektorteret *vektorpotenciálnak* nevezzük.

Egyértelmű-e a vektorpotenciál? A gyanú azért ébredhet, mert az egyszerűbb skalárpotenciál nem egyértelmű, csak egy additív állandó erejéig meghatározott. A helyzet itt még bonyolultabb. \mathbf{B} értéke nem változik, ha \mathbf{A} -hoz olyan vektorfüggvényt adunk, amelynek rotációja 0. Ilyen vektorfüggvényt könnyen tudunk előállítani: bármely kellőképpen deriválható skalárfüggvény gradiense rotációmentes. Ha tehát \mathbf{A} megfelelő vektorpotenciál, akkor az lesz az

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \operatorname{grad}\psi. \quad (4.6)$$

A potenciál azért megváltoztatható, mert (4.5) csupán \mathbf{A} rotációját rögzíti. $\operatorname{div}\mathbf{A}$ megválasztásában nagy szabadságunk van. A vektorpotenciál divergenciájának megválasztását a fizikában *mértékválasztásnak* nevezik. A (4.6) transzformáció neve ennek alapján *mértéktranszformáció*. A mértékválasztás, illetve a mértéktranszformáció lehetővé teszik,

hogy a számításokat \mathbf{A} legkényelmesebb alakjával végezzük el. Nézzük, milyen „mérték” tűnik kényelmesnek (optimálisnak) esetünkben.

Helyettesítsük (4.5)-t (4.4) egyenletbe

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} \quad (4.7)$$

és felhasználva a $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$ összefüggést, az egyenlet

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} \quad (4.8)$$

alakba írható.

Éljünk a mértékválasztás lehetőségével: legyen $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. (Ez a választás a Coulomb-mérték.) Ezzel az alábbi egyenlet

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (4.9)$$

vektoriális *Poisson-egyenlet*. Az egyenlet derékszögű (*Descartes-*)*koordinátákban* mindhárom komponensre vonatkozó skalár egyenletet jelent, azaz

$$\begin{aligned} \Delta A_x &= -\mu J_x, \\ \Delta A_y &= -\mu J_y, \\ \Delta A_z &= -\mu J_z. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A megoldás a skalár egyenletre az elektrosztatikából ismert (3.11) egyenlet. Ezt a (4.10) komponens egyenletekre alkalmazva és egyetlen vektorba összefogva, (4.9) megoldása az egész térben

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dV. \quad (4.11)$$

Az így meghatározott vektorpotenciálra, a $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ következtében

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (4.12)$$

Felmerül a kérdés, hogy a (4.6) mértéktranszformáció milyen feltételeknek tegyen eleget, hogy $\operatorname{div} \mathbf{A}' = \operatorname{div} \mathbf{A}$ legyen, azaz a transzformáció ne változtassa meg a vektorpotenciál divergenciáját, annak mértékét. Ezt a helyzetet mértékinvarianciának nevezzük. (4.6)-ból \mathbf{A} -t (4.12)-be helyettesítve

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' = 0 = \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = -\Delta \psi, \quad (4.13)$$

azaz a mérték invariáns, ha

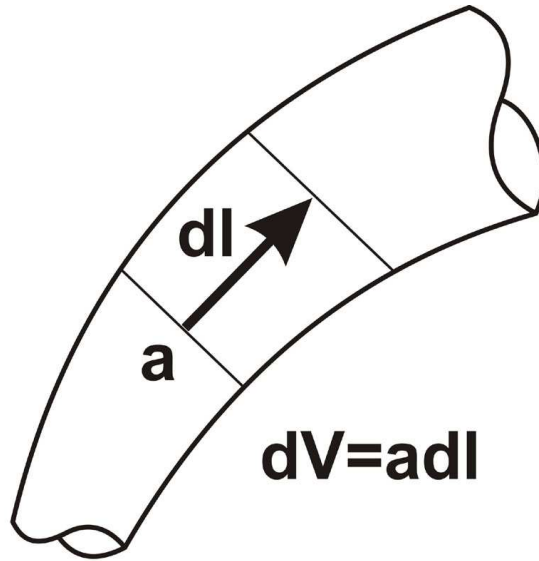
$$\Delta \psi = 0 \quad (4.14),$$

a ψ skalár kielégíti a Laplace-egyenletet. (Felhasználtuk, hogy \mathbf{A} önmagában divergenciamentes.) Ha a végtelenben nincs forrás, (4.14) megoldása csupán a ψ konstans függvény.

Vonalszerű vezetékben folyó áram tere

A mérnöki gyakorlatban az esetek döntő többségében a mágneses teret keltő áram vékony vezetékben folyik. (A térben eloszló áramok által keltett tereknek leggyakrabban az asztro- és geofizikában van szerepük. A villamosmérnöki feladatok közül a tranzisztorok árama térbeli áram.) Ezért indokolt a vékony vezetékben folyó és ezért igen jól lokalizálható áramok által keltett mágneses tér számítása.

A vezető dl hosszúságú szakaszának a térfogata $a dl$ formába írható, ahol a a keresztmetszet (4.1. ábra).



4.1. ábra. Lineáris vezető térfogateleme

Az áramsűrűség iránya a vezeték tengelye irányába mutat, ezért dl -t vektorként kezeljük. (4.11)-be helyettesítve

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dV = \frac{\mu}{4\pi} \oint_L \frac{Ja}{r} d\mathbf{l} = \frac{\mu}{4\pi} I \oint_L \frac{d\mathbf{l}}{r}, \quad (4.15)$$

ahol felhasználtuk, hogy a divergenciamentes áram a vezeték mentén állandó, továbbá a divergenciamentesség feltételezi, hogy a vezeték zárt.

A mágneses tér ezek után a vektorpotenciál rotációjából számítható.

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \text{rot}_p \mathbf{A} = \text{rot}_p \frac{1}{4\pi} I \oint \frac{d\mathbf{l}_Q}{r_{PQ}} = \frac{I}{4\pi} \oint \text{rot}_p \frac{d\mathbf{l}_Q}{r_{PQ}} \quad (4.16)$$

A rotációképzés annak a pontnak a koordinátái szerint történik, ahol a teret keressük, az integrálás pedig az ívelem koordinátái szerinti.

Felhasználva a

$$\text{rot}(uv) = \text{grad}u \times \mathbf{v} + u \text{rot} \mathbf{v} \quad (4.17)$$

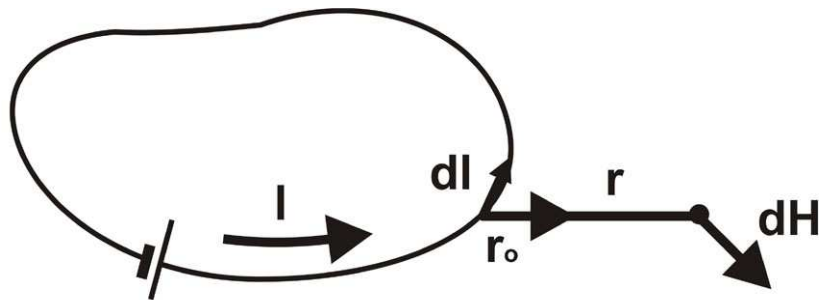
azonosságot

$$\operatorname{rot}_P \frac{d\mathbf{l}_Q}{r_{PQ}} = \operatorname{grad}_P \frac{1}{r_{PQ}} \times d\mathbf{l}_Q + \frac{1}{r_{PQ}} \operatorname{rot}_P d\mathbf{l}_Q, \quad (4.18)$$

ahol a második tag zérus, mert $d\mathbf{l}$ nem függ P koordinátáitól. Ezért

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_L \operatorname{rot}_P \frac{d\mathbf{l}_Q}{r_{PQ}} = \frac{I}{4\pi} \oint_L \operatorname{grad}_P \frac{1}{r_{PQ}} \times d\mathbf{l}_Q = \frac{I}{4\pi} \oint_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{r^2}, \quad (4.19)$$

ahol \mathbf{r}_0 a Q pontból a P pontba mutató egységvektor. (4.19) a *Biot–Savart-törvény* 4.2. ábra).



4.2. ábra. A Biot–Savart-törvény értelmezéséhez

A törvény levezetéséből két figyelmeztetést kapunk:

1. A törvény csak *homogén* közegben adja meg helyesen a mágneses térerősséget, jóllehet μ a (4.19) kifejezésben nem szerepel.
2. A törvény csak *zárt* áramkör egészének a hatását írja le. Ennek ellenére csábító úgy értelmezni, hogy a vezeték dl hosszúságú darabkáján folyó áram

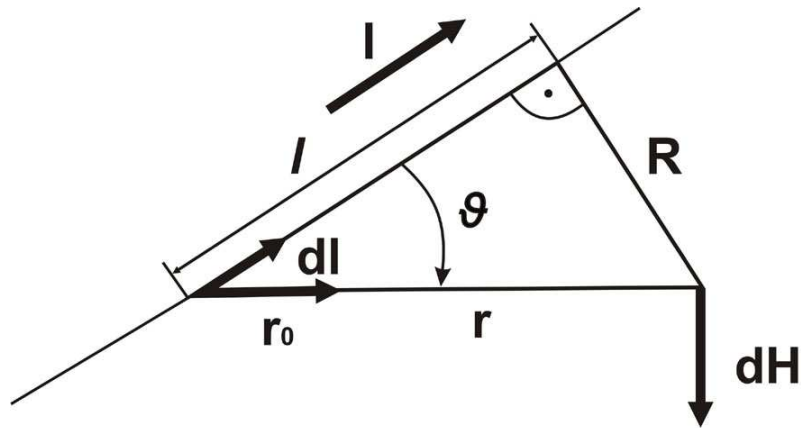
$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{r^2} \quad (4.20)$$

mágneses teret hoz létre és a teljes tér ezen hozzájárulások összege.

Ennek fizikai tarthatatlanságát egyebek között az is mutatja, hogy az $I d\mathbf{l}$ áram nem tesz eleget a stacionárius folytonossági egyenletnek, hiszen kezdete és vége van.

A Biot–Savart-törvényt felhasználva határozzuk meg egy végtelen hosszú egyenes vezetőben folyó áram által keltett mágneses teret. (Zárt ez a vezető?)

A 4.3. ábrán látható, hogy $d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0$ az általuk kifeszített síkra mindig merőleges, a mágneses erővonalak tehát koncentrikus körök, amelyek középpontja a vezetéken van.



4.3. ábra. A Biot–Savart-törvény számításához

(4.19)-be be kell helyettesítenünk az $r = \sqrt{R^2 + l^2}$, valamint a $|\mathbf{dl} \times \mathbf{r}_0| = dl \sin \vartheta = dl \frac{R}{\sqrt{R^2 + l^2}}$ kifejezéseket. Ezzel

$$|\mathbf{H}| = \frac{I}{4\pi} R \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl}{(R^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{I}{2\pi R}. \quad (4.21)$$

Ez volt a Biot és Savart által kísérletileg igazolt összefüggés: az egyenes vezető mágneses terének erőssége fordítottan arányos a vezetéktől mért távolsággal (és persze a linearitás miatt egyenesen arányos az árammal!)

A vektorpotenciál ismeretében könnyen meghatározható bármely zárt görbe által kifizített felületen az indukció fluxusa. A fluxus (1.10) definíciója alapján

$$\Phi = \int_a \mathbf{B} da = \int_a \text{rot} \mathbf{A} da. \quad (4.22)$$

A Stokes-tétel értelmében

$$\int_a \text{rot} \mathbf{A} da = \oint_L \mathbf{A} dl \quad (4.23)$$

és ezt (4.22)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$\Phi = \oint_L \mathbf{A} dl. \quad (4.24)$$

A vektorpotenciál ismeretében a fluxus a felületi integrál helyett az egyszerűbb vonalintegrállal számítható.

Figyelem!

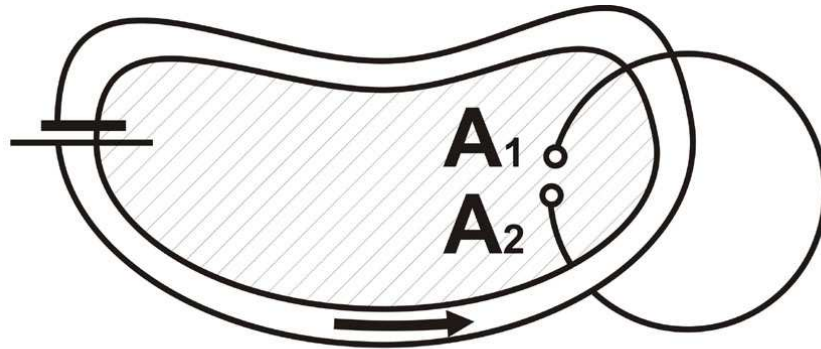
Meg kell jegyeznünk, hogy a vektorpotenciál kiszámítása alig jelent kevesebb munkát, mint a tér közvetlen számítása (ha ez lehetséges). Ugyanakkor a vektorpotenciál ismeretében a tér meghatározásához még egy rotáció kiszámítása tartozik minden egyes pontban.

Mágneses skalárpotenciál

Már a bevezetőben említettük, ahol áram nem folyik, tehát a stacionárius térerősség rotációmentes, a térerősség megadható egy (mágneses) skalárpotenciál gradienseként

$$\mathbf{H} = -\text{grad}\varphi_m. \quad (4.25)$$

Ennek a skalárpotenciálnak vékony vezetékben folyó áram esetén különleges tulajdonsága van (4.4. ábra).



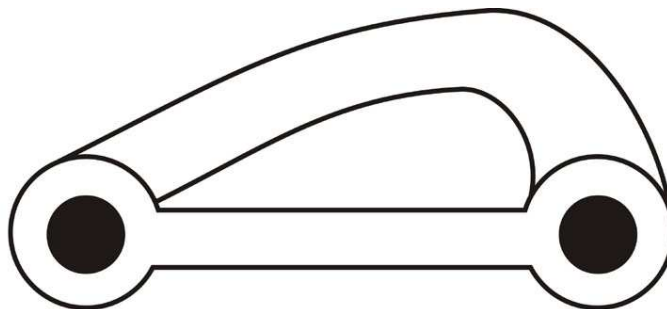
4.4. ábra. Áramkör terének levezetése skalárpotenciálból

Feszítsünk ki egy felületet, amelynek a pereme a vékony vezető. A gerjesztési törvény értelmében az ábrán látható úton a felület két oldalán fekvő pontok között (zárt úton) integrálva véges értéket kapunk.

$$\int_{A_1}^{A_2} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_a \mathbf{J} da = I. \quad (4.26)$$

A felületen áthaladva a potenciál ugrik, miközben a térerősség folytonos.

Ha a vezeték kivételével tekintjük az egész teret, ez a tartomány kétszeresen összefüggő. A kétszeresen összefüggő tartományban a vezetéket körülölelő zárt görbe semmilyen folytonos deformációval nem vihető át egy, a vezetéket körül nem ölelő zárt görbébe. Kétszeresen összefüggő tartománynál, és hasonlóan többszörösen összefüggő tartománynál a potenciál többértékű.



4.5. ábra. Áramhurok kirekesztése a téből zárt felülettel

Tegyük a tartományunkat egyszeresen összefüggővé oly módon, hogy a 4.5. ábrán bemutatott felületet (és a vezetékurkot) kizárjuk a térből. Ekkor a hurokra feszített felület bármely pontjában a felület két oldalán a potenciál különböző, más szóval a potenciál ugrik a felületen áthaladva. Az ugrás értéke minden pontban ugyanaz

$$\varphi_m^{(1)} - \varphi_m^{(2)} = I. \quad (4.27)$$

Ha a vezetéket többször körüljárjuk, minden egyes körüljárásnál újra I járulékot kapunk a (4.26) értelmében, az integrálás útjától függetlenül a (4.25) kifejezésben szereplő potenciálfüggvény tehát I többszörösével kiegészíthető

$$\varphi_m(r) = \varphi_{m0}(r) + nl. \quad (4.28)$$

Ez a potenciál a *ciklikus potenciál*.

A φ_m potenciálról tehát két dolgot állíthatunk: mindenütt kielégíti a Laplace-egyenletet a keretre illesztett felület kivételével, ott viszont minden pontban azonos értékű ugrása van. Ilyen tulajdonsággal a kettős réteg rendelkezik.

A 2. fejezet szerint a kettős réteg potenciálja

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \iint \left[\varphi_m^{(1)} - \varphi_m^{(2)} \right] \frac{\partial}{\partial n} \cdot \frac{1}{r} da = \frac{1}{4\pi} \int I \frac{\partial}{\partial n} \cdot \frac{1}{r} da. \quad (4.29)$$

Következtetésként levonható, hogy a köráram helyettesíthető egy mágneses kettős réteggel, amelynek pereme az áramvezető és nyomatéksűrűsége egyenletes.

$$|\boldsymbol{\mu}| = I \quad (4.30)$$

A mágneses tér a (4.25) alapján

$$\mathbf{H} = -\text{grad} \frac{I}{4\pi} \int_a \frac{\partial}{\partial n} \cdot \frac{1}{r} da. \quad (4.31)$$

Eredményünk érdekes következménye, hogy nagy távolságból egy síkban fekvő kicsiny köráram, amely a felületet ölel körül, egyenértékű egy

$$\mathbf{m} = |\boldsymbol{\mu}| \mathbf{a} = I \mathbf{a} \quad (4.32)$$

nyomatékú mágneses dipólussal.

A 2. fejezet szerint a dipólusra homogén erőterben (2.12) alakú forgatónyomaték hat. Ezzel tökéletes analógiában kicsiny köráramra homogén mágneses erőterben

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (4.33)$$

nyomaték hat.

A kis köráram és a mágneses dipólus azonos viselkedése adta Ampère számára az ötletet a mágneses anyagokban fellépő tér magyarázatára. Ampère elképzelése szerint az ilyen anyagokban elemi kicsiny köráramok léteznek. Az anyag mágnesezettségi állapota ezen elemi köráramok rendezettségétől függ.

A kép rendkívül szemléletes, jól magyarázza a mágneses anyag, illetve a létrejövő tér természetét. Ma már tudjuk, hogy ez a magyarázat nem igaz. A mai fizika a mágneses tér forrásának a kompenzálatlan spinű elektronok együttesét tekinti.

Igazolható, hogy tetszés szerinti stacionárius árameloszlás mágneses terének első közelítése egy mágneses dipólus. Más szóval kellően nagy távolságból minden árameloszlás tere dipólus terével helyettesíthető. Ez az állítás analóg az elektrosztatikus terekre tett állítással, egy különbséggel. Mivel valódi elektromos töltés létezik, a töltéseloszlás első közelítése egy ponttöltés, csak további közelítésnél jelenik meg a dipólus is.

Stacionárius áramok mágneses tere közeg jelenlétében

Mágneses közeg jelenlétében az alapegyenletek

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (4.34)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad (4.35)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (4.36)$$

A mágneses teret két részre bontjuk. Az egyik tér az áram által a közeg jelenléte nélkül kialakuló \mathbf{H}_0 tér, a másik az áram nélkül a közeg \mathbf{M} mágnesezettség által létrehozott \mathbf{H}_1 .

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_0 = \mathbf{J}, \quad (4.37a)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}_0 = 0, \quad (4.37b)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_1 = 0, \quad (4.38a)$$

míg

$$\operatorname{div}\mathbf{H}_1 = \operatorname{div}\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \operatorname{div}\mathbf{M}$$

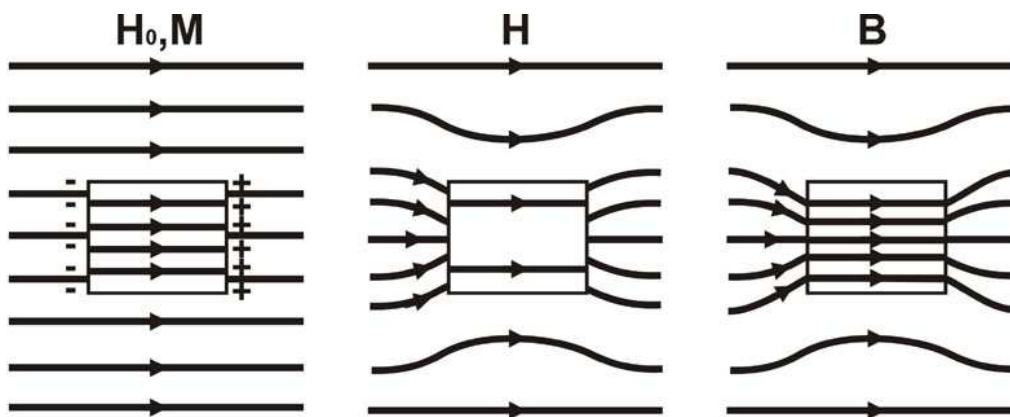
következtében

$$\operatorname{div}\mathbf{H}_1 = -\operatorname{div}\mathbf{M}. \quad (4.38b)$$

A teljes tér a két tér szuperpozíciója

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1. \quad (4.39)$$

A felosztás közvetlen számításra nem alkalmas, mivel \mathbf{M} az eredő \mathbf{H} függvénye. Szemléletessé teszi azonban a mágneses tér kialakulását a gerjesztett térbe helyezett mágneses anyag esetén (4.6. ábra).



4.6. ábra. Mágneses közeg hatása a mágneses térre

Magnetosztatika. Permanens mágnesek

Mágneses teret permanens mágnesek esetén a mágneses közeg állandó polarizációja hoz létre. Az alapegyenletek

$$\text{rot}\mathbf{H} = 0, \quad (4.40)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0, \quad (4.41)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (4.42)$$

(4.40) alapján \mathbf{H} előállítható skalárpotenciál gradienseként

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_m. \quad (4.43)$$

(4.41)-(4.42)-ből

$$\text{div}\mathbf{H} = -\text{div}\mathbf{M} \quad (4.44)$$

és ez (4.43)-mal együtt a

$$\Delta\varphi_m = \text{div}\mathbf{M} \quad (4.45)$$

Poisson-egyenlethez vezet. Ennek megoldása az ismert módon

$$\varphi_m = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{div}\mathbf{M}}{r} dV - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M}_{1n} + \mathbf{M}_{2n}}{r} dA. \quad (4.46)$$

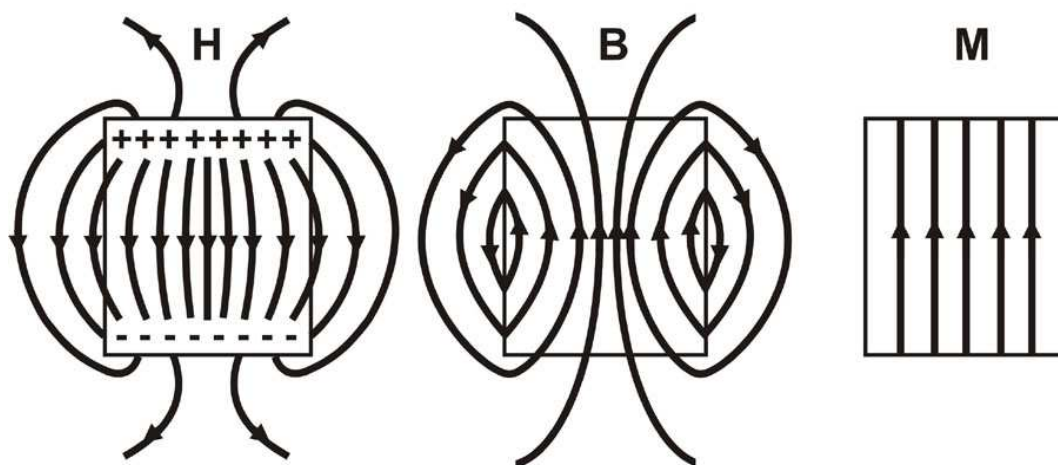
Az összefüggés némi matematikával

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{M} \text{grad } \frac{1}{r} dV \quad (4.47)$$

dipóluspotenciálként állítható elő. Ennek jelentése: a dV térfogat \mathbf{M} dV dipólusmomentummal rendelkezik. A mágnesezettség vektora tehát a térfogategység mágneses dipólusmomentuma, dipólusmomentum-sűrűség.

A kifejezések közvetlenül csak akkor értékelhetők ki, ha ismerjük \mathbf{M} helyfüggését.

\mathbf{M} a közegben homogén. Divergenciája van a közeg peremén, ezért ez formálisan mágneses töltések megjelenését okozza. Ez a töltés az elemi mágneses dipólus kompenzálatlan töltése. Ennek következtében az eredő \mathbf{H} térnek divergenciája van a közeg peremén. \mathbf{B} ezzel szemben divergenciamentes lesz (4.7. ábra).



4.7. ábra. Permanens mágnes tere

A mágneses tér energiája, ön- és kölcsönös induktivitás

Az elektromos tér energiájának kifejezését két alakban kaptuk meg: a térmennyiségekkel kifejezve, illetve a töltés és potenciál segítségével. A mágneses térben analóg kifejezéseket kaphatunk. Induljunk ki a

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \mathbf{B} dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{A} dV \quad (4.48)$$

összefüggésből.

Használjuk fel a vektoranalízis azonosságát

$$\operatorname{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (4.49)$$

és innen behelyettesítve a (4.48)-ba, kapjuk

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H} dV - \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{A}) dV. \quad (4.50)$$

A jobb oldal második tagja az egész térben integrálva eltűnik. Alkalmazzuk a Gauss-tételt

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{A}) dV = \oint_a (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (4.51)$$

A felületi integrált a végtelenbe kiterjesztve \mathbf{H} , mint a dipólus térerőssége, a végtelenben $1/r^3$ értékkel tűnik el. A vektorpotenciál tehát $1/r^2$. Ezért $\mathbf{H} \times \mathbf{A}$ $1/r^5$ -nel tűnik el, míg a integrálási felület csak r^2 -szeresére növekszik. Így a végtelenben a felületi integrál eltűnik, tehát a $\operatorname{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{A})$ integrálja az egész térre zérus.

A megmaradt kifejezést némileg átalakítva

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H} dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \mathbf{J} dV. \quad (4.52)$$

A kifejezés teljesen analóg a $W_e = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\rho} dV$ kifejezéssel, csak kevésbé szemléletes. Tartalma is hasonló: az egész térben integrálandó térmennyiségek helyett az integrálást csak azokra a térfogatokra kell kiterjeszteni, ahol áram folyik. Ez azonban csak matematikai mutatvány és nem érinti azt a tényt, hogy a mai felfogás szerint az energia az egész térben elosztott, ahol mágneses mező létezik.

Kölcsönös indukció, önindukció

A kapacitás együtthatók (és a részkapacitások) felhasználásához hasonló módon a mágneses tér energiája is kifejezhető ön- és kölcsönös indukció együtthatóival.

Tételezzük fel, hogy n darab önálló körvezetők van, amelyben áramok folynak. A vezetők nem feltétlenül vékony vezetékek. Tételezzük fel, hogy az elrendezés vákuumban van.

Állítjuk, hogy a (4.52) képlettel adott energia kifejezhető a

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n L_{ik} I_i I_k \quad (4.53)$$

alakban, ahol I_i az i -edik vezető árama és L_{ik} ($i \neq k$) a kölcsönös indukció együtthatója. L_{ii} az úgynevezett önindukció-együttható. Mértékegységük a henry [H].

Felhasználva az energia (4.52) kifejezését és a vektorpotenciál (4.11) alakját

$$W_m = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_V \int_{V_k} \frac{\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{J}_k}{r_{ik}} dV_k dV_i, \quad (4.54)$$

ahol $r_{ik} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$, a két aktuális térfogatelem távolsága. Figyeljük meg a kifejezés szimmetriáját: invariáns i és k cseréjére!

Miután az áramok különálló zárt vezetőkben folynak, a (4.54) integrál az egyes vezetőhurkok térfogatára vett integrálok összegére esik szét.

$$W_m = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{J}_k}{r_{ik}} dV_i dV_k \quad (4.55)$$

Az i -edik vezetékben folyó áramot I_i -vel jelölve (4.55) és a (4.53) összehasonlításából kapjuk, hogy

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\mathbf{J}_i \mathbf{J}_k}{r_{ik}} dV_i dV_k, \quad (4.56)$$

ahol az integrálást az i -edik és k -edik vezető térfogatára (önindukciós együtthatók esetén ugyanarra a térfogatra) kell integrálni.

Vonalszerű vezeték esetén elvégezve

$$\mathbf{J}_i dV_i = J_i a \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{l}_i = I_i d\mathbf{l}_i \quad (4.57)$$

átalakítással a kölcsönös indukció együtthatói a következő alakba írható

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_i} \oint_{l_k} \frac{d\mathbf{l}_k d\mathbf{l}_i}{r_{ik}} = L_{ki} \quad (i \neq k). \quad (4.58)$$

Ez a kölcsönös indukció együtthatói kiszámítására használható *Neumann-képlet*. (Önindukció-együtthatóra az integrál szinguláris válik. Ennek okát a következőkben megmagyarázzuk.)

Vonalszerű vezetőkre a Neumann-képlet más módon is interpretálható. Tekintsük az n vonalszerű vezetőhurokból álló elrendezést. Határozzuk meg a k -edik hurok fluxusát a (4.59) alapján

$$\Phi_k = \oint_{l_k} \mathbf{A} d\mathbf{l}_k. \quad (4.59)$$

\mathbf{A} értékét (4.15) alapján a következő alakba írható:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_0}{4\pi} I_i \oint_{l_i} \frac{d\mathbf{l}_i}{r} \quad (4.60)$$

és ezt (4.59)-be helyettesítve és a (4.60) formulát felhasználva kapjuk, hogy

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^n L_{ki} I_i. \quad (4.61)$$

A kölcsönös indukció-együttható tehát azt mutatja meg, mekkora fluxust hoz létre az i -edik vezető árama a k -edik hurokban. Ez a definíció vonalszerű vezetőhurok önindukciójára nem értelmezhető, mert a térerősség a vezetónél végtelenhez tart (amint ez például a Biot-Savart-törvényből következik) és így a fluxus is szinguláris. Ezt igazolja a vektorpotenciál (4.60) kifejezése is. Ezért az önindukció-együttható számítására mindig az energiakifejezésen alapuló megfontolásokat, például a (4.56) képletet kell használnunk.

Az eddigiekben végig vákuumot tétéleztünk fel a térben. Az eredmények para- és dimágneses közegek jelenléte esetén is extrém jó közelítések. Ha azonban a vezetők közelében ferromágneses közegek vannak, vagy maguk a vezetők ferromágnesesek, a (4.61) kifejezés igaz marad, de a (4.60) nem. Ekkor vissza kell térnünk az energia általános

kifejezésére. Meg kell határozni a teret, majd az energiát és utána a (4.53) alapján az indukció-együtthatókat. Az eljárás is csak lineáris közegek esetén alkalmazható.

Az induktivitás számítása a tér energiájából azt eredményezi, hogy a tér két részre esik szét. A vezetéken kívüli tér energiája a *külső*, a vezetéken belüli téré a *belső* induktivitást definiálja.

Indukció-együtthető az elnevezés, mert megmutatja, hogy az áram változása az egyik vezetőben mekkora feszültséggel *indukál* a másikban Faraday indukciótörvénye alapján. A definíció nem az indukált feszültségen, hanem a mágneses tér fluxusán alapszik.

5. SZTATIKUS, STACIONÁRIUS FELADATOK MEGOLDÁSI MÓDSZEREI

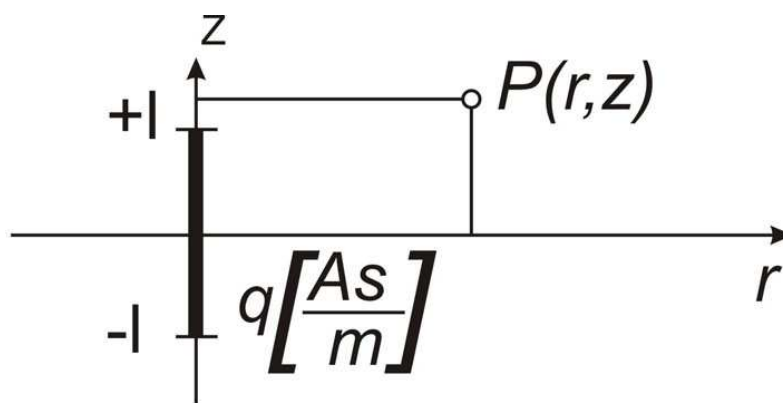
Analitikus megoldások

Ismert töltéeloszlás tere homogén közegben

Ez a feladat lényegében a Coulomb-potenciál szuperpozícióját kívánja meg. A feladatot a 3. fejezetben tárgyaltuk és a megoldást a (3.11) jelenti. A nehézséget az okozza, hogy a valódi feladatoknál általában nem ismerjük a töltés eloszlását.

A számítások akkor hasznosak, amikor a vizsgált töltéeloszlást helyettesítő töltéeloszlásként szerepeltetjük, és a tere (potenciáeloszlása) segítségével valódi feladatok oldhatók meg. Erre rövidesen mutatunk példákat.

Szemléltetésként számítsuk ki véges hosszúságú, egyenletes töltéssűrűségű vonaltöltés potenciálterét (5.1. ábra).



5.1. ábra. Véges hosszúságú vonaltöltés

A potenciál a P pontban ($r > 0$)

$$\varphi(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^{+l} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-z)^2 + r^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z+l + \sqrt{r^2 + (z+l)^2}}{z-l + \sqrt{r^2 + (z-l)^2}}. \quad (5.1)$$

Ha a P pont a tengelyre illeszkedik ($r = 0$), a töltésen az integrál nem konvergál.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{-l}^{z-\delta} \frac{d\xi}{z-\xi} + \int_{z+\delta}^{+l} \frac{d\xi}{z-\xi} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(l^2 - z^2) - 2\ln\delta \right] \quad (5.2)$$

A töltésen kívül azonban a tengelyen

$$\varphi(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{|z|+1}{|z|-1}. \quad (5.3)$$

A térerősség z komponense az egész tengelyen létezik. A töltésen kívül ($|z| > l$)

$$E_z(P) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{l}{z^2 - l^2} \text{sign}(z). \quad (5.4)$$

Hosszadalmas számítással belátható, hogy az ekvipotenciális felületek metszetei az $r - z$ síkban konfokális ellipszoidok, amelyek fókuszpontjai a vonaltöltés végpontjai. Egyenletük

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1, \quad (5.5)$$

ahol

$$l^2 = a^2 - b^2. \quad (5.6)$$

Tekintve, hogy az elrendezés hengersizmetrikus, az ekvipotenciális felület az ellipszis z tengely körüli forgatásával kapható *nyújtott forgási ellipszoid*. Az ellipszoid potenciálja például (5.3)-ból

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{a+1}{a-1}. \quad (5.7)$$

Látható, hogy

$\varphi \rightarrow 0$, ha $a \rightarrow \infty$, tehát a potenciálnak a végtelenben van zérushelye.

Hasonlóan $\varphi \rightarrow 0$, ha $r \rightarrow \infty$ vagy $z \rightarrow \infty$.

Ha $l \rightarrow \infty$, akkor formálisan a végtelen hosszú, egyenes töltéssűrűségű egyenes vezetőkhöz jutunk.

Ennek potenciálja hengersizmetrikus és elemi számításból ismert.

$$\varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}, \quad (5.8)$$

ahol r_0 tetszés szerinti távolság, ahol a potenciál zérus. (5.1)-ből a négyzetgyököt binomiális sora első két tagjával helyettesítve ($z = 0$ választással)

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{2l + \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{l^2} + \dots}{\frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{l^2} + \dots} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{4l^2}{r^2} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2l}{r}, \quad (5.9)$$

ami nyilvánvalóan végtelenhez tart l növekedése esetén.

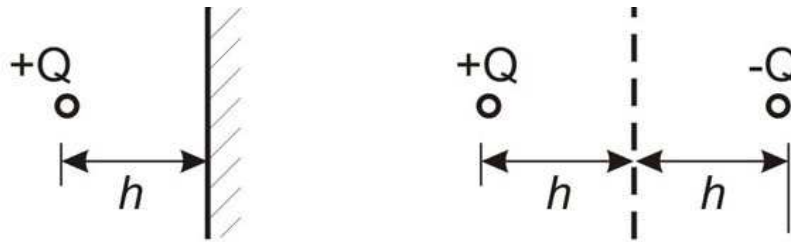
Az (5.8)-ban a potenciál a végtelenben minden határon túl nő, az (5.9)-ben zérus a végtelenben (formálisan $r = 2l$ esetén). A potenciál r -től a két esetben azonos módon függ, tehát azonos térerősséget eredményez. Megfelelő konstansválasztással a két potenciál azonos.

Fémelektrodok homogén izotróp közegben

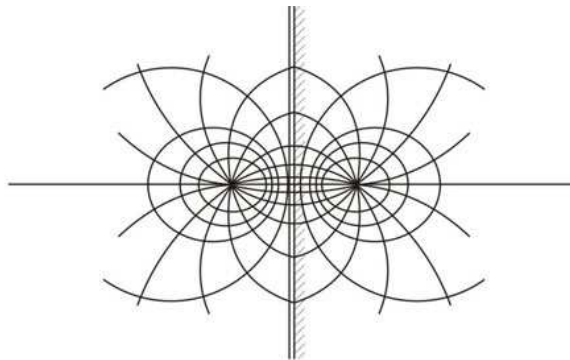
Helyettesítő töltések módszere

A helyettesítő töltések módszere abból a tényből indul ki, hogy az elektrosztatikai feladatok megoldása adott gerjesztő töltéselrendezés és peremfeltételek esetén *egyértelmű*. Ha tehát találunk olyan helyettesítő töltéselrendezést, amelyik ugyanazokat a peremfeltételeket biztosítja, mint az eredeti elrendezés peremfeltételei, akkor a kialakuló tér is ugyanaz lesz, mint az eredeti esetben.

A legegyszerűbb példa a töltés tükrözése síkon (5.2.–5.3. ábra).



5.2. ábra. Ponttöltés tükrözése



5.3. ábra. Végtelen síkkal szemben elhelyezett pontszerű töltés erőterének meghatározása tükrözéssel

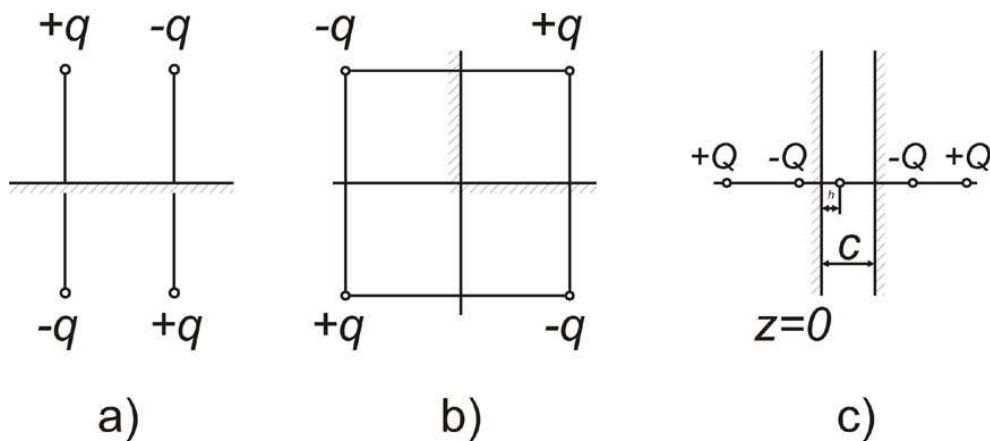
A bal oldalán látható az eredeti elrendezés: ponttöltés 0 potenciálú, végtelen sík felület közelében. Fizikailag ez fémsíkot jelent. Az ábra jobb oldalán a helyettesítő töltéselrendezés látható, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

- a vizsgált térrészben a töltéselrendezés megfelel az eredeti elrendezésnek,
- a tükörtöltés a nem vizsgált térrészben van,
- a töltés és tükörtöltés együtt előállítják a kívánt peremfeltételeket (esetünkben a sík 0 potenciálját).

Ekkor biztosak lehetünk abban, hogy a vizsgált térrészben a töltések a valódi teret állítják elő. A nem vizsgált térrészben a kialakuló „térnek” nincs fizikai jelentése.

A síkon való tükrözés módszere síkproblémákra (kétdimenziós feladatokra) is kiterjeszhető, ha a gerjesztő töltések végtelen hosszú vonaltöltések.

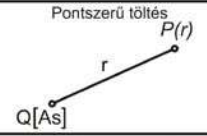

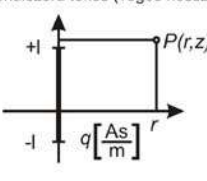
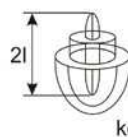
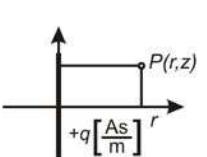

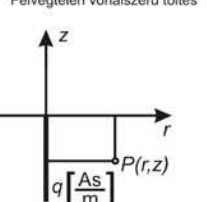
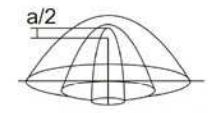
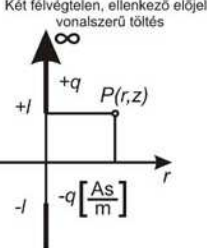
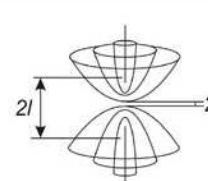
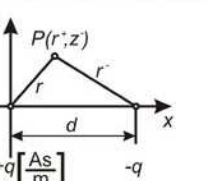
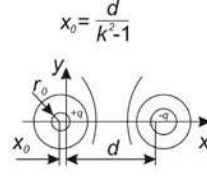
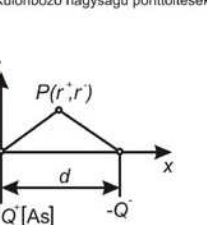
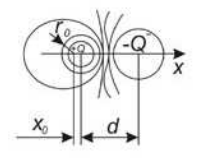
A feladat könnyen általánosítható. Néhány elrendezés az 5.4. ábrán látható.



5.4. ábra a) végtelen síkkal párhuzamos síkban egymással is párhuzamosan haladó vezetékek erőterének meghatározása tükrözéssel b) két egymásra merőleges végtelen sík által alkotott sarokban elhelyezett vezető erőterének kiszámítása tükrözéssel c) két párhuzamos sík közé elhelyezett töltés erőterének kiszámítása sorozatos tükrözéssel

Néhány elemi úton számítható tér ekvipotenciális felületeit foglalja össze az 5.1. táblázat. Köztük a számított mintapélda. Ha az elektródáink megfelelnek az ekvipotenciális felületeknek, a tér az egyszerű helyettesítő töltések tereként számítható. Például kis legömbölyített csúcs által létrehozott szikrakör terét két félvégtelen vonaltöltés tereként számíthatjuk.

5.1. táblázat. Egyszerű töltéselrendezések ekvipotenciális felületei

Töltéselrendezés	Potenciál	Ekvipotenciális felületek		
<p>Pontszerű töltés</p> 	$U_p = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$	<p>Felület potenciálja</p> $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ <p>$U \rightarrow 0$, ha $r \rightarrow \infty$</p>	<p>Geometriája</p> 	<p>Egyenletek</p> $r = r_0$ (konc. gömbök)
<p>Vonalszerű töltés (véges hossz)</p> 	$U_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z+l+\sqrt{r^2+(z+l)^2}}{z-l+\sqrt{r^2+(z-l)^2}}$	<p>$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{a+l}{a-l}$</p> <p>$U \rightarrow 0$, ha $a \rightarrow \infty$</p> <p>$r \rightarrow \infty$ vagy $z \rightarrow \infty$</p>		$\frac{z^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1$ ($l^2 = a^2 - b^2$) konfokális ellipszoidok
<p>Végtelen, vonalszerű</p> 	$U_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r}$	<p>$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r}$</p> <p>$U = 0$, ha $r = 1$</p>		$r = r_0$ koaxális hengerek
<p>Félvégtelen vonalszerű töltés</p> 	$U_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln (z + \sqrt{r^2 + z^2})$	<p>$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln a$</p> <p>$U = 0$, ha $a = 1$</p>		$z = \frac{1}{2a}(a^2 - r^2)$ konfokális paraboloidok
<p>Két félvégtelen, ellenkező előjelű vonalszerű töltés</p> 	$U_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{l+z+\sqrt{r^2+(l+z)^2}}{l-z+\sqrt{r^2+(l-z)^2}}$	<p>$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{l+a}{l-a}$</p> <p>$U = 0$, ha $a = 0$</p>		$\frac{z^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1$ ($l^2 = a^2 + b^2$) konfokális hiperboloidok
<p>Párhuzamos vonalszerű töltések</p> 	$U_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r'}{r}$ $U_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	<p>$r_0 = \frac{kd}{k^2-1}$</p> <p>$k = \frac{r'}{r} > 1$</p> <p>$U = 0$, ha $r = r'$</p>	<p>$x_0 = \frac{d}{k^2-1}$</p> 	$\left(x + \frac{d}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{dk}{k^2-1}\right)^2$ excentrikus körhengerek
<p>Különböző nagyságú ponttöltések</p> 	$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{Q'}{r'} \cdot \frac{Q}{r} \right)$	<p>$U_0 = 0$</p> <p>$x_0 = \frac{d}{k^2-1}$</p> <p>$k > 1$</p> <p>$U = 0$, ha $k = \frac{r'}{r} = \frac{Q}{Q'}$</p>		<p>(Az egyetlen gömb felület $U_0 = 0$)</p>

Különös figyelmet érdemel a két utolsó sor. Az utolsó előtti sor megmutatja: végtelen hengeren a párhuzamos végtelen vonaltöltés tükrözhető úgy, hogy a henger ekvipotenciálú legyen. Sőt, két párhuzamos, eltérő potenciálú henger tere is mindig helyettesíthető két párhuzamos vonaltöltés terével.

Az utolsó sorban azt látjuk, hogy két eltérő előjelű és abszolút értékű ponttöltés terében mindig létezik egy gömb alakú ekvipotenciálú felület. Megfordítva: vezető gömb közelébe helyezett ponttöltés tere mindig leírható az eredeti töltés és a gömb belsejében alkalmasan elhelyezett tükröttöltés terével. Itt a tükröttöltés nem azonos abszolút értékű az eredeti töltéssel.

Integrálegyenletek módszere

A helyettesítő töltések módszerének általánosítása az, amikor az elektródafelületek előírt potenciálját biztosító felületi töltéelosztást keressük. A töltések valóban fellépnek, ezért *másodlagos töltéseknek* nevezik őket.

A másodlagos töltés lehet a fémelektrodákon megjelenő felületi töltés, a dielektrikum felszínén megjelenő polarizációs töltés és inhomogén dielektrikumban a dielektrikum belsejében megjelenő polarizációs töltés. Ezzel az integrálegyenletek a részben dielektrikumos kitöltésű terek kezelését is lehetővé teszik.

Az elektrosztatika integrálegyenletének megfogalmazása azon alapul, hogy az ismert (elsődleges) töltések és a keresett másodlagos töltések együtt olyan teret hoznak létre, amely eleget tesz a peremfeltételeknek.

Az elektrosztatika alapfeladata, hogy homogén, üres térben a fémelektrodák előírt potenciálon legyenek. Nézzük a φ_0 potenciálú elektródát. A felületi töltés ismeretében

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\sigma(Q)}{r_{PQ}} dA_Q, \quad (5.10)$$

ahol az integrálást az elektróda (nem feltétlenül zárt) A felületére kell elvégeznünk és

$$r_{PQ} = |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q|.$$

Legyen a P pont az elektróda felületén. Ekkor az

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\sigma(Q)}{r_{PQ}} dA_Q = \varphi_0, \quad P, Q \in A \quad (5.11)$$

egyenletet kapjuk, ahol az ismeretlen a $\sigma(Q)$ felületi töltés. Ha ezt ismerjük, a potenciál bármely pontban (5.10)-ból számítható. Ez a megoldás – ahogyan a 3. fejezetben bizonyítottuk – egyértelmű.

Az ismeretlen függvény integrálban szerepel, de ugyanebben az integrálban van egy kétváltozós függvény is, amelynek mindkét változója az integrálás tartományába esik. Az egyenlet általános alakja:

$$\int_A \kappa(P, Q) f(Q) dA_Q = g(P). \quad (5.12)$$

Az (5.12) összefüggést elsőfajú lineáris integrálegyenletnek nevezzük. $f(Q)$ a keresett függvény, $g(P)$ ismert ún. zavarófüggvény, $\kappa(P, Q)$ az integrálegyenlet magja. P és Q közös tartománya A , dA_Q ennek differenciális eleme.

Bizonyítható, hogy (5.12)-nek a benne szereplő függvényekre tett igen általános feltételek mellett van megoldása.

Nézzük a következő kifejezést:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(\omega).$$

Ha elvben az egyenlőségben $F(\omega)$ ismert, $f(t)$ ismeretlen, akkor $f(t)$ meghatározása (a Fourier-transzformációhoz tartozó időfüggvény keresése) a fenti $e^{-j\omega t}$ maggal is integrálegyenlet megoldását jelenti.

Ezt a megoldást zárt alakban is elő tudjuk állítani az inverz Fourier-transzformáció képletével

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Tény, hogy integrálegyenlet megoldását zárt alakban a legritkább esetben tudjuk megkapni. Különösen áll ez magasabb dimenziójú tartományok esetén.

Az (5.12) könnyen általánosítható N elektróda esetére. Ekkor az egyes elektródákat i indexszel megkülönböztetve az

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{A_i} \frac{\sigma_i(Q_i)}{r_{P_k Q_i}} dA_i = \varphi_k, \quad P_k \in A_i, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (5.13)$$

integrálegyenlet-rendszerhez jutunk.

Az adott töltésű elektródákat oly módon kezeljük, hogy az elektróda potenciálját (5.13)-ban ismeretlennek tekintjük, az egyenletrendszert pedig kiegészítjük a

$$\int_{A_i} \sigma_i(P_i) dA_{P_i} = Q_i \quad (5.14)$$

egyenlettel. (Q_i itt az i -edik elektróda töltése.) Természetesen a különböző feladatok megoldása során az egyenleteket másképp is meg lehet fogalmazni, illetve további feltételek érvényesítése is szükséges lehet. Tárgyalásuk azonban messze túlmutat jelen célkitűzésünkön.

Kétdimenziós feladatok esetén (síkproblémák) az (5.11) egyenlet $\kappa(P, Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_{PQ}}$ magja helyett, ami a Coulomb-potenciálból származik, a vonaltöltés potenciáljából származó

$$\kappa(P, Q) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r_{PQ}} \quad (5.15)$$

logaritmikus magfüggvényt használjuk. Ezzel például az (5.13) alakja

$$\varphi(P) - \varphi_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \int_{L_i} \sigma(Q) \ln \frac{1}{r_{PQ}} dl_Q. \quad (5.16)$$

Az integrálást itt síkbeli görbén, a végtelen, henger alakú elektródák vezérgörbéjén kell elvégeznünk.

Megjegyzések

1. Ha a vizsgált elrendezés *zárt*, egy kontúr valamennyi többit körülveszi, φ_0 értéke tetszőleges lehet, ez a zárt kontúr potenciálja. E kontúron kívül a potenciál értéke konstans φ_0 .
2. Ha az elrendezés *nyitott* és a végtelenben korlátos potenciált követelünk meg, az elrendezés semleges kell legyen. Ezt a

$$\sum_{i=1}^N \int_{L_i} \sigma(Q) dl_Q = 0 \quad (5.17)$$

további feltétel biztosítja, és φ_0 értéke ismeretlen. Az egyenletrendszer megoldása során adódó φ_0 , a potenciál határértéke a végtelenben.

Látható, hogy míg három dimenzióban az integrálegyenletek a nyitott feladatok legkényelmesebb megoldását kínálják, mert magukban létrehozzák a potenciál zérus határértékét a végtelenben, ez nem áll a kétdimenziós feladatokra. Ennek érdekes fizikai oka van. A végtelen hosszú, egyenletes töltéssűrűséggel ellátott hengerek össztöltése végtelen, ráadásul a „végtelen távoli” pontba is elhelyezünk vele töltést. Ez persze fizikai abszurdum és formálisan ezt oldja fel, ha az össztöltés zérus. A zérus össztöltés a zárt elrendezés esetén automatikusan teljesül.

Figyeljük meg: három- és kétdimenziós esetben egyaránt a homogén dielektrikumokra felírt integrálegyenletek tartományának dimenziója eggyel alacsonyabb a vizsgált tér dimenziójánál. Inhomogén dielektrikumban az ismeretlen polarizációs töltések eloszlása azonos dimenziójú a térrel. Ilyenkor az integrálegyenletek nem jelentenek nyereséget.

Parciális differenciálegyenletek

Az elektrosztatika alapegyenlete a Poisson-egyenlet, illetve töltésmentes térrészben a Laplace-egyenlet. Zárt térrészben a peremen a potenciált vagy normális irányú deriváltját (Dirichlet- és Neumann-peremfeltételek) kell megadnunk az egyértelmű megoldhatósághoz.

A Laplace-egyenlet megoldásának legkényelmesebb módszere a változók szétválasztásának módszere, ha alkalmazható. A módszert *Fourier-módszernek* nevezik.

A háromdimenziós Laplace-operátort tartalmazó egyenletek tizenegy koordináta-rendszerben szeparálhatók. A kétdimenziósok között a választék sokkal nagyobb. Mi csak egyetlen koordináta-rendszerben mutatjuk be a módszert: a derékszögű (*Descartes-rendszerben*). Itt a Laplace-egyenlet alakja

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (5.18)$$

A módszer lényege, hogy feltételezi: a megoldás három függvény szorzata, amelyek közül bármelyik csak egy koordinátától függ

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (5.19)$$

Ezt (5.18)-ba helyettesítve és φ -vel végigosztva kapjuk:

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2Z}{dz^2} = 0, \quad (5.20)$$

ahol a parciális deriváltakat közönséges deriváltak helyettesítik, hiszen a függvények egyváltozósak. (5.20) csak úgy lehet érvényes a változók bármely értékére, ha a bal oldalon álló három kifejezés külön-külön állandó, és az állandók összege zérus.

Legyen

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2X}{dx^2} = -\alpha^2, \quad (5.21a)$$

$$\frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2Y}{dy^2} = -\beta^2, \quad (5.21b)$$

$$\frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2, \quad (5.21c)$$

és

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2. \quad (5.21d)$$

α és β megválasztása tőlünk függ. Rendszerint úgy választjuk meg őket, hogy a peremfeltételek kielégítése minél könnyebb legyen.

Válasszuk például α és β értékét pozitív valós számnak. (Komplex mennyiségek is lehetnek!) Ekkor az (5.19) potenciál

$$\varphi(x, y, z) = (A \sin \alpha x + B \cos \alpha x)(C \sin \beta y + D \cos \beta y)(E e^{+\gamma z} + F e^{-\gamma z}) \quad (5.22)$$

alakú szorzatokból állítható elő.

A kétdimenziós potenciálprobléma megoldható a változók szétválasztásával, *Jackson* gondolatmenetét követve.

A kétdimenziós probléma a z iránytól független potenciáeloszlást feltételez. (5.22) helyett kis változtatással

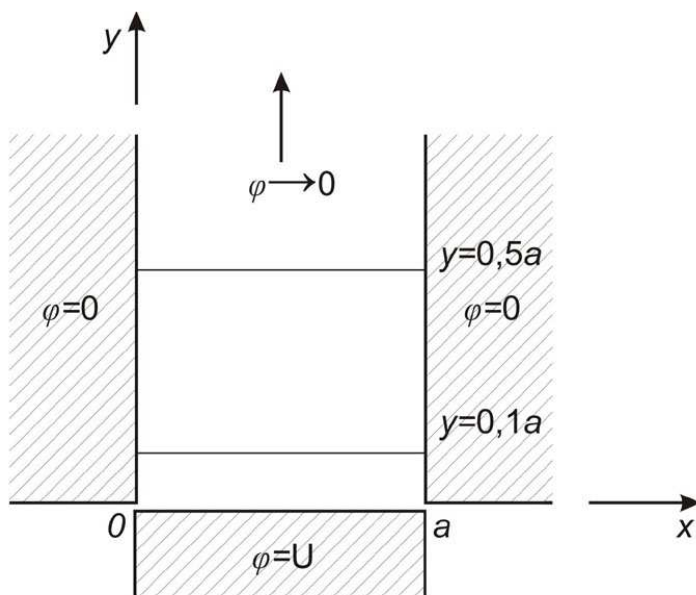
$$\varphi = (A \sin \alpha x + B \cos \alpha x)(C e^{\alpha y} + D e^{-\alpha y}) \quad (5.23)$$

alakú potenciáelosztással számolunk. Legyenek a peremfeltételek az 5.5. ábrán adottak, azaz

$$\varphi = 0, \text{ ha } x = 0 \text{ V } x = a \in \{y | 0 \leq y \leq \infty\}, \quad (5.24a)$$

$$\varphi = U, \text{ ha } y = 0 \in \{x | 0 \leq x \leq a\}, \quad (5.24b)$$

$$\varphi \rightarrow 0, \text{ ha } y \rightarrow \infty. \quad (5.24c)$$



5.5. ábra. Elektródák kétdimenziós térben

(5.24a) nyilván kielégíthető, ha $B = 0$ és $\alpha = k \frac{\pi}{a}$, (5.24c)-hez szükséges, hogy $C = 0$ legyen.

A négy peremfeltétel közül hármat kielégít a

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k \frac{\pi y}{a}} \sin\left(\frac{k \pi x}{a}\right) \quad (5.25)$$

alakú megoldás, amely az (5.23)-ban szereplő függvények alkalmas lineáris kombinációja. Ez a kifejezés minden y értékhez Fourier-sort rendel. $y = 0$ értéknél

$$\varphi(x, 0) = U = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k \pi x}{a}, \quad (5.26)$$

ahonnan a Fourier-együtthatók

$$A_k = \frac{2}{a} \int_0^a U \sin \frac{k \pi x}{a} dx, \quad (5.27)$$

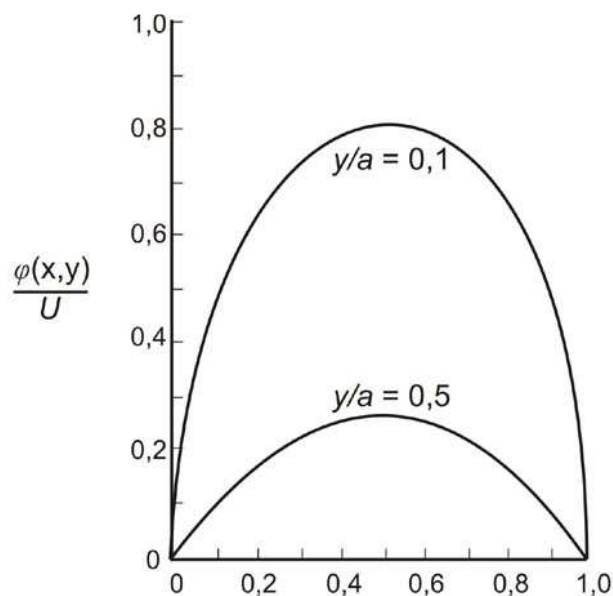
alakjából kapjuk, hogy

$$A_{kz} = \begin{cases} \frac{4U}{\pi k}, & \text{ha } k \text{ páratlan} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páros} \end{cases}. \quad (5.28)$$

A $\varphi(x, y)$ potenciálkifejezés tehát

$$\varphi(x, y) = \frac{4U}{\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-k \frac{\pi y}{a}} \sin \frac{k\pi x}{a}. \quad (5.29)$$

A potenciál értéke két y távolságra az 5.6. ábrán látható.



5.6. ábra. A potenciál értéke ($y/a = 0,1$ -re és $0,5$ -re)

Variációs formalizmus

A variációs elvek a fizikai jelenségek leírásában nagyon fontosak. Segítségükkel az egyenletek koordinátafüggetlenül és általánosságban fogalmazhatók meg.

Különlegesek a variációs elvek között az egyensúlyi rendszerekre vonatkozóak. Az elektrodinamikában ilyen rendszerek a sztatikus és stacionárius terek.

Egyensúlyi rendszerekben általános elv az energiaminimum elérésére törekvés. Más szóval a rendszer akkor van egyensúlyban, ha a lehetséges energiaállapotai közül a legkisebb energiájú állapotban van. (Analogia: a tömeg a parabola alakú gödör alján van egyensúlyban.)

A variációs elvek általános megfogalmazása a következő. Rendeljük a rendszert leíró függvényhez (ilyen például a potenciál) egy funkcionált. A funkcionál (a „függvény függvénye”) a leírófüggvényhez skalár értéket rendel.

A variációs elvek nagy csoportja – és így az ezeken alapuló számítási eljárások is – energia típusú funkcionálokat definiál.

Nézzük például a

$$W[\varphi] = \frac{1}{2} \int_V (\text{grad } \varphi)^2 dV - \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} \varphi dV \quad (5.30)$$

funkcionált, ahol ρ a hely ismert függvénye. Ez nyilván a φ skalár függvényhez rendel egy számértéket.

Megjegyzés: A függvényeket jelölő szimbólumok (φ , ρ) választása nem véletlen. Az (5.30) funkcionál az elektrosztatika variációs elvének fő funkcionálja. Ha megvizsgáljuk a struktúráját, az első tag a „mozgási energia” típusú energiakifejezés, a második tag a „helyzeti energia” típusú kifejezés. Az ilyen kifejezést a mechanikában *Lagrange-függvény*nek hívják, és szintén variációs funkcionálként működik.

A $\varphi(\mathbf{r})$ függvénynek legalább szakaszonként folytonosan deriválhatónak kell lennie V belsejében és az A felületen. Az ismert ρ -tól elvárjuk, hogy ne legyen szinguláris a V térfogatban.

A funkcionál értéke megváltozik, ha φ értéke változik. Legyen a változás $\delta\varphi$ is függvény. A funkcionál értéke ekkor $W[\varphi + \delta\varphi]$. A funkcionál *variációjának* a

$$\delta W = W[\varphi + \delta\varphi] - W[\varphi] \quad (5.31)$$

kifejezést nevezzük.

Pontosabb megfogalmazásban a funkcionál első variációját keressük, ez (5.31)-nél a $\delta\varphi$ megváltozással (ez a φ függvény variációja!) arányos lesz, és a magasabb rendű tagokat elhanyagoljuk. (Az egész gondolatmenet olyan, mint a függvényeknél az első derivált képzése.) Szokás ezt úgy is megfogalmazni, hogy a $\delta\varphi$ variációja első rendben kicsi.

A variációs számítás azt a függvényt keresi, amelynél a funkcionál variációja zérus. A deriválttal való rokonság okán ez azt jelenti, hogy a funkcionálnak a keresett függvény ezen értékénél *szélsőértéke* van. Jól megválasztott funkcionál esetén ilyenkor a keresett függvény adott fizikai feladatmegoldás, például az elektrosztatika peremérték-feladatának megfelelő potenciálfüggvény. Az elmondottak értelmében (5.30) variációja

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_V [\text{grad}(\varphi + \delta\varphi)]^2 dV - \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} (\varphi + \delta\varphi) dV - \frac{1}{2} \int_V [\text{grad}\varphi]^2 dV + \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} \varphi dV. \quad (5.32)$$

A kijelölt műveletek elvégzése után

$$\delta W = \int_V \text{grad}\varphi \text{grad}(\delta\varphi) dV - \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} \delta\varphi dV, \quad (5.33)$$

ahol a $(\delta\varphi)^2$ -tel arányos tagot elhanyagoltuk. Ez a tag egyébként nem negatív, ezért a funkcionál eltűnésekor a függvény a minimumát veszi fel.

A Green-tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\delta W = \int_V - \left[\Delta\varphi + \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right] \delta\varphi dV + \int_A \delta\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dA. \quad (5.34)$$

A funkcionál variációja akkor tűnik el, ha a felületi integrál zérus, a φ függvény a térfogatban eleget tesz a

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5.35)$$

Poisson-egyenletnek. A variácószámítás terminológiájával (5.35) az (5.30) funkcionál *Euler-egyenlete*.

A felületi integrál eltűnik, ha $\delta\varphi = 0$ a vizsgált térfogat felületén. Ez azt jelenti, hogy a φ függvény variációját úgy kell megválasztani, hogy a peremen (vagy annak legalább egy részén) a potenciál ne változzék. Más szóval a $\varphi + \delta\varphi$ és a φ függvény peremfeltétele azonos.

Ha az előző feltétel nem teljesül, a peremen $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$, azaz a derivált normális komponense zérus. (Ez fizikailag a térerősség normális komponensének eltűnését, tehát a felületen *csak* a felülettel párhuzamos komponens létezését jelenti.) Ha tehát a függvény variálásánál a perem egy részére nem írunk elő feltételt a függvény variációjára, a normális derivált a felületen zérusnak adódik. Ez a variációs feladat ún. *természetes peremfeltétele*. Az egész felületen nem érvényesülhet ez a feltétel (a perem egy részére elő kell írni a potenciált), mert ha az egész peremen $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ érvényes, ennek csak a $\varphi = \text{konst.}$ potenciálfüggvény tesz eleget.

Ha a peremen Neumann típusú peremfeltétel adott, másféle funkcionált használunk. Ha a peremfeltétel

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = f(P), \quad P \in A, \quad (5.36)$$

akkor az alkalmas funkcionál alakja

$$W[\varphi] = \frac{1}{2} \int_V (\text{grad}\varphi)^2 dV - \int_V \rho\varphi dV - \oint_A f\varphi dA. \quad (5.37)$$

Direkt számítással az elsőrendű variáció

$$\delta W = \int_V \left[\Delta\varphi + \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right] \delta\varphi dV + \oint_A \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} - f \right) \delta\varphi dA. \quad (5.38)$$

Az elsőrendű variáció eltűnésének feltétele tehát

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ a térfogatban} \quad (5.39a)$$

és

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = f \text{ teljesülése a peremen.} \quad (5.39b)$$

A variációs elvek alkalmazásánál a megoldást próbafüggvénnyel közelítjük. Ennek létrehozása önmagában is nehéz feladat lehet. Közelítő numerikus számításokban felhasználására még visszatérünk.

Numerikus módszerek

Feynman, a Nobel-díjas elméleti fizikus írja mérnökhallgatóknak készült fizikatankönyvében a peremérték-feladatokról: „A megoldás *egyetlen általános módszere* a numerikus módszer”. A világ egyik legkiválóbb analitikus elméjének fenntartás nélkül elhithetjük, ha az analitikus eljárásokkal szemben a numerikus eljárások prioritását hirdeti. Különösen megerősíti az állítást, ha tudjuk, hogy Feynman ezt az 1960-as évek elején, több mint negyven éve mondotta volt, amikor a számítástechnika még messze nem érte el a fejlettség mai szintjét. Az akkori mainframe számítógépek teljesítménye (extra kivételektől eltekintve) meg sem közelítette a mai személyi számítógépekét.

A numerikus módszereket a második világháborútól kezdve kiterjedten alkalmazták. A számítási munkát kézi kalkulátorokkal, a feladatot részekre bontva, olykor több tucatnyi ember párhuzamos munkájával végezték. Ekkor a helyzethez képest már a 60-as évek elején is óriási előrelépést jelentett az elektronikus számítógépek használata, még ha a máig tartó fejlődés távlatai beláthatatlanok is voltak.

A numerikus módszerek két nagy csoportra oszthatók:

- az analitikus végeredmények paramétereinek numerikus meghatározása,
- numerikus közelítő módszerek alkalmazása.

Az elsőre a továbbiakban térszámítási példát nem adunk. Ilyen eredmény például a Fourier-sorfejtésben az együtthatók analitikus formában megadott integráljának numerikus kiszámítása.

A továbbiakban peremérték-feladatok megoldására olyan példákat mutatunk, ahol a leíró egyenleteket, illetve a peremfeltételeket közelítő módon írjuk le. Ez a közelítés a különböző módon megadott operátorok diszkretizálása. A számítógép véges memóriájából következik, hogy a numerikus megoldást (jóllehet olykor igen sok) véges számú adattal, tehát diszkrét adatok véges sokaságával kell reprezentálnunk.

Három ilyen módszerrel ismerkedünk meg:

- a véges differenciák,
- a véges elemek és a
- momentumok módszerével.

A véges differenciák módszere

A módszert kétdimenziós problémára mutatjuk be. Általánosítása három dimenzióra rendkívül egyszerű. A feladat a

$$\Delta\varphi = 0, \quad \mathbf{r} \in V \quad (5.40)$$

egyenlet megoldása zárt tartományban, amelynek peremére

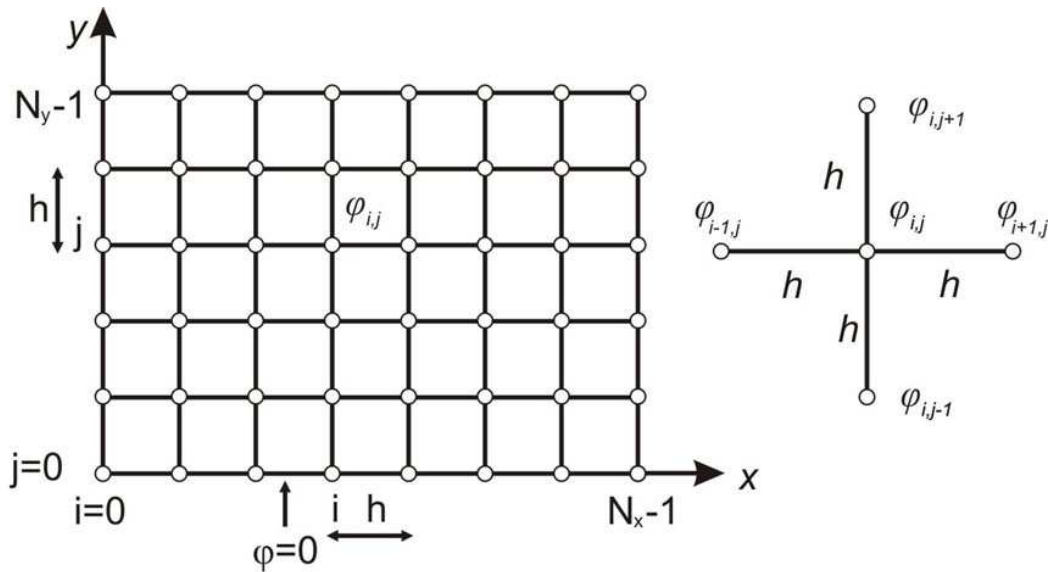
$$\varphi = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in A_1, \quad A_1 \cup A_2 = A \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = g(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in A_2$$

a φ függvény Dirichlet- vagy Neumann-peremfeltételének tesz eleget.

A vizsgált tartományt (ez esetünkben síktartomány) fedjük le egy (a továbbiakban mindig ekvidisztáns) derékszögű ráccsal (négyzetrács). A közelítő potenciált a rácspontokban határozzuk meg.

A rácspontokat az alapján kettős indexszel látjuk el, amelyik az x , illetve y irányú oszlop, illetve sor sorszámát jelöli.



5.7. ábra. Végesdifferencia-rács

Az ábrán látható ötpontos séma potenciáljai a következők:

$$\varphi_{i+1,j} = \varphi_{i,j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} h + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} h^2 + \dots,$$

$$\varphi_{i-1,j} = \varphi_{i,j} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} h + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} h^2 + \dots,$$

(5.42)

$$\varphi_{i,j+1} = \varphi_{i,j} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} h + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} h^2 + \dots,$$

$$\varphi_{i,j-1} = \varphi_{i,j} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} h + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} h^2 + \dots$$

Összeadva a négy egyenletet, némi rendezés után kapjuk, hogy

$$(\Delta\varphi)_{i,j} = \frac{\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i+1,j} - 4\varphi_{i,j}}{h^2} + \dots \quad (5.43)$$

A Laplace-kifejezés diszkrét közelítését kaptuk. Igazolható, hogy az elhagyott tagok h^2 -tel arányosak.

A térrész minden rácspontjára felírhatunk egy lineáris algebrai egyenletet, (5.43) összefüggést zérussal téve egyenlővé. Ezzel közelítjük a Laplace-egyenletet.

A Dirichlet-feltételnek úgy teszünk eleget, hogy a peremre eső rácspont potenciálját megfeleltetjük az (5.41) egyenletben előírtaknak. Így az ismeretlenek és az egyenletek száma eggyel csökken.

A Neumann-peremfeltételhez a peremen fekvő $\varphi_{i+1,j}$ potenciálokkal a következő egyenletet írhatjuk fel (ezúttal a bal oldali peremre)

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{i,j} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h} + \dots, \quad (5.44)$$

és ezzel helyettesítjük a perem pontjára vonatkozó (5.43) egyenletet, amelyben például $\varphi_{i-1,j}$ nincs is értelmezve. Sajnos (5.44) elhagyott tagja h -val arányos, így nagyobb hibát tartalmaz, mint (5.43), ahol a hiba h^2 -tel arányos. A hiba csökkenthető, ha nemcsak a peremmel szomszédos rácspont, de egy további rácspont potenciálját is figyelembe vesszük. Így a Laplace-egyenlet megoldása igen egyszerű. Minden rácspontra a

$$\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i+1,j} - 4\varphi_{i,j} = 0 \quad (5.45)$$

egyenletet kell felírni. A kialakuló egyenletrendszer akkor nem homogén, ha vannak perempontok, ahol Dirichlet-feltételt írtunk elő.

A Poisson-egyenlet esetén $\Delta\varphi(x_i, y_j)$ koordinátához tartozó ismert értékét kell behelyettesítenünk a rácspontra felírt (5.43) egyenletbe.

Végeredményként az ismeretlen csomóponti potenciálokra (ezek száma több millió is lehet) lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk. Ennek mátrixa azonban (5.43) alakját figyelembe véve igen kevés elemet tartalmaz; ráadásul mind a főátlóban és a főátlóval párhuzamosan négy mellékátlóban helyezkednek el. Az ilyen „ritkás” (sparse) mátrixokkal rendelkező egyenletrendszer felírására (és a mátrix invertálására) sajátos eljárásokat dolgoztak ki.

A görbe vonalú peremeket meg lehet kísérlni négyzetrács vonalaival közelíteni. Jobb közelítés, ha nem ekvidisztáns ráccsal dolgozunk.

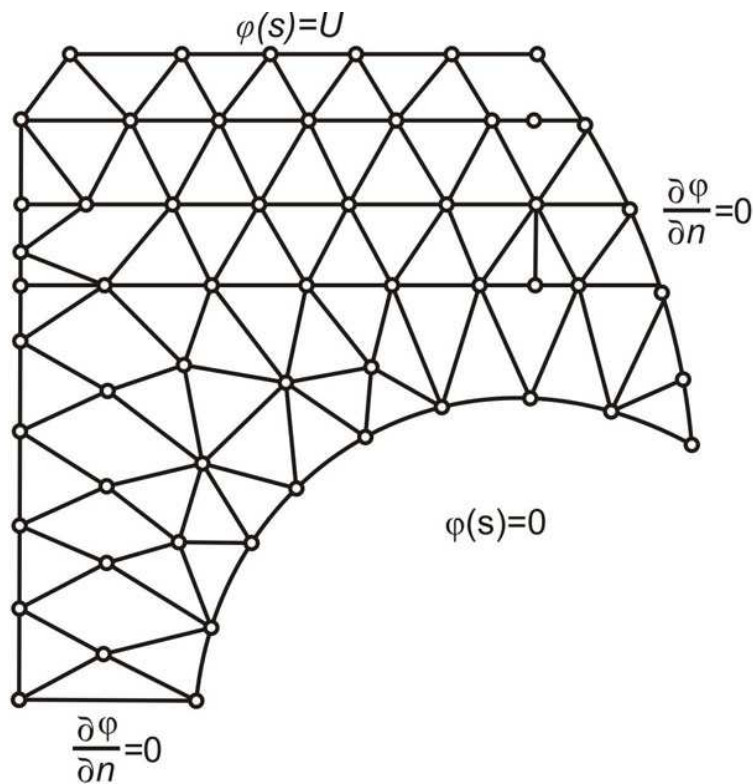
A módszer általánosítása nem ekvidisztáns rácsra, továbbá három dimenzióra kézenfekvő és alapvetően új megfontolásokat nem igényel.

A véges elemek módszere

A végesdifferencia-módszer hátránya, hogy görbe vonalú peremek esetén az illeszkedés a peremekhez nehézkes. A pontosság javítása a rácsvonalak – és így a rácspontok – számának jelentős növekedésével jár.

A peremproblémák megoldásának lehetséges módja, hogy a rácspontokat kellő sűrűséggel a peremen vesszük fel. Ekkor a pontokra illeszkedő rács szabálytalan, semmi esetre sem derékszögű. Az 5.8a ábrán a két dimenzióban leggyakoribb háromszögrácsot mutatjuk be. A lefedés más alakzatokkal is történhet, de a szomszédos alakzatok élei, illetve csúcspontjai

egybe kell essenek. A megoldásfüggvény közelítését a lefedés csúcspontjaiban adott értékek meghatározásával keressük. Ebben az értelemben a véges elemek módszere a véges differenciák módszere általánosítása.



5.8a ábra. A véges elemek felvétele

De csak ebben az értelemben. A szabálytalan rács miatt a Laplace-operátor közelítése Taylor-sorral nem megfelelő. Ritka kivételként a szabályos háromszög rács és a szabályos hatszögrács esetén a feladat megoldható, de a gyakorlatban nem használatos.

A véges elemek módszerénél is a rácspontokban számított potenciál értékével közelítjük a keresett potenciálfüggvényt. Feltételezzük, hogy a csomópontok potenciálértékei meghatározzák a sokszögű alakzat felett a potenciáeloszlást. Ebből a szempontból a legegyszerűbb az 5.8b ábrán látható, háromszög alakú tartomány: a három csúcspont potenciálja a tartományban lineáris potenciáeloszlást határoz meg.

A csomópontok potenciáljaira vonatkozó egyenlet megoldása lehet a momentum módszer vagy a variációs módszer.

A momentum módszerrel az integrálegyenletek numerikus megoldásánál foglalkozunk.

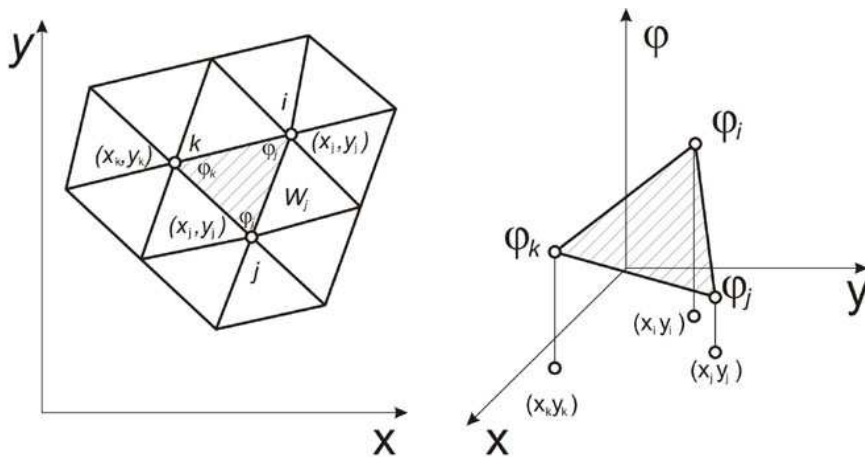
Kétdimenziós esetre szorítkozva a variációs módszernél az (5.30) helyfüggő permittivitásra történő kiterjesztése alapján az alábbi funkcionált kell minimalizálnunk

$$W = \frac{1}{2} \iint_A \kappa(x, y) \left[\left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \iint_A f(x, y) \varphi(x, y) dx dy. \quad (5.46)$$

A funkcionál szélsőértékét veszi fel (és mint láttuk, ez minimum), ha az ismeretlen függvény helyébe a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa(x, y) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\kappa(x, y) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right] = f(x, y) \quad (5.47)$$

általánosított Poisson-egyenlet megoldását helyettesítjük. Ez az egyenlet érvényes a sztatikus elektromos tér és a stacionárius áramlási tér valamennyi feladata esetén. Az általunk vizsgált esetekben $\kappa(x, y)$ a tartományonként állandó anyagjellemző: ε permittivitás vagy σ vezetőképesség. $f(x, y)$ a Poisson-egyenlet jobb oldala: töltéssűrűség, illetve stacionárius forrásáram.



5.8b ábra. Végeselem koordinátái és potenciáeloszlásai

Ezek után a csúcsponti potenciálok által kijelölt lineáris potenciálfüggvényekkel közelítjük a potenciáeloszlást oly módon, hogy a potenciálok alkalmas megválasztásával minimalizáljuk (5.46)-ot. A potenciálfüggvény meghatározásához tekintünk az 5.8b ábra jelöléseit. Ezekkel a jelölésekkel a kijelölt végeselemhez tartozó lineáris potenciálfüggvény

$$\varphi(x, y) = a_l + b_l x + c_l y, \quad (5.48)$$

ahol az a_l , b_l , c_l együtthatók az

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_l \\ b_l \\ c_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

egyenletrendszer megoldásából adódnak.

Az (5.46) funkcionál szélsőértékének szükséges feltétele:

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi_i} = 0, \quad \forall i \quad (5.50)$$

N véges elem esetén (5.46) közelítése az egyes háromszögek felett értelmezett w_l integrálok összege:

$$W = \sum_{i=1}^N w_i = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \iint_{A_i} \kappa \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \iint_{A_i} f \varphi dx dy \right\}. \quad (5.51)$$

Az (5.48) és (5.49) segítségével kiszámított közelítőfüggvényeket behelyettesítve (5.51)-be és az (5.50)-ben szereplő feltételt felhasználva, valamennyi $\frac{\partial w_l}{\partial \varphi_i}$ parciális derivált kifejezhető a csomóponti potenciálok függvényeként.

A rácsponti potenciálokra felírt egyenlet ezek után a

$$\sum_{l \in L} \frac{\partial w_l}{\partial \varphi_i} = 0 \quad (5.52)$$

egyenletek összessége, ahol L jelenti mindazon véges elemek sorszámát, amely elemek az i -edik rácspontot csúcspontként tartalmazzák. (5.52)-t minden rácspontra felírva egy ritkás mátrixú, lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk eredményül.

A peremfeltételek közül a Dirichlet-feltétel teljesülését a peremen fekvő rácspontok ismert potenciáljainak rögzítésével biztosíthatjuk. A variációs elvek tárgyalásánál kapott eredmény szerint a homogén Neumann-feltétel *természetes határfeltétel*. Ha a perempontokra semmit sem írunk elő, a peremen a homogén Neumann-feltétel automatikusan teljesül.

A véges elemek módszere három dimenzióra hasonló elvek alapján általánosítható. A kitöltés legegyszerűbb egymáshoz illeszkedő tetraéderekkel történhet, amelyek csúcspontjainak potenciáljai meghatározzák a tetraéder belsejében a potenciáleloszlást közelítő függvényt.

Momentumok módszere

A momentum módszer általános közelítő módszer lineáris operátorral rendelkező egyenletek megoldására. A megoldást függvény sor alakjában keresi a módszer.

A módszer integrál- és differenciáloperátorok esetén egyformán alkalmazható. Így a véges elemek módszere is felépíthető a momentum módszerre.

A módszert olyan általánossággal tárgyaljuk, hogy mindkét esetben érvényes kijelentéseket tudjunk megfogalmazni.

Legyen adott az L lineáris operátor, amelyre

$$Lf = g, \quad (5.53)$$

ahol az ismeretlen f függvény és az ismert g függvény meghatározott (nem szükségképpen azonos) függvényosztályba tartozik.

Az (5.53) egyenlet megoldásán az L operátor L^{-1} inverzének megkeresését értjük

$$f = L^{-1}g. \quad (5.54)$$

L^{-1} nem feltétlenül állítható elő zárt alakban, illetve véges algoritmus formájában.

Az elektrosztatika (5.11) integrálegyenletének esetén például g az elektródák ismert potenciálja a felületen (a hely korlátos függvénye), f a felületi töltéssűrűség (szintén a hely függvénye, de ha az elektródák felülete nem kellően sima, mert például élei, csúcsai vannak, nem feltétlenül korlátos).

A momentumok módszere a keresett f függvényt közelítőleg egy lineárisan független elemekből álló, véges számú elemet tartalmazó $\{\varphi_n\}$ függvényhalmaz soraként állítja elő

$$f = \sum_{n=1}^N f_n \varphi_n, \quad (5.55)$$

ahol f_n az f -től és φ_n -től függő konstans. A φ_n függvények a *bázisfüggvények*.

Az (5.55) kifejezést az (5.53)-ba helyettesítve

$$\sum_{n=1}^N f_n (L\varphi_n) = g, \quad (5.56)$$

ahol felhasználtuk, hogy az L operátor lineáris. Az operátor közelítő invertálását az f_n együtthatók meghatározása jelenti, hiszen ha az $\{f_n\}$ halmaz ismert, (5.55) közelítőleg előállítja a keresett f függvényt. Az $\{f_n\}$ sorozat meghatározásához a momentumok módszere másik függvényhalmazzal, a $\{w_m\}$ súlyfüggvények halmazát definiálja. Megköveteljük, hogy a választott skalár szorzat definícióval valamennyi $\langle w_m, \varphi_n \rangle$ és $\langle w_m, g \rangle$ skalár szorzat értelmezve legyen.

A skalár szorzat valós elemek esetén olyan kéttényezős művelet, amelynek eredménye valós skalár mennyiség, és eleget tesz a következő feltételeknek:

$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$ – kommutativitás,

$\langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$ – disztributivitás.

$\langle a, a \rangle \geq 0$ pozitív definit, mert az egyenlőséggel csak $a = 0$ esetben állhat fenn.

A tulajdonságok pontosan megegyeznek a vektorok skalár szorzatának tulajdonságaival. Az analógia alapján az a elem abszolút értéke:

$$|a| = \sqrt{\langle a, a \rangle}.$$

Az elektrosztatika integrálegyenleteinek esetén a skalár szorzat két függvény szorzatának az integráloperátor tartományán vett integrálja.

Minden egyes súlyfüggvénnyel képezve (5.56) skalár szorzatát, a következő egyenletrendszerhez jutunk

$$\sum_{n=1}^N \langle w_m, L\varphi_n \rangle f_n = \langle w_m, g \rangle \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (5.57)$$

$M = N$ esetén az egyenletrendszer $L = [l_{mn}] = [\langle w_m, L\varphi_n \rangle]$ mátrixa kvadratikus, és ezért közvetlenül invertálható

$$[f_n] = [l_{mn}]^{-1} [g_m]. \quad (5.58)$$

Az eljárást $w_m = \varphi_m$ esetén, ha a súlyfüggvények és a bázisfüggvények azonosak, *Galerkin-módszernek* nevezik. Ha az L operátor önadjungált és a $\{\varphi_m\}$ -t az operátor teljes saját-függvényrendszerének csonkításával kapjuk, az eljárás neve *Rayleigh–Ritz-módszer*.

A közelítés hibáját definiáló kifejezés

$$\eta = L \sum_{n=1}^N f_n \varphi_n - g. \quad (5.59)$$

A momentum módszer ezt a hibát kicsivé teszi oly módon, hogy

$$\langle w_m, \eta \rangle = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (5.60)$$

Ha $M > N$ választással élünk, a megoldást akkor is az (5.59) hiba valamilyen módon történő minimalizálásával keressük. Ilyen feladat lineáris programozási eljárásokkal oldható meg.

A módszer alkalmazásánál a kérdés, hogyan válasszuk a bázis- és súlyfüggvényeket, illetve N és M értékét. Erre a megkívánt pontosság és a rendelkezésre álló erőforrások: tárkapacitás, számítási sebesség stb. ismeretében a gyakorlat ad választ.

A bázisfüggvények és súlyfüggvények két nagy csoportja az egész tartományon értelmezett függvények (például trigonometrikus függvények, ortogonális polinomok), és a résztartományokon értelmezett függvények. Ezek csak az egész tartomány egy részén különböznek zérustól (impulzusfüggvények).

Mindkét esetben a módszer által megkövetelt integrálokat általában numerikusan számítjuk ki. Például résztartományonként, polinom karakterű függvények esetén a véges elemek módszerének megalapozásához jutunk.

A módszer gyakran használt változata, ha súlyfüggvényként a résztartományon értelmezett δ -függvényt választjuk. Ekkor

$$w_m = \delta(P_m), \quad (5.61)$$

és (5.57) alakja

$$\sum_{n=1}^N f_n (L\varphi_n |_{P_m}) = g(P_m), \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (5.62)$$

Az egyenletből látszik, hogy nem az egész tartományon, csupán M előtt kijelölt pontjában követeljük meg az egyenlet teljesülését. Ezért a módszert gyakran pontillesztésnek (kollokáció) nevezik.

Előnye, hogy a mátrixelemek számítása egyszerűbb, például csak egy integrálást követel az integrálegyenletek esetén. Hátránya, hogy kellő pontosságú számításhoz az általános módszernél jóval nagyobb számú bázisfüggvény felvételét követeli meg.

Három numerikus módszert mutattunk be a térszámítás alapegyenleteinek megoldására. Ami szembetűnően közös bennük:

- valamennyi módszer véges számú reprezentáló skalár mennyiséggel közelíti a keresett függvényt.

- A véges számú ismeretlen meghatározására az eredeti operátort algebrai egyenletrendszerre képezi le.

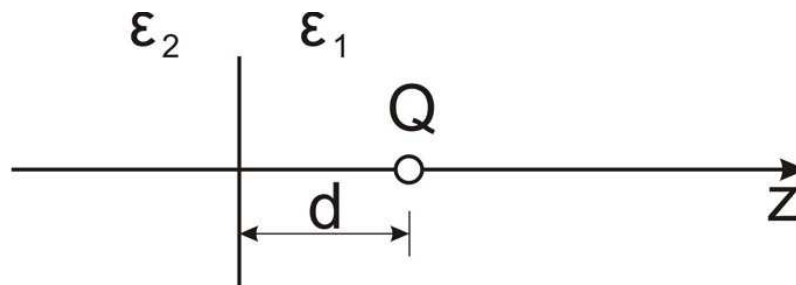
Az algebrai egyenletrendszerek megoldására számos kész algoritmus (illetve program) áll rendelkezésre.

Elektrosztatikai feladatok változó ε esetén

Analitikus megoldások

Elemi megoldást a homogén közegekben kapott megoldásokhoz hasonlóan csak egyszerű geometriák esetén kapunk.

A helyettesítő töltések módszere közül a tükörtöltések általánosítása sík határfelület esetén lehetséges. Elrendezésük az 5.9. ábrán látható.



5.9. ábra. Ponttöltés dielektrikumában

A megoldást az

$$\varepsilon_1 \Delta \varphi_1 = Q \delta(x) \delta(y) \delta(z-d) \quad z > 0 \quad (5.63a)$$

$$\varepsilon_2 \Delta \varphi_2 = 0 \quad z < 0 \quad (5.63b)$$

egyenletrendszer adja. (A ponttöltés sűrűségét delta-függvénnyel adtuk meg.)

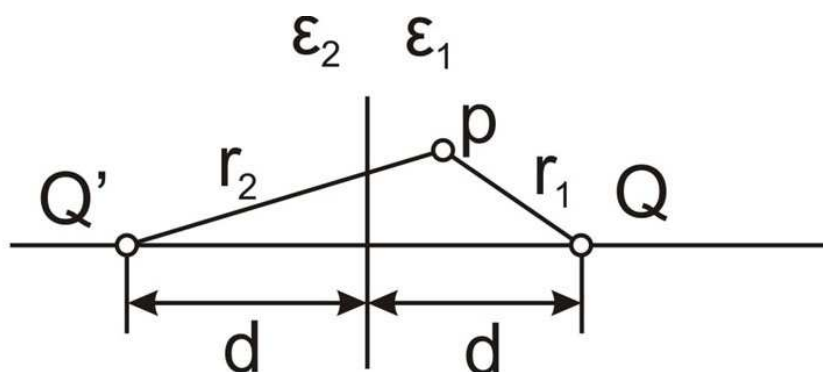
A két közeg határán teljesülnie kell az alábbi feltételeknek

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (5.64a)$$

és

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}, \text{ azaz } \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}. \quad (5.64b)$$

A tükörtöltések módszerének analógiájára helyezzünk a tükörkép helyére Q' nagyságú töltést (5.10. ábra).



5.10. ábra. Helyettesítő töltések

Ekkor a $z > 0$ féltérben a potenciál

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \cdot \left(\frac{Q}{r_1} + \frac{Q'}{r_2} \right). \quad (5.65)$$

Ha a potenciált a $z < 0$ féltérben is meg akarjuk határozni, ebben a térrészben forrásmentes elektrosztatikus teret kell kapnunk, hiszen az eredeti elrendezésben a féltérben nincsen töltés. A legegyszerűbb feltevés, amellyel élhetünk, hogy a potenciál megegyezik az eredeti töltés helyén lévő, de azzal nem megegyező Q'' ponttöltés által létrehozott potenciállal homogén ϵ_2 permittivitás esetén

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \cdot \frac{Q''}{r_1}, \quad z < 0. \quad (5.66)$$

Belátható, hogy

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_1} \right) \right|_{z=0} = - \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_2} \right) \right|_{z=0} = \frac{d}{(x^2 + d^2)^{3/2}}, \quad (5.67a)$$

$$\left. \frac{1}{r_1} \right|_{z=0} = \left. \frac{1}{r_2} \right|_{z=0} = \frac{1}{(x^2 + d^2)^{1/2}}. \quad (5.67b)$$

Ezekkel az (5.64) folytonossági feltételek az alábbi követelményeket támasztják

$$Q - Q' = Q'', \quad (5.68a)$$

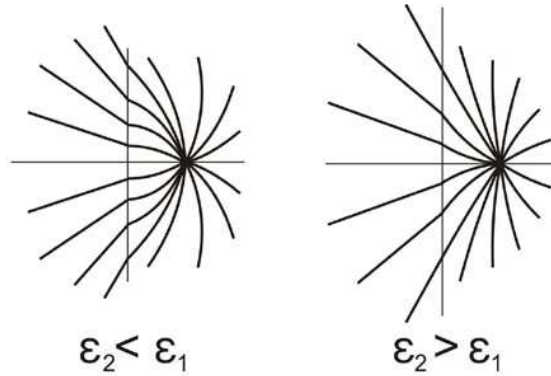
$$\frac{1}{\epsilon_1} (Q + Q') = \frac{1}{\epsilon_2} Q''. \quad (5.68b)$$

Az egyenletrendszert megoldva megkapjuk a helyettesítő töltéseket (5.10. ábra)

$$Q' = - \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) Q, \quad (5.69a)$$

$$Q'' = \left(\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right) Q. \quad (5.69b)$$

Az eredő vektorvonalak szerkezete az 5.11. ábrán látható.



5.11. ábra. Vektorvonalak dielektromos féltér közelében

A határfelületen valódi töltés nincsen. Nincsen valódi töltés a közegek belsejében (a Q ponttöltés kivételével), hiszen ε szakaszonként állandó, ezért $-\operatorname{div}\mathbf{P} = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$. A peremen azonban ε változik, ezért ott

$$\sigma_{pol} = \sigma_{szabad} = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)\mathbf{n}_2, \quad (5.70)$$

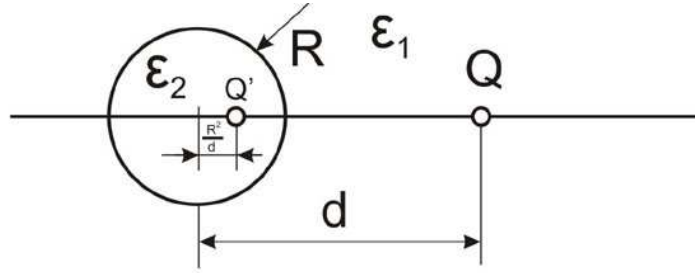
ahonnan az (5.67) felhasználásával

$$\sigma_{pol} = \sigma_{szabad} = -\frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \cdot \frac{d}{(x^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (5.71)$$

A felületen fellépő szabad töltés fontos majd az integrálegyenletet felhasználó általános megoldásban.

Az $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ esetben az ε_2 dielektrikum fémekhez hasonlóan viselkedik. Belsejében az elektromos tér igen gyenge lesz. A felületi töltéssűrűség a vezető felületén mérthez tart, az $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}$ szorzótényezőtől eltekintve.

Részletes bizonyítás nélkül bemutatjuk, hogy a dielektromos tükrözés gömbön is létezik (5.12. ábra), de itt a ponttöltések mellett vonaltöltések is megjelennek helyettesítő töltésként.



5.12. ábra. Tükrözés dielektromos gömbön

A gömbön kívül ($r > R$) a Q töltés és Q' helyettesítő töltés, valamint a Q' -től a gömb középpontjáig tartó vonaltöltés együttes terével kell számolni ε_1 permittivitású térben, ahol

$$Q' = -\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\right) \frac{a}{d} Q. \quad (5.72)$$

A gömb belsejében a tér az eredeti Q töltés helyére tett

$$Q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} Q \quad (5.73)$$

töltés és egy, a ponttöltéstől a végtelenig húzódó vonaltöltés tere az ε_2 permittivitású közegben. A ponttöltésekre vonatkozó formulák hasonlósága a félvégtelen tér összefüggéseivel szembeötlő.

Az *integrálegyenletek* felírása sokféle lehet szakaszonként állandó permittivitású közeggel kitöltött térben.

A másodlagos töltések módszere azt jelenti, hogy a tér által létrehozott szabad töltéseket keressük és hatásukat szuperponáljuk a gerjesztőterre. Szakaszonként homogén dielektrikumra csak a különböző permittivitású közegek peremén jelenik meg polarizációs töltés, amint azt a 3. fejezetben láttuk.

A perem bármely pontjában érvényes összefüggések

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma_{sz}}{\varepsilon_0}, \quad (5.74)$$

$$E_{fn} = \frac{E_{1n} + E_{2n}}{2}, \quad (5.75)$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}, \quad (5.76)$$

ahol σ_{sz} a felületi szabad töltés sűrűsége.

(5.74) és (5.75) a felületi töltésréteg térerősségének ismert tulajdonságát írják le, (5.76) bármely peremen érvényes.

A három összefüggés kombinációjából

$$E_{fn}(P) = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \cdot \frac{\sigma_{sz}(P)}{2\varepsilon_0}. \quad (5.77)$$

Ugyanakkor $E_{fn}(P)$ meghatározható a térben található szabad töltésekből.

$$\sigma_{sz}(P) + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \oint_A \sigma_{sz}(Q) \frac{\partial}{\partial n_P} \cdot \frac{1}{r_{PQ}} dA_Q + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \sigma_{sz}(Q) \frac{\partial}{\partial n_P} \cdot \frac{1}{r_{PQ}} dA_Q = 0 \quad P \in A, \quad (5.78)$$

ahol az egyszerűség kedvéért egy zárt peremfelületű dielektrikumot feltételezünk, kívül ε_2 , belül ε_1 permittivitással (vö. az 5.74 egyenlettel és a kifelé mutató pozitív normálissal). Ezenkívül n elektródán helyezkedik el töltés. Potenciáljaik az alábbi egyenletekben rögzítettek

$$\varphi_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_A \frac{\sigma_{sz}(Q)}{r_{PQ}} dA_Q + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{\sigma_{sz}(Q)}{r_{PQ}} dA_Q \quad P \in A_k \quad (5.79)$$

$k = 1, 2, \dots, n$

A fémelektrodák valódi töltése a szabad töltésből

$$\sigma = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0} \sigma_{sz} \quad (5.80)$$

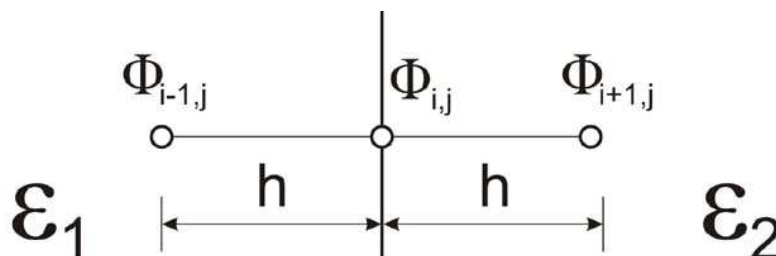
módon számítható (vö. a 3.15 és a 3.16 egyenletekkel).

A *parciális differenciálegyenletek* a homogén térrészekben ismert alakúak. A megoldáshoz szükség van a külső peremeken a potenciál vagy normális deriváltjának az értékére. A dielektrikumok közös peremén a feltételek megegyeznek az (5.64) feltételekkel. Az egyenleteket térrészenként oldjuk meg, és a peremen illesztjük a megoldásokat.

A *variációs módszereket* a változó permittivitású közegben két dimenzióra már bemutattuk az (5.46) formulában. Kiterjesztése három dimenzióra kézenfekvő.

Numerikus módszerek

A *véges differencia módszerek* esetén a homogén térrészekben változatlan formájúak az egyenletek. Két különböző permittivitású közeg határán a rácspontok potenciálja a normális deriváltakban szerepel (5.13. ábra).



5.13. ábra. Perempont dielektrikumok határán

$$\phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} - h \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{i,j}^{-0} + O(h^2), \quad (5.81a)$$

$$\phi_{i+1,j} = \phi_{i,j} + h \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{i,j}^{+0} + O(h^2). \quad (5.81b)$$

Az ismert folytonossági feltételekből

$$\varepsilon_1 (\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}) = \varepsilon_2 (\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) + O(h). \quad (5.82)$$

Görbült peremek esetén további megfontolások szükségesek. Ezek bonyolítják az algoritmust és csökkentik a pontosságot.

A *végeselem-módszerekkel* a háromszög (illetve három dimenzióban tetraéder) alakú véges elemek csúcspontjait a dielektrikumok peremfelületén kell felvenni. Ezzel a potenciálok folytonossága és az (5.51) formulát alkalmazva a normális deriváltak folytonossága is teljesül. A végeselem-módszerek nemcsak a peremek, hanem a folytonossági feltételek figyelembevételének is hatékonyabb, könnyebben kezelhető módszerei, mint a véges differencia módszerei.

További feladatok

A 3. és 4. fejezetekben láthattuk a stacionárius áramlási tér és a stacionárius mágneses tér áramot nem hordozó térrészekben ($\mathbf{J} = 0$) skalár potenciállal állítható elő és teljesen analóg a változó permittivitású közegekben kialakuló elektrosztatikus térrel.

A 3. fejezetben bemutatott analógiát kiegészítve a három terület analóg mennyiségei a következők.

5.2. táblázat. Elemi úton számítható tér ekvipotenciális felületei

Elektrosztatika	Stacionárius áramlási tér	Stacionárius (sztatikus) mágneses tér
$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$	$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$	$\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_m$
$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}$	$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b)$	$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H} + \mathbf{M})$
ε	σ	μ
Q	I	csak polarizációs töltés
		$-\text{div } \mathbf{M}$

A mágneses skalár potenciál különösen jó áramhurok mágneses terének vizsgálatára, ahol a hurok potenciáljának egyszerű geometriai interpretációja van (arányos a térbeli látószöggel), de többértékű.

Az igen nagy értékű (elvből végtelen) közegjellemző peremén a tér vektora merőleges a határoló felületre. Más szóval a határoló felület ekvipotenciális felületként viselkedik.

Mágneses tér számítása vektorpotenciálból

Parciális differenciálegyenlet

A 4. fejezetben láttuk, hogy a

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (5.83)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad (5.84)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (5.85)$$

egyenletek által leírt stacionárius mágneses tér mindig leírható egy vektorpotenciállal, mert (5.84) következtében

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \quad (5.86)$$

Az (5.85) lineáris, izotróp közegekben (5.83) felhasználásával

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}\right) = \mathbf{J}. \quad (5.87)$$

Bemutattuk, hogy ha μ véges tartományban állandó, és Coulomb mértékválasztással élünk ($\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$), akkor a vektorpotenciál a

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}. \quad (5.88)$$

vektoriális Poisson-egyenletnek tesz eleget. Ez három skalár egyenlet, amelyből Coulomb mértékválasztás következtében csak kettő megoldása független.

A peremeken az (5.88) egyenlet megoldásait a terekre vonatkozó peremfeltételeknek megfelelően kell illeszteni.

Variációs formalizmus

Az (5.87) egyenlet végtelen térben kellően gyorsan, $(1/R^2)$ eltűnő potenciállal a

$$W(\mathbf{A}) = \int_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{A} \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) - \mathbf{J} \mathbf{A} \right) dV \quad (5.89)$$

funkcionál Euler-egyenlete.

Az integrálást az egész térre kiterjesztettük. A egyenlet a Green-tételkörbe tartozó integrál-redukciós tétellel

$$\int_V (\operatorname{rot}\mathbf{u} \operatorname{rot}\mathbf{v} - \mathbf{u} \operatorname{rot} \operatorname{rot}\mathbf{v}) dV = \int_a (\mathbf{u} \times \operatorname{rot}\mathbf{v}) da \quad (5.90)$$

az alábbi, csak elsőrendű deriváltakat tartalmazó alakra hozható

$$W(\mathbf{A}) = \int_V \left(\frac{1}{2\mu} |\operatorname{rot}\mathbf{A}|^2 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \right) dV = 0, \quad (5.91)$$

amelyek lokális minimuma van korrekt \mathbf{A} behelyettesítésekor.

Folyjék az μ_1 permeabilitású végtelen kiterjedésű közegben véges térrészben \mathbf{J} áram. Az árammal diszjunkt véges térrészben a permeabilitás legyen μ_2 . Ebben az esetben az 5.91 alakja

$$W(A) = \frac{1}{\mu_1} \int_{V_1} \left[\frac{1}{2} |\operatorname{rot}A_1|^2 - JA_1 \right] dV + \frac{1}{\mu_2} \int \frac{1}{2} |\operatorname{rot}A_2|^2 dV. \quad (5.92)$$

A variáláshoz legyen $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{i0} + \delta\mathbf{A}_i$. Ehhez a véges térrész határoló felülete miatt (5.90) értelmében figyelembe kell venni a felületi integrálból adódó feltételt is

$$\frac{1}{\mu_1} \int_a \delta\mathbf{A}_1 (\operatorname{rot}\mathbf{A}_{10} \cdot d\mathbf{a}) - \frac{1}{\mu_2} \int_a \delta\mathbf{A}_2 (\operatorname{rot}\mathbf{A}_{20} \cdot d\mathbf{a}) = 0, \quad (5.93)$$

ahol a vegyes szorzatban a tényezők sorrendjét változtattuk. Ez a feltétel akkor teljesül, ha a variáció tangenciális komponense folytonos a felületen.

$\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{A}_1 = \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{A}_2$, ahonnan a

$$\frac{1}{\mu_1} \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{A}_1 = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{A}_2 \quad (5.94)$$

természetes folytonossági feltételt kapjuk: \mathbf{H} tangenciális komponense folytonos a peremen.

A másik folytonossági feltételünk B_n folytonossága, ahol

$$\mathbf{n} \cdot B_i = \mathbf{n} \operatorname{rot}\mathbf{A}_i = \operatorname{div}_f(\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{n}).$$

Innen a folytonossági feltétel

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{n}, \quad (5.95)$$

azaz \mathbf{A} tangenciális komponense folytonos.

Amennyiben a véges elemek módszerénél alkalmazzuk a variációs formalizmust, a fentieket figyelembe kell venni.

Állandó mágnesek

Mivel $\mathbf{J} = 0$, a mágneses teret a rögzített \mathbf{M} dipólsűrűség hozza létre. A tér skalár potenciálból állítható elő

$$\mathbf{H} = -\text{grad} \varphi_m = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (5.96)$$

ahol φ_m egyértékű, nem ciklikus potenciál.

(5.96) mindkét oldalának divergenciáját véve kapjuk a

$$\Delta \varphi_m = \text{div} \mathbf{M} \quad (5.97)$$

Poisson-egyenletet.

A megoldást az elektrosztatikából ismerjük. Ennek értelmében konkrét esetünkben a véges térfogatban lévő mágneseesség potenciálját térben elosztott töltés és felületi töltés hozza létre.

$$\varphi_m(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{div}_Q \mathbf{M}(Q)}{r_{PQ}} dV + \frac{1}{4\pi} \oint_A \frac{\mathbf{M}(Q)}{r_{PQ}} d\mathbf{A}_Q,$$

ahol az \mathbf{A} felületelem vektor, és a zárt felületből kifelé mutat. Ha a mágnesezettség a térfogatban homogén, csak a felületen lévő „töltés” hozza létre a mágneses teret (lásd a 4.6. ábrát).

6. KONCENTRÁLT PARAMÉTERŰ HÁLÓZATOK

A Maxwell-egyenletek általában a térben elosztott mező viselkedését írják le. A geometriai tér bármely pontjában létezik (elvben) az elektromágneses tér. Egyes térjellemzők változása bármely pontban meghatározza más térjellemzők tulajdonságait, és viszont. Az energia az egész térben elosztott, és elvben a veszteségek is.

Az eddigi feladatok során voltak olyan elrendezések, amelyekben a jelenségeket jól lehetett lokalizálni. A vékony vezetékben az áram vezetése kis átmérőjű, hengeres vezetékben (drótban) történt. A vezetőképesség a vezetéken kívül zérus értékű. Így a véges vezetőképességből származó Joule-veszteség kis térrészre koncentrálódik.

Ha a kondenzátorban a nagy kiterjedésű fegyverzetek közel vannak egymáshoz, és nagy permittivitású dielektrikum van közöttük, az elektromos tér gyakorlatilag teljes egészében a fegyverzetek közötti térrészben koncentrálódik. A szórt tér erőssége és így a benne tárolt energia az összes tárolt energiához viszonyítva elenyésző.

Ferromágneses anyagok jelenléte nélkül az áram által gerjesztett tér viszonylag nagy térrészben van jelen. A mágneses teret mesterségesen koncentráló elrendezések (sokmenetes, hosszú tekercs) szórt tere még mindig igen nagy. A mágneses tér erős koncentrációját toroidtekercsekkel (ezek szórt tere elenyésző) és ferromágneses magokra csévelt tekercsekkel (különösen, ha zártak) lehet elérni.

Egyes elrendezésekre jellemző, hogy a mező kis térrészekben koncentrálódik. Vizsgálatukra a Maxwell-egyenletek használata túlzó. A térben koncentrált energia és veszteségek esetére egyszerűsítjük az egyenleteket. Az elrendezéseket *koncentrált paraméterű hálózatoknak* nevezzük.

Egyenáramú hálózatok

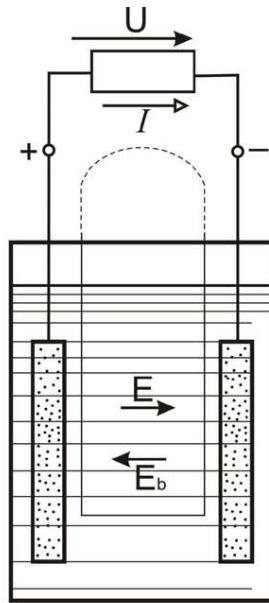
Az alapegyenletek

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad (6.1)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = 0, \quad (6.2)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b) = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_b. \quad (6.3)$$

Foglalkozunk a 6.1. ábrán látható egyszerű áramkörrel: telep (akkumulátor vagy galvánelem) és pólusaira kapcsolt ellenállás.



6.1. ábra. Az Ohm-törvény levezetéséhez

Az elrendezésben \mathbf{E}_b fizikai tartalma nyilvánvaló. A telep elektródái között nyugalmi állapotban \mathbf{E} elektromos térerősség lép fel, amit a fegyverzeteken felhalmozódott töltések hoznak létre. Ennek ellenére a véges σ vezetőképességű elektrolitban nem folyik áram. Ez csak úgy lehetséges, hogy az elrendezésben fellép egy olyan hatás, amely (6.3) értelmében kioltja a térerősség hatását. (Ez a hatás lehet kémiai folyamat, amely szétválasztja a töltéseket a fegyverzetekre. A nem elektromos hatás elektromos kifejezése van sűrítve az \mathbf{E}_b -be.) Az ábrán látható zárt vonal mentén (az óramutató járásának megfelelő irányban) integrálva a térerősséget

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} + \oint_L \mathbf{E}_b d\mathbf{l} = \oint_L \frac{\mathbf{J}}{\sigma} d\mathbf{l}, \quad (6.4)$$

ahol az első integrál a (6.1) miatt zérus. A második integrál csak a telep belsejében vett úton értelmezett, és az ún. üresjárási feszültséget definiálja. (A fizikusok ezt gyakran *elektromotoros erő* kifejezéssel nevezik meg.)

A jobb oldali integrál két szakaszon történő integrálásra bontható: integrálás a telep belsejében, illetve azon kívül, a kapcsok közé helyezett ellenálláson. Miután az áram a változó keresztmetszet ellenére az egész körben azonos, (6.2) értelmében az egyenlet

$$U_b = IR_b + IR_k \quad (6.5)$$

alakba írható, ahol R_b a telep belső ellenállása, R_k a kapcsok közé helyezett külső ellenállás.

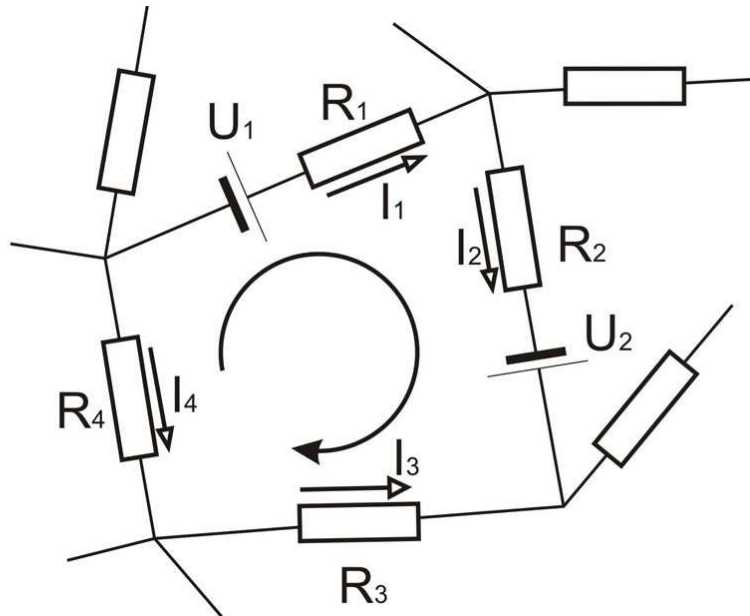
Véges hosszúságú A keresztmetszetű vezeték esetén az

$$U = \oint_L \frac{\mathbf{J}}{\sigma} d\mathbf{l} = I \oint_L \frac{d\mathbf{l}}{A\sigma} = IR \quad (6.6)$$

összefüggéshez jutunk, amelyet *Ohm-törvénynek* nevezünk. Egyúttal az ellenállás definícióját is megkapjuk. Az ellenállás egysége az *ohm* ($\Omega = \text{V/A}$).

A belső ellenállásokat az áramkör részeként kezelve bonyolultabb áramkörök tetszés szerinti zárt körére hasonlóan felírható (6.2. ábra), hogy

$$\sum_k U_k = \sum_k I_k R_k . \quad (6.7)$$



6.2. ábra. A huroktörvény szemléltetése

Ez az összefüggés *Kirchhoff II. törvénye*, vagy a *huroktörvény* egyenáramú, koncentrált paraméterű hálózatra. A törvény állítása: bármely zárt hurok körüljárása esetén a feszültségek összege, tehát a körülhaladó töltésen végzett összes munka zérus.

Kirchhoff I. törvényét vagy a *csomóponti törvényt* az eddig fel nem használt (6.2) alaptörvényből származtatjuk (6.3. ábra). A csomópontban töltés nem halmozódhat fel, tehát a zárt felületen átfolyó áram zérus. Miután az áramok csak a vezetékben folynak, az egyenlet

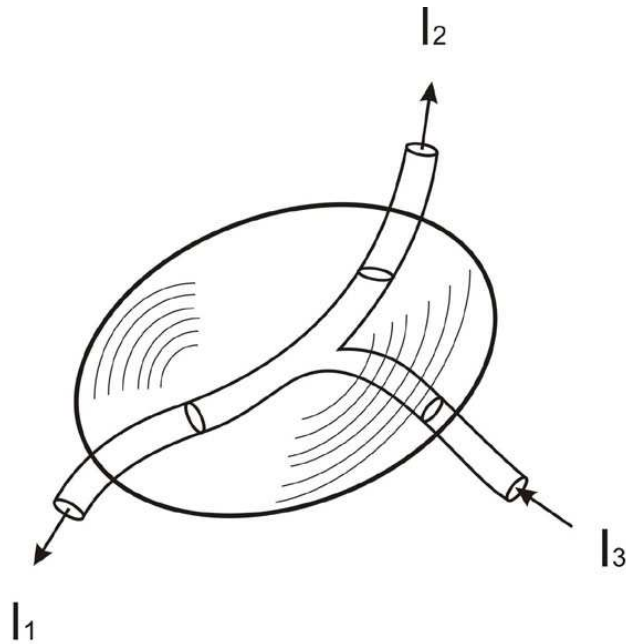
$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 ,$$

vagy általánosságban

$$\sum_k I_k = 0 \quad (6.8)$$

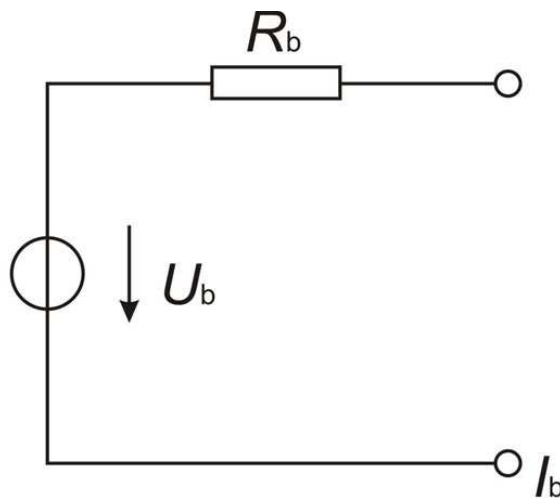
alakba írható, ahol az összegzést a csomópontba ki- és befolyó valamennyi áramra fel kell írni. Zárt felületeken a kifelé mutató irány a pozitív. Az egyenletbe a kifolyó áramokat pozitív, a befolyó áramokat negatív előjellel kell behelyettesítenünk.

Az egyenlet fizikai tartalma nyilvánvaló.



6.3. ábra. A csomóponti törvény levezetése

Az ellenálláson kívül definiáltunk egy új hálózati elemet, a *feszültségforrást*. A feszültségforrás pólusai között a feszültség a rajta átfolyó áramtól függetlenül állandó *forrásfeszültség*. A *feszültséggenerátor* a teljesítményt adó berendezés belső veszteségeit is figyelembe veszi. Lineáris modellje sorba kapcsolt feszültségforrás és belső ellenállás (6.4. ábra).

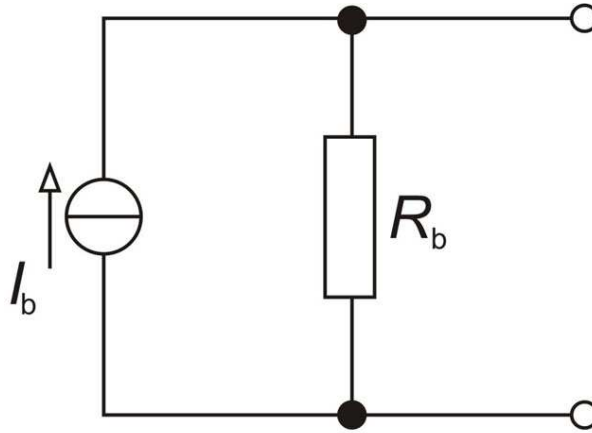


6.4. ábra. Feszültséggenerátor

Jellemzője az $U_b \equiv U_g \equiv U_i$ forrásfeszültség, az R_b (soros) belső ellenállás

Az *áramsűrűség* (6.3) alakjának segítségével egy másik ideális forrás, illetve generátor definiálható.

Az *áramforrás* ágán meghatározott áram, a *forrásáram* folyik a kapcsain lévő feszültségtől függetlenül. Ha a belső veszteségeket figyelembe vesszük, a forrással párhuzamosan kapcsoljuk a belső ellenállást. Az elrendezés neve: *áramgenerátor* (6.5. ábra).



6.5. ábra. Áramgenerátor
Jellemzője az $I_b \equiv I_g$ forrásáram, az R_b (párhuzamos) belső ellenállás

Egyszerű példán mutatjuk meg, hogy a Kirchhoff-egyenleteknek eleget tevő árameloszlás a disszipált teljesítményt minimalizálja.

Folyjék I_0 összáram a párhuzamosan kapcsolt R_1 és R_2 ellenállásokon. Az ellenállásokon folyó I_1 és I_2 áram eleget tesz a

$$I_0 = I_1 + I_2 \quad (6.9)$$

csomóponti egyenletnek. Az ellenállásokon disszipált teljesítmény

$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2. \quad (6.10)$$

A teljesítmény minimumát a feltételes szélsőérték-számítás *Lagrange-multiplikátoros módszerével* keressük. (6.10)-hez hozzáadjuk a 0-ra rendezett (6.9) egyenlet λ -szorosát, és keressük az immár háromváltozós

$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + \lambda [I_0 - (I_1 + I_2)] \quad (6.11)$$

függvény szélsőértékét. A feltételi egyenletek a következők:

$$\frac{\partial P}{\partial I_1} = 2I_1 R_1 - \lambda = 0, \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial P}{\partial I_2} = 2I_2 R_2 - \lambda = 0, \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} = I_0 - (I_1 + I_2). \quad (6.14)$$

Az utolsó egyenlet megfelel (6.9)-nek, a (6.12) – (6.13)-ból λ kiküszöbölésével az

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0 \quad (6.15)$$

hurokegyenlethez jutunk. A csomóponti egyenlet teljesülése esetén a disszipált teljesítménynek akkor van szélsőértéke, ha a hurokegyenlet is teljesül. (6.10) alakjából nyilvánvaló, hogy a szélsőérték csak minimum lehet.

Tetszőleges időfüggésű hálózatok

Az egyenáramú, koncentrált paraméterű hálózatokra vonatkozó egyenletek általánosítása időben változó esetre nem magától értetődő. Az időbeli változás esetén a hálózat kiterjedtsége olyan nagy lehet, hogy az elektromágneses hatás terjedési ideje a hálózat egy részén összemérhető a lejátszódó folyamatok jellemző idejével. Más szóval a késleltetés a hálózat egyes elemein fellépő áramok és feszültségek között nem elhanyagolható, a kölcsönhatások nem tekinthetők egyidejűnek. (Később látni fogjuk, hogy a feszültség és az áram sem definiálható sztatikus, stacionárius módon.)

Ezt előre bocsátva egyenleteink

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6.16)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad (6.17)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b). \quad (6.18)$$

A Maxwell-egyenlet helyett a belőle származtatható folytonossági egyenletet vesszük figyelembe. A (6.16) mindkét oldalát integráljuk az áramkör által kifeszített felületre, ekkor

$$\int_A \operatorname{rot}\mathbf{E} \, d\mathbf{A} = -\int_A \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \quad (6.19)$$

A Stokes-tétel szerint ez

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (6.20)$$

alakba írható, ahol L az áramkör mentén vett integrálási út. A fluxus teljes deriváltja az indukció változásából adódik, nem kell a parciális deriválttal számolni.

A körben szereplő koncentrált elemek: feszültségforrás, ellenállás, kondenzátor a (6.18)-ból származtathatók. Mindezen elemek feszültsége megjelenik a (6.20) egyenlet bal oldalán szereplő integrálban. Végül tehát az egyenlet

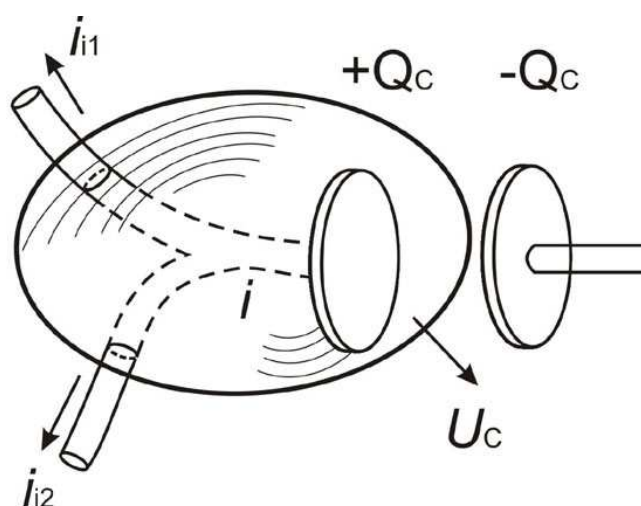
$$U_b + U_R + U_C = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (6.21)$$

alakba írható. Több hálózati elem esetén az egyenlet általánosságban

$$\frac{d\Phi_j}{dt} + \sum_k U_{jk} = 0, \quad (6.22)$$

ahol j a hurok száma, k pedig a hurkon elhelyezkedő ágak sorszám.

A csomóponti egyenlet alakja megegyezik a (6.8) egyenáramú alakkal, ha a csomópontot tartalmazó térfogatban az össztöltés mindig zérus. A zárt felülettel körülvevett térfogatban töltés helyezkedik el koncentrált paraméterű hálózatokban abban az esetben, ha a csomópontot tartalmazó térfogatban kondenzátor csatlakozik, és a kondenzátor egyik fegyverzete a térfogat belsejében van. (A másik fegyverzet értelemszerűen kívül esik a csomópontot, elágazást is tartalmazó térfogaton.)



6.6. ábra. Zárt felület felvétele kondenzátort tartalmazó ág esetén

A 6.6. ábrán látható térfogatra felírva a folytonossági egyenletet

$$\frac{dQ_c}{dt} + \sum_k i_{ik} = 0, \quad (6.23)$$

ahol i a csomópont sorszám, k a csomóponttal illeszkedő ág sorszám. Itt Q_c a csomóponttal illeszkedő valamennyi kondenzátor csomópont felé eső fegyverzetén elhelyezkedő töltések összege.

Az egyenlet időben változó esetben Kirchhoff I. vagy csomóponti törvénye.

A koncentrált paraméterű hálózatok Kirchhoff-egyenletei a hurokfluxus és a csomóponttal illeszkedő töltés mérlegegyenletei. Koncentrált paraméterű hálózatokban általánosságban a vágattöltések mérlegegyenleteiről van szó. Az egyenletekben a fluxus az ön- és kölcsönös induktivitások, a töltés a saját és részkapacitásokon keresztül kapcsolódik az ágakban folyó áramhoz, illetve a kapacitásokban fellépő feszültségekhez.

Bár ezeket az egyenleteket is Kirchhoff nevével jelöljük, felírásuk nem hozzá fűződik. Ilyen típusú áramköri egyenleteket először *William Thomson*, (akit Lord Kelvin néven ismerhetünk) írt fel 1853-ban *leydeni palack* típusú kondenzátor kisütésének vizsgálatára. A kisütő áramkör ellenállásán kívül figyelembe vette az induktivitását is. Kimutatta, hogy ha az ellenállás bizonyos küszöbértéknél kisebb, a kisütés oszcilláló árammal megy végbe. Ugyanebben az évben fedezte fel a mágneses energia $W_m = \frac{1}{2} Li^2$ kifejezését. Az elektromos energia $W_e = \frac{1}{2} QU$ kifejezését *Hermann von Helmholtz* találta meg 1847-ben.

7. TÁVVEZETÉKEK

Elosztott paraméterű hálózatok

A 6. fejezetben mutattuk be a koncentrált paraméterű hálózatok leíróegyenleteinek, a *Kirchhoff-egyenletek*nek a származtatását a *Maxwell-egyenletek*ből. Már ott megjegyeztük, hogy a koncentrált paraméterű hálózatok csak akkor tekinthetők az elektromágneses tér jó modelljének, ha geometriai méreteik következtében az elektromágneses hatás terjedési ideje kicsi a hálózatokon belül a karakterisztikus időhöz képest. Ellenkező esetben az elektromos potenciál (feszültség), a divergenciamentes áram, illetve a belőlük számítható elektromos és mágneses tér többé nem korrekt leírásai az elektromágneses jelenségeknek.

A két szélső leírás (koncentrált paraméterű hálózat és mező) között létezik átmeneti zóna, amely már a véges terjedési sebességet figyelembe veszi, de még megőrzi a feszültséggel és árammal történő leírás egyszerűségét. A feltételeknek eleget tevő elrendezések az *elosztott paraméterű hálózatok*. Ezekben a hálózatokban a leírás során már nemcsak az időtől függnek a leíró mennyiségek, hanem (az esetek döntő többségében) egy térbeli koordinátától is. Tipikus elosztott paraméterű hálózat a *távvezeték*.

A távvezeték elvben homogén kitöltésű térben két párhuzamos alkotójú, tetszőleges vezérgörbéjű fémhenger. Az ideális távvezeték ideális fémhengerekből áll, a valódi vezeték-nél engedünk ebből a szigorúságból.

A távvezeték elvben végtelen hosszú. A gyakorlatban természetesen kezdete és vége is van, de elég hosszú ahhoz, hogy ne lehessen koncentrált paraméterűnek tekinteni.

Az ideális vezeték nem változtat irányt. A gyakorlatban ez nem valósítható meg, de az irányváltás rendszerint csekély hatását nem vizsgáljuk.

Az elektromágneses hullámokat vizsgálva bebizonyítható, hogy párhuzamos, ideális fémhengerek környezetében többek között olyan tér alakul ki, ahol a villamos és mágneses térerősségnek is csak a hengerekre merőleges síkban van komponense. Ezek a transzverzális komponensek, az ilyen struktúrájú tér neve: transzverzális elektromos mágneses tér, rövidítve. TEM. Véges vezetőképesség esetén a tér csak keveset torzul, a TEM leírása még jól közelít.


Inhomogén keresztmetszetű kitöltés esetén nem alakul ki TEM, egyik vagy mindkét térerősségnek hosszanti (longitudinális) komponense is van. Ilyen távvezetéseket is a TEM módusú távvezetékhez hasonló módon lehet leírni és tárgyalni, ezzel azonban a továbbiakban nem foglalkozunk.


A 7.1. ábrán néhány távvezeték-keresztmetszet látható. Megfontolásainkat a vezetékpáron mutatjuk be, de azok valamennyi kétvezetékes távvezetékre érvényesek.

Távvezetékek

Homogén kitöltésű

Inhomogén kitöltésű


vezetékpár
(Lecher-vezeték)


laposvezeték
(tv-kábel)


Koaxiális kábel



Mikroszalagvonal
(mikrosztrip)


Szalagvonal


Koplanáris vezeték

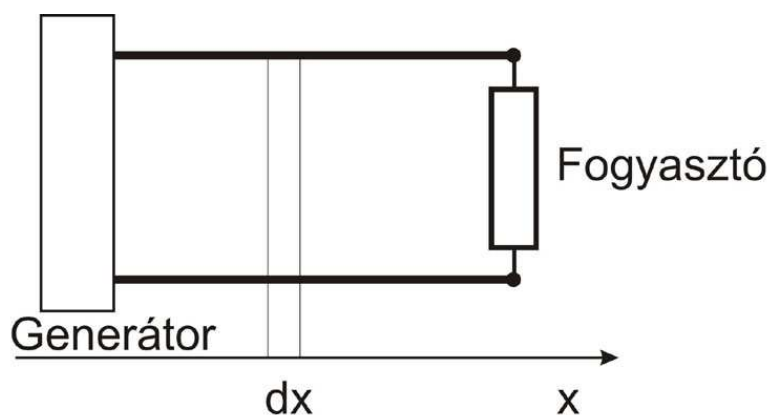

Árnyékolt vezetékpár


Szimmetrikus szalagvonal

7.1. ábra. Néhány gyakran használt távvezeték keresztmetszete

Az eredmények könnyen általánosíthatók többvezetékes távvezetékrendszerekre is.

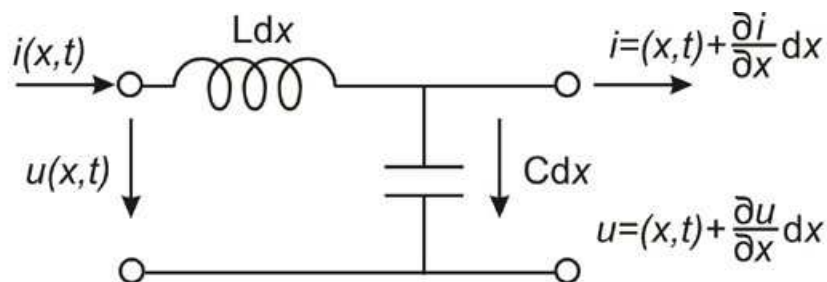
A 7.2. ábrán látható a távvezeték általános elrendezése. A távvezeték egy kicsiny dx hosszúságú szakasza minden irányban olyan kiterjedésű, hogy koncentrált paraméterű rendszernek tekinthető.



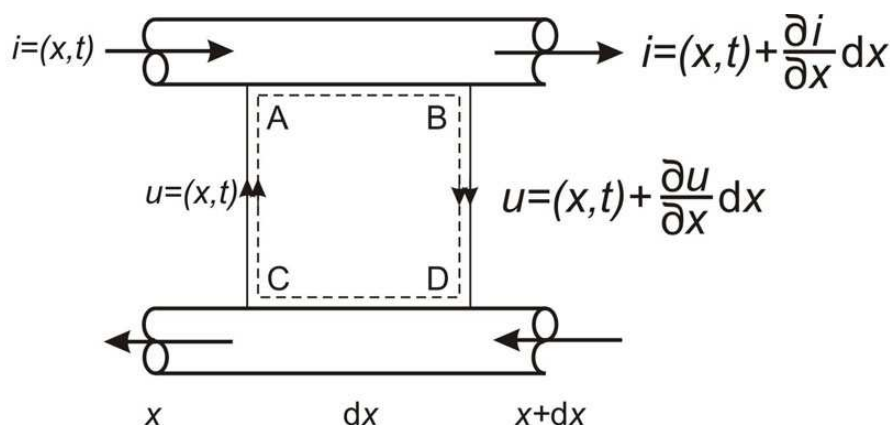
7.2. ábra. Távvezeték általános elrendezése

A keresztmetszetben kialakuló tér megfelel a sztatikus elektromos, illetve stacionárius mágneses térnek, így $\int \mathbf{E} \, dl = u$ és $\oint \mathbf{H} \, dl = i$ minden keresztmetszetben egyértelműen definiálható. Így létjogosultsága van a kapacitás, illetve az induktivitás bevezetésének. Ennek hosszegységre jutó értékét C -vel és L -lel jelölve rövid szakaszunk induktivitása Ldx , kapacitása Cdx .

Ezzel a dx hosszúságú szakasz koncentrált elemű helyettesítő képe megalkotható (7.3. ábra).



7.3. ábra. Távvezeték dx hosszúságú szakaszának helyettesítő képe



7.4. ábra. Az indukciótörvény felírásához

Az első egyenlet az indukciótörvényből kapható. A 7.4. ábrán látható hurokra felírva a törvényt

$$\oint_S \mathbf{E} \, ds = - \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} \, dA . \quad (7.1)$$

A feszültség az AB pontok között $u(x,t)$, de a dx szakaszon megváltozik. A dx -szel arányos változást figyelembe véve a BC pontok között a feszültség $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$. A térerősség vonalintegrálja

$$\oint_S \mathbf{E} \, ds = u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u(x,t), \quad (7.2)$$

mert az AB és CD szakaszokon ideális vezetőkön a tangenciális térerősség zérus.

(7.2)-t (7.1)-gyel összevetve

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -L dx \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + \dots, \quad (7.3)$$

ahol az elhagyott tagok legfeljebb dx^2 nagyságrendűek. (A dx^2 azért jelenik meg, mert az áram is változik a dx szakaszon.)

Rendezve kapjuk, hogy

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (7.4)$$

Az egyenlet állítása: a vezeték mentén a feszültség változását az öninduktivitáson fellépő induktív feszültség okozza.

Az áramerősség a vezeték mentén változik, mert a két vezető henger közötti kapacitáson töltés halmozódik fel. Ez a töltés a dx szakasz $C dx$ kapacitásán

$$q = C dx \cdot u + \dots, \quad (7.5)$$

ahol az elhagyott tagok dx^2 -tel arányosak. Felírva a folytonossági egyenletet a dx hosszúságú szakaszon a felső vezetőt körülvevő zárt felületre

$$i(x, t) + \frac{\partial i}{\partial x} dx - i(x, t) = -\frac{\partial q}{\partial t} = -C dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \dots,$$

ahonnan a

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.6)$$

egyenletre jutunk. Az egyenlet fizikai tartalma nyilvánvaló.

(7.4) és (7.6) az *ideális távvezeték egyenletei*. Az egyenletek a 7.3. ábrán látható hálózatra felírható hurok- és csomóponti egyenletnek felel meg.

(7.4) mindkét oldalát az x helykoordináta szerint deriválva

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial i}{\partial x}$$

és ide $\frac{\partial i}{\partial x}$ értéket (7.4)-ből behelyettesítve a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7.7)$$

egyenlethez jutunk, és hasonló módon az áramra

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (7.8)$$

ugyanazt az egyenletet kapjuk.

Az egyenlet az (egydimenziós) *hullámegyenlet*, amely a fizika számos területén megjelenik. Könnyű belátni, hogy megoldása tetszés szerinti függvény lehet, amelynek változója $\left(t \mp \frac{x}{v}\right)$ alakú, a függvény argumentuma a t és x független változók lineáris kombinációja.

A bizonyításhoz csak a közvetett deriválás szabályát kell ismerni. $\alpha = t \mp \frac{x}{v}$ jelöléssel

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{d\alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{df}{d\alpha} \left(\mp \frac{1}{v}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{d\alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{df}{d\alpha}.$$

Ebből

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mp \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}$$

és ezt a $\frac{\partial f}{\partial x}$ derivált függvényre alkalmazva

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Ezt a (7.8)-cal összevetve beláttuk, hogy a hullám tetszőleges alakú, a pozitív vagy negatív tengely irányába v sebességgel haladó alakzat. Esetünkben

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (7.9)$$

Bizonyítható, hogy ideális vezeték esetén $LC = \varepsilon\mu$, azaz $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Ez a távvezeték kitöltő közegben haladó elektromágneses hullám (fény) sebessége.

Az ideális távvezetéken tehát hullámok terjednek. A (pozitív vagy negatív irányba) haladó hullámok tetszés szerinti alakúak lehetnek.

Figyelem! El kell oszlatnunk azt a tévhitet, hogy a hullám szinuszos alakzat tovaterjedése. Ez onnan ered, hogy a gerjesztés gyakran szinuszos időfüggvény, ekkor szinuszos alakú haladó hullám alakul ki. De ezzel ellentétben elektromos hullámoknál is ismert például az impulzushullám, lökéshullám, stb.

(7.4) és (7.6), valamint a deriválási szabályok felhasználásával kapjuk, hogy

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \pm vC \frac{\partial u}{\partial t} = \pm \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \frac{\partial u}{\partial t},$$

ahol a sebesség (7.9) formuláját is alkalmaztuk. Mindkét oldalt integrálva, az időben állandó tagtól eltekintve (ennek a hullámjelenségek leírásában nincs szerepe)

$$\frac{u}{i} = \pm \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Később látni fogjuk, hogy a pozitív irányba haladó áram és feszültség hullám arányosak egymással és az arányossági tényező

$$\frac{u}{i} = \pm \sqrt{\frac{L}{C}} = \pm Z_0. \quad (7.10)$$

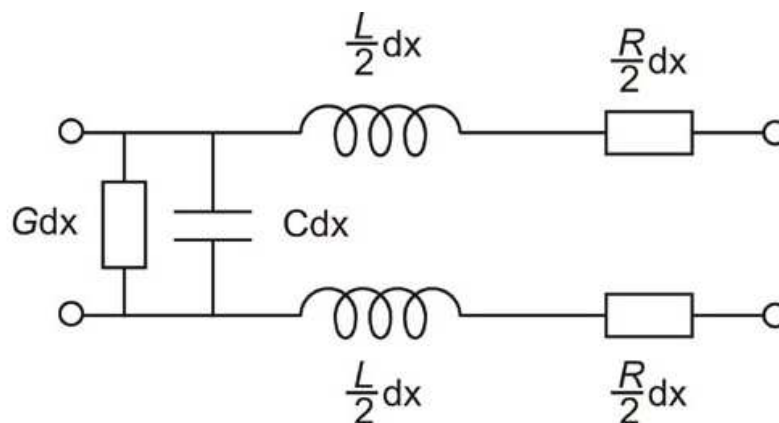
Z_0 a *hullámimpedancia* és a felső előjel a pozitív, az alsó a negatív irányba haladó hullámra érvényes. Ideális vezetéken Z_0 -t hullámellenállásnak nevezzük, mert ellenállás dimenziójú.

Eddig ideális távvezetéseket vizsgáltunk, nem vettük figyelembe a veszteségeket. A veszteségek egyrészt a vezetők véges vezetőképességétől származnak. Ha az ellenállás dx hossz Rdx , a rajta átfolyó áram $iRdx$ feszültségcsökkenést hoz létre.

A veszteség másik okozója a vezetékek közötti dielektrikum véges vezetőképessége (nem tökéletes szigetelő volta) lehet. dx hosszúságon a két vezeték között Gdx vezetést feltételezve a feszültség hatására $uGdx$ áram folyik át a két vezeték között (7.5. ábra). Az R soros fajlagos ellenállás és G párhuzamos fajlagos vezetést a dx szakaszra felírt Kirchhoff-egyenletekben figyelembe véve, azok alakja

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t}, \quad (7.11)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (7.12)$$



7.5. ábra. A dx hosszúságú veszteséges vezeték elem helyettesítő kapcsolása

Ezek a „*távíróegyenletek*”. Hasonlóan az ideális távvezetékhez, felírhatjuk az egy-egy mennyiség tér-idő függésére érvényes veszteséges hullámegyenletet. u -ra kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial u}{\partial t} + RG u, \quad (7.13)$$

és a teljesen hasonló egyenletet i -re

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial i}{\partial t} + RGi. \quad (7.14)$$

Az egyenletek veszteségmentes esetben ($R = 0, G = 0$) átmennek a (7.7) – (7.8) egyenletekbe. Fenti teljes formájukban az ideális egyenletekhez hasonló általános megoldást nem lehet felírni.

Egyetlen kitüntetett esetet ismerünk, ha

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}. \quad (7.15)$$

Az ilyen vezetéknek több különböző elnevezése van: egyenletes veszteségű /torzításmentes/ *Thomson-kábel*.

A vezeték pozitív irányba haladó feszültség hulláma

$$u^+(x, t) = U_0 e^{-\alpha x} f\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad (7.16)$$

alakú, a negatív irányba haladó

$$u^-(x, t) = U_0 e^{-\alpha x} f\left(t + \frac{x}{v}\right), \quad (7.17)$$

ahol $v = 1/\sqrt{LC}$, $\alpha = \sqrt{RG}$.

Látható, hogy az intenzitás (amplitúdó) exponenciálisan csökken a haladás irányában, de bármely pontban a jel időbeli lefutása azonos függvény szerint történik. Igazolható az is, hogy ilyen vezetéken is

$$\frac{u^+}{i^+} = Z_0, \quad \frac{u^-}{i^-} = -Z_0,$$

ahol Z_0 a (7.10) által definiált hullámellenállás.

A terjedési sebesség és a hullámimpedancia tehát megegyezik az ideális vezetékével.

A távíróegyenletek megoldása szinuszos gerjesztés esetén

Miután a távíróegyenletek időtartományban általában nem oldhatók meg, az általános megoldás helyett a szinuszos gerjesztés esetén kialakuló megoldást keressük, éspedig komplex számítási módszerrel. Ennek indoklása a koncentrált paraméterű hálózatok vizsgálatából ismert:

1. A szinuszos gerjesztés komplex számításmódja az időbeli deriválás műveletét egyszerű algebrai műveletbe (szorzás) transzformálja. Így koncentrált paraméterű esetben a megoldandó egyenletek a komplex amplitúdóra vonatkozó algebrai egyenletek lesznek. Esetünkben két független változós, *parciális* differenciálegyenlet. De az idő szerinti deriváltat szorzás helyettesíti. A z változó szerint deriválva *közönséges* differenciálegyenleteket elégít ki a komplex amplitúdó. A megoldás ebben a környezetben elérhető.
2. A gerjesztőjeleknek (áramok, feszültségek) igen általános feltételek mellett létezik *Fourier-transzformáltja*. Ennek általános feltétele a jel véges energiatartalma, annak minden valódi jel eleget kell tennie. A komplex számítástechnikával kapott megoldás lehetővé teszi a gerjesztésre adott válasz Fourier-transzformáltjának meghatározását és – ha szükséges – inverz Fourier-transzformációval a valós időfüggvények meghatározását. Ennek jelentősége a gyors Fourier-transzformációs algoritmusok széles körű elterjedésével hatalmasra nőtt.
Ha a periodikus gerjesztéseket Fourier-sorral írjuk le, valamennyi harmonikus viselkedése a távvezetéseken külön-külön vizsgálható. Miután a harmonikusok frekvenciája adott, a vezeték bármely pontján ugyanolyan periódusidejű harmonikus válasz alakul ki, és annak Fourier-sora a szinuszos gerjesztésre adott válasz ismeretében számítható.
3. A komplex számításmód lehetővé teszi a távvezetéseken kívül más, adott esetben bonyolultabb struktúrájú elosztott paraméterű hálózatok leírását és számítását. Ezek a hálózatok olykor összetett elektromágneses jelenségek egyszerűsített modelljei. A megoldásokat mindig

$$u(x, t) = U(x)e^{j\omega t}, \quad (7.18)$$

$$i(x, t) = I(x)e^{j\omega t} \quad (7.19)$$

alakban keressük. A valós tér-idő függvények a komplex függvények valós részei. Itt $U(x)$ és $I(x)$ a helytől függő komplex amplitúdók. *A következőkben nem jelöljük külön a komplex mennyiségeket* és ezt már $u(x, t)$, $i(x, t)$ esetében is így tettük.

Jegyezzük meg: hullámjelenségek komplex leírásánál *mindig* komplex amplitúdóval számolunk!

Az elmondottak alapján a (7.11) és (7.12) egyenletekből a komplex amplitúdókra az alábbi egyenleteket kapjuk

$$-\frac{dU}{dx} = (R + j\omega L)I = Z_s(j\omega)I, \quad (7.20)$$

$$-\frac{dI}{dx} = (G + j\omega C)U = Y_p(j\omega)U, \quad (7.21)$$

ahol $Z_s(j\omega)$ és $Y_p(j\omega)$ a hosszegységre eső soros impedanciát, illetve párhuzamos admittanciát jelenti.

Egyszerű számítás után kapjuk (7.13) és (7.14) megfelelőit

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \gamma^2 U, \quad (7.22)$$

ahol $\gamma^2 = Z_s Y_p$.

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = \gamma^2 I. \quad (7.23)$$

Miután a két egyenlet formailag azonos, a továbbiakban részletesen csak az U -ra vonatkozó egyenlettel foglalkozunk, $U(z)$ -t határozzuk meg. Ezután *mutatis mutandis* (a változtatókat megváltoztatva) írjuk fel a áramra vonatkozó megoldást.

A (7.22) a legegyszerűbb másodrendű lineáris homogén differenciálegyenlet. Általános megoldását az úgynevezett Euler-módszerrel, exponenciális próbafüggvénnyel keressük.

$$U(x) = e^{\lambda x} \quad (7.24)$$

Behelyettesítve kiderül, hogy ez a függvény akkor megoldás, ha

$$\lambda = \pm \gamma, \quad (7.25)$$

azaz két lineárisan független megoldás létezik (ahogy ez másodrendű közönséges egyenletnél illik), γ elnevezése: *terjedési együttható*. (7.22) teljes megoldása tehát

$$U(x) = U_0^+ e^{-\gamma x} + U_0^- e^{+\gamma x}. \quad (7.26)$$

Az áramra hasonlóan

$$I(x) = I_0^+ e^{-\gamma x} + I_0^- e^{+\gamma x}. \quad (7.27)$$

Az amplitúdók kapcsolatát (7.20) segítségével kapjuk

$$I(x) = -\frac{1}{Z_s} \frac{dU(x)}{dx} = \frac{\gamma}{Z_s} U_0^+ e^{-\gamma x} - \frac{\gamma}{Z_s} U_0^- e^{+\gamma x}, \quad (7.28)$$

ahonnan

$$I(x) = \frac{U_0^+}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{U_0^-}{Z_0} e^{+\gamma x}, \quad (7.29)$$

ahol a *hullámimpedancia*

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z_s}{Y_p}}. \quad (7.30)$$

Értelmezzük a megoldást. Ehhez definiáljuk γ valós, illetve képzetes részét

$$\gamma = \alpha + j\beta. \quad (7.31)$$

Ezzel (7.26) első tagjának tér-idő függése

$$u^+ = U_0^+ e^{j\omega t - (\alpha + j\beta)x} = U_0^+ e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}, \quad (7.32)$$

illetve bevezetve a

$$\frac{\beta}{\omega} = \frac{1}{v} \quad (7.33)$$

jelölést

$$u^+ = U_0^+ e^{-\alpha x} e^{j\omega \left(t - \frac{x}{v} \right)}. \quad (7.34)$$

A legegyszerűbb esetben tételezzük fel, hogy $\alpha = 0$. Ekkor megoldásunk a $\left(t - \frac{x}{v} \right)$ függvénye,

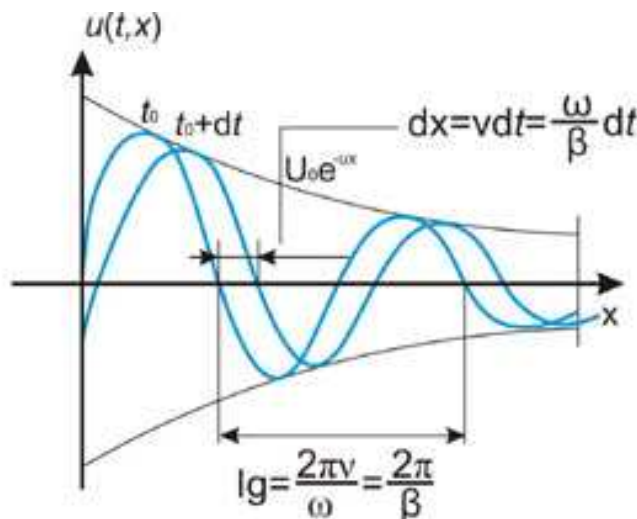
amiről már beláttuk, hogy a pozitív x tengely irányába v sebességgel terjedő hullámot ír le. Esetünkben β és így v is a frekvencia függvénye, de egy adott frekvencián állandó.

Következtetés: a szinuszos gerjesztés esetén minden ω frekvenciájú szinuszos gerjesztéshez egy állandó sebességgel terjedő szinuszos hullám tartozik.

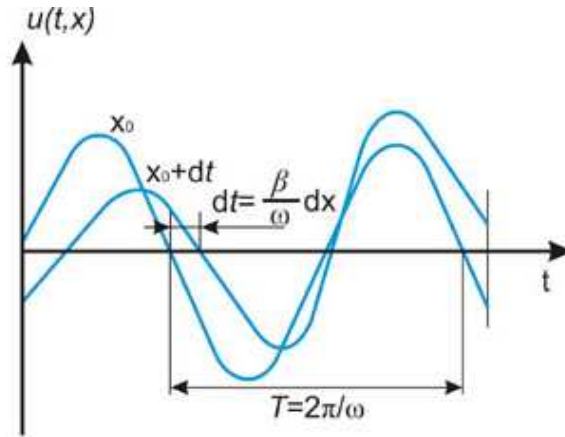
A $v(\omega)$ mennyiség azt mutatja meg, hogy a szinuszos hullám bármely tetszés szerinti fázisa (például nullátmenete vagy maximuma) milyen sebességgel terjed. Ezért neve *fázissebesség*.

Ha meg akarjuk különböztetni, jelölése: v_f . $\beta(\omega) = \frac{\omega}{v(\omega)}$ a *fázistényező*.

Most már α jelentése is értelmezhető. A terjedés irányában az amplitúdó exponenciálisan csillapodik. Ennek a mértékét adja meg az α csillapítási tényező. A feszültség ennek megfelelően a hely, illetve idő függvényében a 7.6. és 7.7. ábrákon látható. Fontos: a valós időfüggvény a komplex függvény valós része.



7.6. ábra. A feszültség változása a vezeték mentén két egymáshoz közel eső pontban



7.7. ábra. A feszültség változása a vezeték két egymáshoz közel eső helyén

Jegyezzük meg: az egy frekvenciájú (monokromatikus), tiszta szinuszos hullám terjedése torzításmentes, csupán az amplitúdója más és más a vezeték különböző helyein.

γ másik előjelének értelmezése

$$u^- = U_0^- e^{+\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)} = U_0^- e^{+\alpha x} e^{j\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)}. \quad (7.35)$$

A tér-idő függvény negatív irányba haladó és a *haladás irányában* csökkenő amplitúdójú szinuszos hullámot ír le, akkor is, ha pozitív az előjel az exponenciális függvény kitevőjében!

Szinuszos hullámoknál fel lehet tenni a kérdést: mekkora utat tesz meg a hullám bármelyik fázisa egy periódusidő alatt. Ez a távolság a hullámhossz, és λ_g -vel jelöljük. (A g index a „guided wave” = vezetett hullám kifejezésre utal.)

Meghatározása az

$$e^{j\omega\frac{x+\lambda_g}{v}} = e^{j\omega\frac{x}{v} + 2\pi} \quad (7.36)$$

egyenlőségből adódik

$$\lambda_g = \frac{2\pi v_f}{\omega} = \frac{2\pi}{\beta} \quad (7.37)$$

λ (index nélkül) a szabadtéri hullámhossz

$$\lambda = \frac{c}{f}, \quad (7.38)$$

ahol c a szabadtéri fénysebesség. A *szabadtéri hullámhossz* a frekvenciával azonos értékű jellemzője a jelenségnek.

A feszültség általános kifejezése

$$u(x, t) = u^+ + u^- = U_0^+ e^{j\omega t - \gamma x} + U_0^- e^{j\omega t + \gamma x} \quad (7.39)$$

(7.29) felhasználásával az áram

$$i(x, t) = i^+ + i^- = \frac{U_0^+}{Z_0} e^{j\omega t - \gamma x} - \frac{U_0^-}{Z_0} e^{j\omega t + \gamma x} \quad (7.40)$$

Ismételjük: a valós tér-idő függvényeket a fenti komplex függvények valós részeként értelmezzük.

Az eddigiek teljes általánosságban érvényesek. $Z_s(j\omega)$ és $Y_p(j\omega)$ elvben tetszés szerinti immittanciafüggvények lehetnek. A gyakorlatban általában koncentrált paraméterű hálózatok jellemzői, így $j\omega$ racionális függvényei.

Ez a helyzet az általunk vizsgált R-L-G-C távvezetékek esetén is. Részletesebben a vezetékek tulajdonságai a következők.

Esetünkben

$$Z_s(j\omega) = R + j\omega L, \quad (7.41a)$$

$$Y_p(j\omega) = G + j\omega C, \quad (7.41b)$$

és ezért

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}. \quad (7.42)$$

α és β meghatározásához először emeljük négyzetre mindkét oldalt

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta = (R + j\omega L)(G + j\omega C), \quad (7.43)$$

ahonnan

$$\alpha^2 - \beta^2 = RG - \omega^2 LC, \quad (7.44)$$

$$2\alpha\beta = \omega(RC + LG). \quad (7.45)$$

Ezután határozzuk meg (7.42) mindkét oldalának abszolút értékét

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}, \quad (7.46)$$

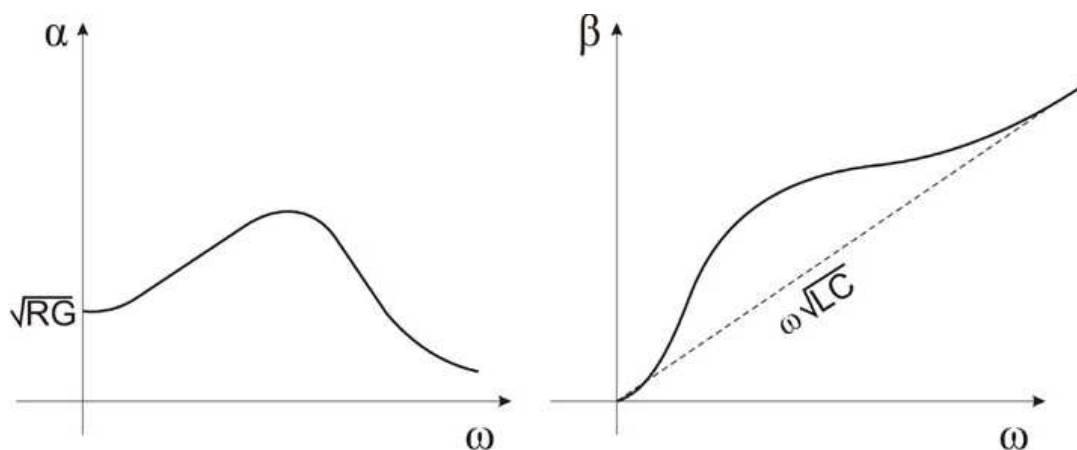
(7.46) és (7.44) különbségéből, majd összegéből

$$\beta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\omega^2 LC - RG) + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}}, \quad (7.47)$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(RG - \omega^2 LC) + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}}. \quad (7.48)$$

Az előjelek párosításában a (7.45) egyenlet segít. Innen látszik, hogy α és β azonos előjelűek (vagy $\alpha = 0$), tehát a terjedés irányában csökkenő amplitúdójú hullámokat kapunk megoldásként.

Belátható, hogy $\omega \rightarrow \infty$ esetén $\beta \rightarrow \omega\sqrt{LC}$, míg $\alpha \rightarrow 0$. A csillapításnak a paraméterektől függően véges frekvenciaértéknél maximuma van (7.8. ábra).

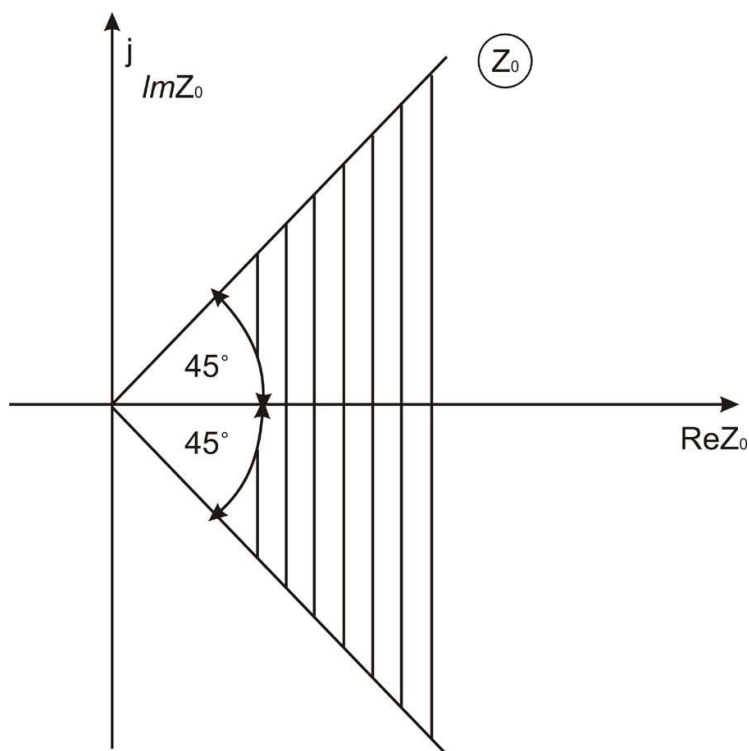


7.8. ábra. A csillapítás- és fázistényező a frekvencia függvényében

A hullámimpedancia

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}, \quad (7.49)$$

ahonnan látszik, hogy a koncentrált paraméterű impedanciákkal ellentétben Z_0 nem racionális függvénye $j\omega$ -nak. Ezt az is mutatja, hogy fázisa $-\pi/4$ és $+\pi/4$ között változhat, ellentétben a racionális függvények $[-\pi/2 ; +\pi/2]$ intervallumával (7.9. ábra)



7.9. ábra. Z_0 a komplex számsíkon

A Z_s és Y_p a távvezeték *primér paraméterei*, γ és Z_0 *szekunder paraméterek*. Megállapítható, hogy racionális primér paraméterek esetén sem kapunk racionális szekunder paramétereket.

Speciális távvezetékek

Ideális vezeték

$R = 0$, $G = 0$ esetén a vezeték veszteségmentes. Tulajdonságait általánosan is vizsgáltuk. Szinuszos gerjesztésnél

$$\alpha = 0, \quad (7.50)$$

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}, \quad (7.51)$$

ahonnan

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (7.52)$$

Valamennyi frekvencián azonos fázissebességet csak akkor kapunk, ha β arányos ω -val. A terjedés neve: *diszperziómentes*. A *diszperzió* hullámterjedés esetén a frekvenciafüggő fázissebességet jelenti. Ekkor a jel különböző frekvenciájú komponensei különböző fázissebességgel terjednek, ezért a jel a terjedés során torzul.

Az ideális vezetéken szinuszos gerjesztés esetén is az ismert

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (7.53)$$

eredményt kapjuk a hullámimpedanciára: frekvenciafüggetlen és valós mennyiség.

Kis csillapítású vezeték

Ha a vezeték veszteségei kicsik, az ideális vezeték a zérusrendű közelítés. A most következők kis veszteség elsőrendű közelítései.

Legyen

$\omega L \gg R$ és $\omega C \gg G$, azaz

$$\omega \gg \max\left(\frac{R}{L}, \frac{G}{C}\right). \quad (7.54)$$

Növekvő frekvenciával a csillapítás egyre jobban elhanyagolható. Elegendően nagy frekvencián valamennyi távvezeték kis csillapítású.

A terjedési együttható

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} \sqrt{1 - j\frac{R}{\omega L}} \sqrt{1 - j\frac{G}{\omega C}}, \quad (7.55)$$

ahol a jobb oldal két utolsó tényezőjét sorba fejtjük a

$$\sqrt{1-a} \cong 1 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a^2 \quad (7.56)$$

binomális sor harmadik tagjáig. Ezzel

$$\gamma \cong j\omega\sqrt{LC} \left[1 - \frac{j}{\omega} \left(\frac{R}{2L} + \frac{G}{2C} \right) + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 \right]. \quad (7.57)$$

Ebből a fázistényező

$$\beta \cong \omega\sqrt{LC} \left[1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 \right], \quad (7.58)$$

míg

$$\alpha \cong \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (7.59)$$

Látható, hogy elsőrendű közelítésben is a fázistényező az ideális távvezeték fázistényezőjével közelíthető, míg ugyanebben a közelítésben a csillapítási tényező frekvenciafüggetlen.

A hullámimpedancia

$$Z_0 \cong \sqrt{\frac{L}{C}} \left[1 - j \frac{1}{2\omega} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right) \right]. \quad (7.60)$$

Torzításmentes vezeték

A vezeték típusról az általános időfüggés során már volt szó. Tulajdonságai szinuszos gerjesztés esetén is azonosak az általános tulajdonságokkal, azaz

$$\beta = \omega\sqrt{LC}, \quad (7.61)$$

$$\alpha = \sqrt{RG}, \quad (7.62)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (7.63)$$

Fázis- és csoportsebesség

Az előzőekben monokromatikus (egy frekvenciával jellemezhető) szinuszos gerjesztést vizsgáltunk. Az általános jelek több frekvenciát tartalmaznak, ezért terjedési sebességeik diszperzió esetén nem írhatók le egyetlen fázissebességgel.

Vizsgáljunk egy olyan esetet, amikor a gerjesztőjel két eltérő frekvenciát (ω_1 és ω_2) tartalmaz. Ekkor a két fázistényező β_1 és β_2 . A csillapítás hatását nem vizsgáljuk.

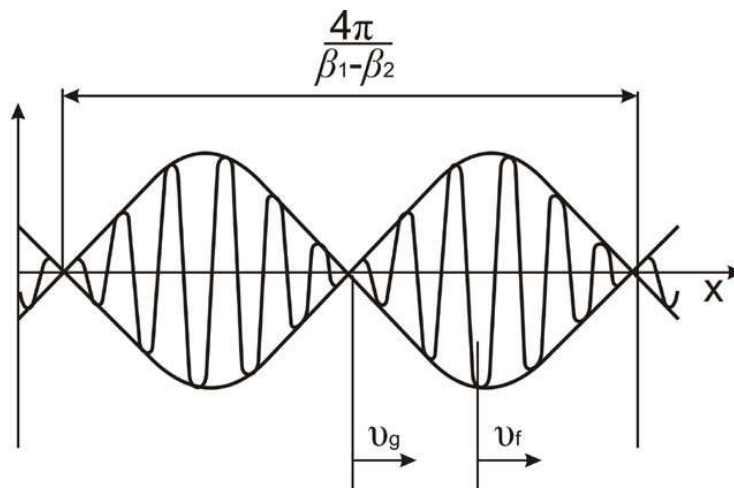
A vezeték mentén mérhető valós feszültség

$$u(t, x) = U_m [\cos(\omega_1 t - \beta_1 x) + \cos(\omega_2 t - \beta_2 x)], \quad (7.64)$$

ami ismert trigonometriai azonosságok felhasználásával

$$u(t, x) = 2U_m \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}x\right) \quad (7.65)$$

alakba írható. Ez a jel a $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ frekvenciájú vivőhullám, amelyet a $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ frekvenciájú burkoló modulál (7.10. ábra).



7.10. ábra. A fázis- és csoportsebesség magyarázatához

A vivőhullám terjedési sebességét a

$$v_f = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\beta_1 + \beta_2} \quad (7.66)$$

fázissebesség adja meg. A burkoló haladásának sebessége ettől eltér

$$v_{cs} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\beta_1 - \beta_2}. \quad (7.67)$$

A burkoló v_{cs} haladási sebességét *csoportsebességnek* nevezzük. Mivel az információt a burkoló szállítja, az információátvitel sebessége *nem* a fázissebesség, hanem a csoportsebesség.

A csoportsebességet keskeny sávzélességű moduláció (és elhanyagolható veszteség) esetén lehet értelmezni. Ekkor $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ határesetben a fázissebesség

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \quad (7.68)$$

és a csoportsebesség

$$v_{cs} = \frac{d\omega}{d\beta} = \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1}. \quad (7.69)$$

Mindkét kifejezést a vivőfrekvencián kell értékelni.

Diszperzív esetben $v_{cs} \neq v_f$. A csoportsebességet gyakran a jelben terjedő energia terjedési sebességével azonosítják. Ez veszteségmentes közegekben igaz, ekkor értéke nem múlhatja felül a fénysebességet. A fázissebesség úgynevezett „kinematikai” jellemző, erre nincsen hasonló megkötésünk.

Beláthatjuk, hogy a csoportsebesség a terjedés során kevésbé torzuló jelalak esetén a jel „súlypontjának” (időbeli középpontjának) terjedési sebessége. Definíciószerűen

$$t_{sp} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt}. \quad (7.70)$$

A Fourier-transzformáció szabályai közül ismert, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = F(0), \quad (7.71)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = j \frac{dF(j\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=0}, \quad (7.72)$$

ahol

$$\frac{dF(j\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} [F(\omega)e^{j\varphi(\omega)}] = \left[\frac{dF(\omega)}{d\omega} + j \frac{d\varphi}{d\omega} F(\omega) \right] e^{j\varphi(\omega)}, \quad (7.73)$$

ahol $F(\omega)$ páros voltát felhasználva $dF(\omega)/d\omega|_{\omega=0} = 0$ és (7.70)-be helyettesítve

$$t_{sp} = - \frac{d\varphi}{d\omega} \Big|_{\omega=0}. \quad (7.74)$$

A pozitív irányba haladó hullám gerjesztése a távvezeték bemenetén

$$u^+(t,0) = f(t) \quad (7.75)$$

és Fourier-transzformáltja

$$U^+(\omega, 0) = \mathcal{F} f(t) = F(j\omega). \quad (7.76)$$

Ekkor a terjedő jel Fourier-traszformáltja

$$U^+(\omega, x) = F(j\omega)e^{-\gamma x} = F(\omega)e^{-\alpha x} e^{j[\varphi(\omega) - \beta x]}. \quad (7.77)$$

Hanyagoljuk el a csillapítást ($\alpha \cong 0$). Ekkor a jel súlypontja a vezeték x koordinátájú pontjában

$$t_{\text{sp}}(x) = -\frac{\partial}{\partial \omega} [\varphi(\omega) - \beta x]_{\omega=0} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} + \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} \cdot x, \quad (7.78)$$

ahonnan

$$t_{\text{sp}}(x) = t_{\text{sp}}(0) + \frac{x}{v_{\text{cs}}}, \quad (7.79)$$

ahol $v_{\text{cs}} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega=0}^{-1}$.

Ha $f(t)$ szinuszos jel burkolója, akkor

$$u^+(t, 0) = f(t)e^{j\Omega t},$$

ahonnan

$$U^+(\omega, 0) = F[j(\omega - \Omega)]. \quad (7.80)$$

Ha a moduláló $f(t)$ jel eléggé keskeny, akkor spektruma széles és mindenütt lassan változik. Ekkor továbbra is igen jó közelítéssel a burkoló súlypontjának terjedési sebességére (7.79) érvényes, de most

$$v_{\text{cs}} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega=\Omega}^{-1}. \quad (7.81)$$

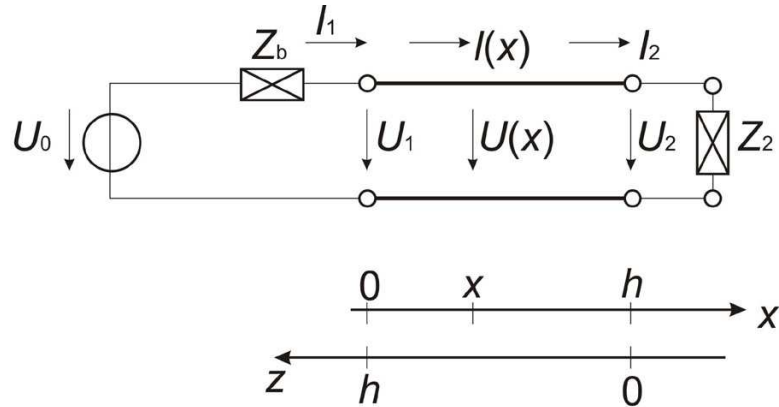
Nem alkalmazható a csoportsebesség ilyen értelmezése, ha a távvezeték erősen veszteséges. Ekkor közelítőleg sem igaz, hogy $f(t)$ alakja kevésbé változik, és így a megfontolások érvényüket veszítik.

Lezárt távvezeték

Eddig a képzeletben végtelen hosszú távvezetéken terjedő hullámokat vizsgáltuk. Megállapítottuk, hogy két egymástól független, egymással szembe haladó csillapított hullám alakulhat ki a vezetéken. Nem foglalkoztunk a véges hosszúságú távvezetékkel, a távvezeték végének lezárásával és az így kialakuló jelenségekkel.

A véges hosszúságú távvezeték *eleje* az a lezárás, ahol a gerjesztőforrás van, és a *vége* passzív kétpólussal van lezárva. (Ha valaki mindkét végén gerjeszteni kívánja a véges hosszúságú távvezetékét, eredményeinket felhasználva egyszerű szuperpozícióval vizsgálhatja azt.)

A vizsgált távvezeték hosszát h -val jelöljük. A többi jelölés a 7.11. ábra szerinti.



7.11. ábra. Lezárt távvezeték

A vezeték mentén mérhető feszültség és áram

$$U(x) = U_1^+ e^{-\gamma x} + U_1^- e^{+\gamma x}, \quad (7.82)$$

$$I(x) = \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{+\gamma x}. \quad (7.83)$$

A lezárt vezeték bármely pontjában egykapu (kétpólus), amelynek áramát és feszültségét a fenti összefüggések adják meg. Ezek a mennyiségek a vezetéken a helytől függő impedanciát is definiálják.

$$Z(x) = \frac{U(x)}{I(x)} = Z_0 \frac{U_1^+ e^{-\gamma x} + U_1^- e^{+\gamma x}}{U_1^+ e^{-\gamma x} - U_1^- e^{+\gamma x}}. \quad (7.84)$$

A vezeték végén mért értékek

$$U_2 = U(h) = U_1^+ e^{-\gamma h} + U_1^- e^{+\gamma h} = U_2^+ + U_2^-, \quad (7.85)$$

$$I_2 = I(h) = \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma h} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{+\gamma h} = \frac{U_2^+}{Z_0} - \frac{U_2^-}{Z_0}, \quad (7.86)$$

és

$$Z(h) = Z_0 \frac{U_2^+ + U_2^-}{U_2^+ - U_2^-} = Z_2. \quad (7.87)$$

A távvezetéseken a helyet szívesebben mérjük visszafelé a lezárástól. Ennek oka, hogy a távvezetéseken lejátszódó jelenségek alapvetően a lezárás jellegétől függenek. Az ábrán feltüntettük a lezárástól mért $z = h - x$ koordinátákat is. Ezzel (7.85)-(7.86) jelöléseit használva

$$U(z) = U_2^+ e^{+z} + U_2^- e^{-z}, \quad (7.88)$$

$$I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0} e^{+z} - \frac{U_2^-}{Z_0} e^{-z}. \quad (7.89)$$

Figyeljük meg: a helykoordináták formálisan előjelet váltanak a képletekben. A pozitív irány megállapodás kérdése.

A pozitív koordináta irányát mi jelöljük ki, az áram pozitív irányának kijelölésével. A választott feszültség- és áramirányok mindenütt a jobb oldali impedanciához tartoznak, ez különösen jól látszik a lezáráson.

Az impedancia helyfüggése

$$Z(z) = \frac{U(z)}{I(z)} = \frac{U_2^+ e^{+z} + U_2^- e^{-z}}{\frac{U_2^+}{Z_0} e^{+z} - \frac{U_2^-}{Z_0} e^{-z}}, \quad (7.90)$$

ami kis átalakítással

$$Z(z) = Z_0 \frac{1 + \frac{U_2^-}{U_2^+} e^{-2z}}{1 - \frac{U_2^-}{U_2^+} e^{-2z}} = Z_0 \frac{1 + r(z)}{1 - r(z)}, \quad (7.91)$$

ahol bevezettük a z helyen fellépő r reflexiós tényezőt.

$$r(z) = \frac{U_2^-}{U_2^+} e^{-2z} = \frac{U^-(z)}{U^+(z)}, \quad (7.92)$$

ami nyilvánvalóan a negatív és a pozitív irányba haladó feszültség hullám komplex amplitúdójának hányadosa.

A reflexiótényező szerepe a távvezetéseken (sőt általában a hullámterjedésnél) alapvető, talán az impedanciánál is fontosabb. Szerencsére az impedancia és a reflexiótényező kölcsönösen meghatározzák egymást. A vezeték bármely pontján

$$Z = Z_0 \frac{1 + r}{1 - r}, \quad (7.93)$$

$$r = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}. \quad (7.94)$$

A lezáráson

$$r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}. \quad (7.95)$$

Ezzel a vezetéken kialakuló feszültség és áram

$$U(z) = U_2^+ (e^{+\gamma z} + r_2 e^{-\gamma z}), \quad (7.96)$$

$$I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{+\gamma z} - r_2 e^{-\gamma z}). \quad (7.97)$$

A vezeték mentén kialakuló feszültség és áram leírásának másik kedvelt formája hiperbolikus függvényeket tartalmaz.

Itt felhasználjuk az

$$e^{+\gamma z} = \operatorname{ch} \gamma z + \operatorname{sh} \gamma z, \quad e^{-\gamma z} = \operatorname{ch} \gamma z - \operatorname{sh} \gamma z \text{ összefüggéseket.}$$

Ezzel

$$U(z) = U_2^+ [(1 + r_2) \operatorname{ch} \gamma z + (1 - r_2) \operatorname{sh} \gamma z] \quad (7.98)$$

és

$$I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0} [(1 - r_2) \operatorname{ch} \gamma z + (1 + r_2) \operatorname{sh} \gamma z]. \quad (7.99)$$

Ha a lezárás teljes feszültségével akarjuk inkább kifejezni az amplitúdót, mintsem a pozitív irányba haladó hullám amplitúdójával a lezáráson, használjuk a (7.96)-ból következő

$$U_2 = U_2^+ (1 + r_2) \quad (7.100)$$

összefüggést. Ezzel

$$U(z) = U_2 \left(\operatorname{ch} \gamma z + \frac{1 - r_2}{1 + r_2} \operatorname{sh} \gamma z \right), \quad (7.101)$$

míg

$$I(z) = \frac{U_2}{Z_0} \left(\frac{1 - r_2}{1 + r_2} \operatorname{ch} \gamma z + \operatorname{sh} \gamma z \right). \quad (7.102)$$

Figyelembe véve, hogy (7.93) alapján

$$\frac{1 - r_2}{1 + r_2} = \frac{Z_0}{Z_2} \quad (7.103)$$

és a lezáráson $Z_2 = U_2 / I_2$, azt kapjuk, hogy a vezeték mentén a feszültség és áram értéke

$$U(z) = U_2 \operatorname{ch} \gamma z + Z_0 I_2 \operatorname{sh} \gamma z, \quad (7.104)$$

$$I(z) = I_2 \operatorname{ch} \gamma z + \frac{U_2}{Z_0} \operatorname{sh} \gamma z. \quad (7.105)$$

A h hosszúságú vezeték alkotta kétkapu lánckarakterisztikája $z = h$, $U(h) = U_1$, $I(h) = I_1$ helyettesítésekkel

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma h & Z_0 \operatorname{sh} \gamma h \\ \frac{\operatorname{sh} \gamma h}{Z_0} & \operatorname{ch} \gamma h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (7.106)$$

Ebből a h hosszúságú távvezeték szakasz, mint kétkapu valamennyi kétkapuparamétere előállítható. A kétkapu

$$A_{11} = A_{22} \quad (7.107)$$

alapján *szimmetrikus*, és

$$\Delta A = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = 1 \quad (7.108)$$

alapján *reciprok*.

(7.106) alapján a *bemeneti impedancia* a távvezetéken

$$Z_{\text{be}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \operatorname{ch} \gamma h + I_2 Z_0 \operatorname{sh} \gamma h}{\frac{U_2}{Z_0} \operatorname{sh} \gamma h + I_2 \operatorname{ch} \gamma h}, \quad (7.109)$$

ahonnan némi rendezéssel és $Z_2 = U_2 / I_2$ behelyettesítésével

$$Z_{\text{be}} = Z_0 \frac{Z_2 \operatorname{ch} \gamma h + Z_0 \operatorname{sh} \gamma h}{Z_0 \operatorname{ch} \gamma h + Z_2 \operatorname{sh} \gamma h}. \quad (7.110)$$

A távvezeték szakasz tehát impedanciáttranszformációt végez.

A bemeneti generátor a $Z_{\text{be}} = Z_1$ impedanciát „látja”. Ezért

$$I_1 = \frac{U_0}{Z_1 + Z_{\text{b}}}, \quad U_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_{\text{b}}} U_0. \quad (7.111)-(7.112)$$

Különleges lezárások

Hullámimpedancia

$$Z_2 = Z_0$$

Ezt koncentrált paraméterű lezáróimpedanciával csak egy frekvencián tudjuk megvalósítani. Ilyen esetben

$$Z_{\text{be}} = Z_0. \quad (7.113)$$

A hullámimpedanciával lezárt távvezeték bemeneti impedanciája is a hullámimpedancia. Ilyenkor a vezetéken nincs reflexió, csak pozitív irányba haladó hullámunk van. A jelenség a lezárás a vezetékhez *illesztett*. Néha hullámillesztésről vagy reflexiómentes illesztésről beszélünk, megkülönböztetésül az ún. teljesítményillesztéstől.

Megjegyzések:

1. A jelenség fizikai magyarázata nyilvánvaló. A vezeték számára a hullámimpedanciával történő lezárás és egy végtelen hosszú azonos vezetékkel történő lezárás között nincsen különbség. A terjedő hullám számára a feltételek mindkét esetben azonosak. Ezért nem lép fel reflexió.
2. A távvezeték analógiájára valamennyi szimmetrikus kétkapunál definiálhatjuk a hullámimpedanciát, ha a bemeneti impedancia megegyezik a lezáróimpedanciával, ez a hullámimpedancia.

Rövidzár

$$Z_2 = 0, Z_{\text{ber}} = Z_0 \operatorname{th} \gamma h. \quad (7.114)$$

Szakadás

$$Z_2 \rightarrow \infty, Z_{\text{besz}} = Z_0 \operatorname{cth} \gamma h. \quad (7.115)$$

A két speciális lezárás lehetőséget ad a vezeték szekunder paramétereinek meghatározására

$$Z_0 = \sqrt{Z_{\text{ber}} Z_{\text{besz}}}, \quad (7.116)$$

$$\gamma h = \operatorname{arth} \sqrt{\frac{Z_{\text{ber}}}{Z_{\text{besz}}}}. \quad (7.117)$$

Ideális vezetékszakasz

Ideális vezetéken a jelenségek sokkal áttekinthetőbbek. Miután $\alpha = 0$, $\gamma = j\beta = j\frac{2\pi}{\lambda_g}$, a haladóhullámok csillapításmentesek.

A legfontosabb, minőségileg új jelenség, hogy a reflexiós tényező amplitúdója a vezeték mentén állandó, lásd a (7.92) egyenletet!

$$r(z) = r_2 e^{-j\beta z}. \quad (7.118)$$

Ez a vektor az óramutató járásának megfelelő irányba forog (változatlan abszolút értékkel), ha a vezetéken a lezárás irányából a gerjesztés irányába haladunk. A forgó vektor $z = \frac{\lambda_g}{2}$ távolság megtételekor, azaz félhullám hosszúságú távolságonként ugyanazt az értéket veszi fel. A vezetéken kialakuló áram, illetve feszültség

$$U(z) = U_2^+ (e^{+j\beta z} + r_2 e^{-j\beta z}), \quad (7.119)$$

$$I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{+j\beta z} - r_2 e^{-j\beta z}) \quad (7.120)$$

hullámhossznyi periodicitású a vezeték mentén.
A normalizált feszültség komplex vektora

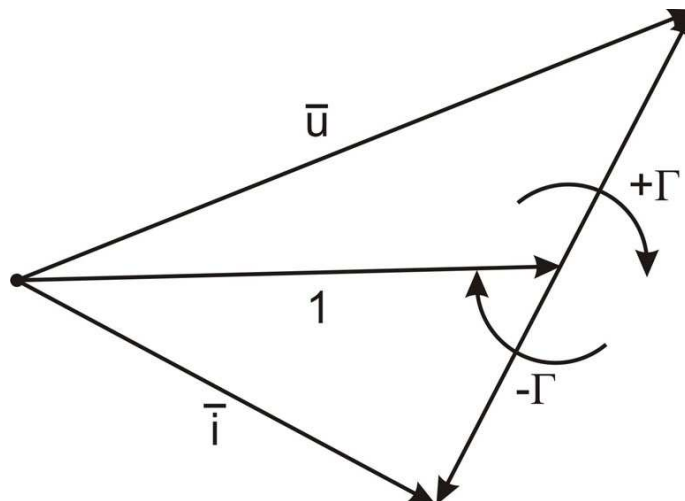
$$\bar{u} = \frac{U(z)}{U_2^+ e^{j\beta z}} = 1 + r_2 e^{-j2\beta z} = 1 + \Gamma(z), \quad (7.121)$$

illetve az áram normalizált alakja

$$\bar{i} = \frac{I(z)}{U_2^+ e^{j\beta z} / Z_0} = 1 - r_2 e^{-j2\beta z} = 1 - \Gamma(z). \quad (7.122)$$

A szakasz további részében a reflexió tényezőt Γ -val jelöljük, megkülönböztetendő a normalizált ellenállástól.

A normalizált feszültség- és áramértékek a 7.12. ábrán láthatók, ahol a vezetéken félhullám hosszúságú távolságot megtéve a reflexió komplex vektora egy teljes fordulatot tesz meg.



7.12. ábra. Normál feszültség és áram

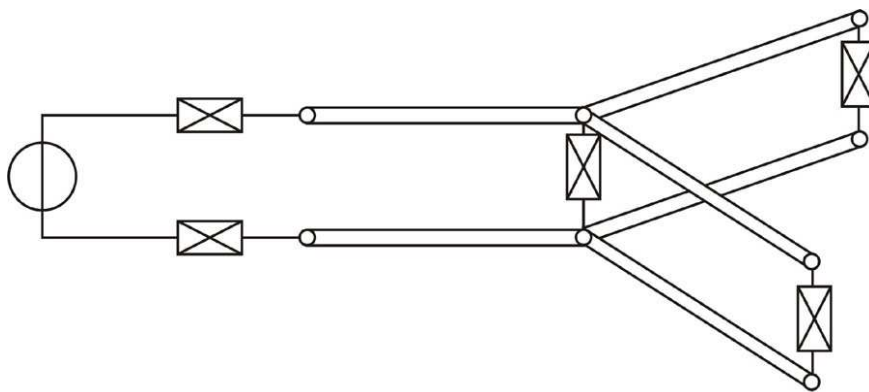
Az impedancia a vezeték mentén (7.110)-nek megfelelően

azaz a lezáró- és a bemeneti impedancia mértani közepe a hullámellenállás. Valós lezárás esetén valós impedanciát kapunk negyedhullám hosszúságra. Ezt az impedanciatranszformációt a későbbiekben felhasználjuk.

Összetett vezeték-hálózatok

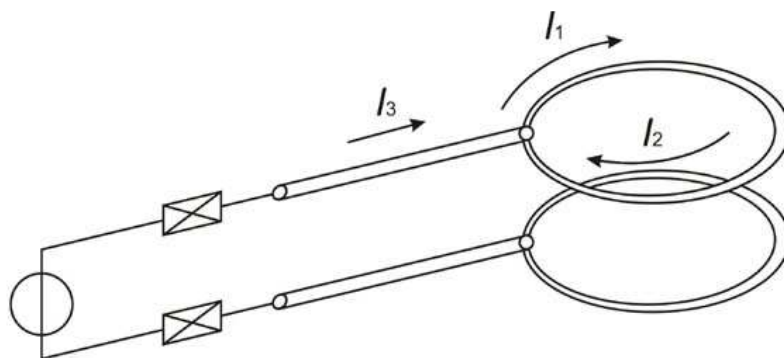
Távvezetésekből kétkapukként összetett hálózatok építhetők fel. A hálózatok csak kapuk összekötésével létesíthetők.

Amennyiben a hálózatban nincsenek távvezetésekből kialakított hurkok (7.14. ábra), akkor a vezetékek lezáróimpedanciájából a bezáróimpedanciát számítva soros és paralel kapcsolás számításával jutunk a bemenetig, a generátor kapujáig. Több generátor esetén az eljárás egy-egy generátort a hálózatba helyezve szuperpozíciós eljárással végezhető el.



7.14. ábra. Távvezeték-hálózat

Ha a hálózat távvezetésekből (adott esetben akár egy távvezetékből is (7.15. ábra) álló hurkot tartalmaz, a kapukon a csomóponti egyenleteket és a hurokegyenleteket fel kell írni, és ezekhez hozzá kell venni a távvezeték hálózati paramétereit, például a láncmátrixot. Az így kapott egyenletrendszerről bebizonyítható, hogy konzisztens, mindig van megoldása.



7.15. ábra. Hurkot tartalmazó távvezeték-hálózat

Ideális vezeték speciális lezárással

Hullámimpedancia

$$Z_2 = Z_0, r_2 = 0, Z_1 = Z_0. \quad (7.127)$$

Rövidzár

$$Z_2 = 0, r_2 = -1, Z_1 = Z_{\text{ber}} = jZ_0 \operatorname{tg} \beta h. \quad (7.128a)$$

Szakadás

$$Z_2 \rightarrow \infty, r_2 \rightarrow +1, Z_1 = Z_{\text{besz}} = -jZ_0 \operatorname{ctg} \beta h. \quad (7.128b)$$

A (7.127) és (7.128) ismét lehetővé teszi a szekunder paraméterek meghatározását

$$Z_0 = \sqrt{Z_{\text{ber}} Z_{\text{besz}}}, \operatorname{tg} \beta h = \sqrt{-\frac{Z_{\text{ber}}}{Z_{\text{besz}}}}. \quad (7.129), (7.130)$$

A (7.128a, b) esetben külön is érdemes foglalkozni a vezetéken kialakuló hullámmal. Rövidzárral történő lezárás esetén $r_2 = -1$. A (7.119) és (7.120)-ból

$$U(z) = U_2^+ (e^{+j\beta z} - e^{-j\beta z}) = 2jU_2^+ \sin \beta z, \quad (7.131)$$

$$I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{+j\beta z} + e^{-j\beta z}) = 2 \frac{U_2^+}{Z_0} \cos \beta z. \quad (7.132)$$

A fenti kifejezések abszolút értékei az amplitúdó eloszlását mutatják. A valós időfüggvény a következő

$$u(z, t) = \Re 2jU_2^+ \sin \beta z e^{j\omega t} = 2U_2^+ \sin \beta z \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (7.133a)$$

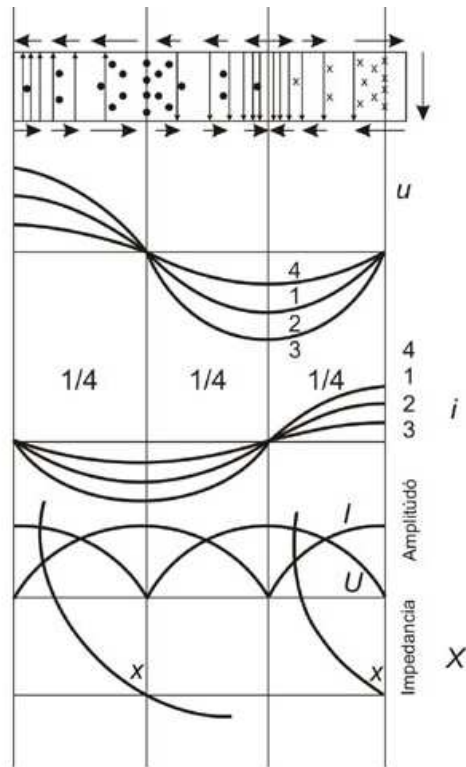
$$i(z, t) = \Re 2 \frac{U_2^+}{Z_0} \cos \beta z e^{j\omega t} = 2 \frac{U_2^+}{Z_0} \cos \beta z \cos(\omega t). \quad (7.133b)$$

Az első szembetűnő jelenség: nincs többé haladóhullám. Az időben szinuszosan változó feszültségek és áramok amplitúdója a helytől függ, éspedig szinuszfüggvény szerint. Mindkét amplitúdónak nullahelyei vannak egymástól félhullámnyi távolságban. Ezek a *csomópontok*.

A második észrevétel: az áram- és feszültségamplitúdók helyfüggvénye negyedhullám hosszúsággal el van tolva egymáshoz képest, tehát ahol az egyiknek csomópontja van, a másiknak maximális kitérése. Ugyanekkor a feszültség és áram időben is eltoltak negyedperiódussal: amikor az egyik mennyiség mindenütt eléri a maximumot, a másik mindenütt éppen zérus és fordítva.

Negyedperiódus $\left(\frac{\pi}{2} \right)$ fáziskéséssel az impedancia éppen tiszta reaktancia lesz. Ezt már korábban is láttuk a (7.128a) kifejezésben.

A viszonyokat a 7.16. ábra szemlélteti.



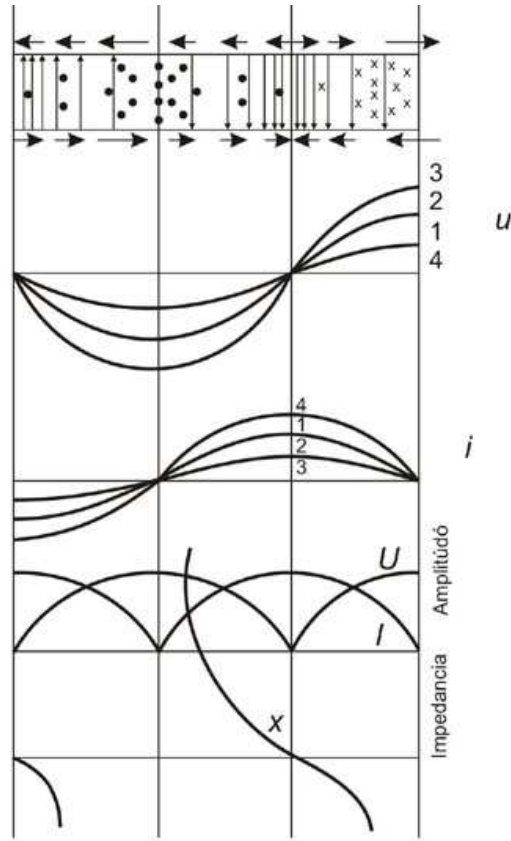
7.16. ábra. Rövidzárral lezárt távvezeték áram- és feszültségviszonya

Szakadással lezárt vezetéken $r_2 = 1$, ezért

$$u(z) = 2U_2^+ \cos \beta z, \quad (7.134a)$$

$$i(z) = 2j \frac{U_2^+}{Z_0} \sin \beta z. \quad (7.134b)$$

Látható, hogy az előzőhöz hasonlóan itt is állóhullámok alakulnak ki. A viszonyokat megfigyelhetjük a 7.17. ábrán.



7.17. ábra. A végén nyitott ideális vezeték elektromos viszonya

Tiszta reaktáns lezárás

$$Z_2 = jX, \quad r_2 = \frac{jX - Z_0}{jX + Z_0} = -\frac{Z_0 - jX}{Z_0 + jX}. \quad (7.135)$$

Nyilvánvalóan $|r_2| = 1$, tehát

$$r_2 = e^{j\varphi}, \quad (7.136)$$

és így

$$u(z) = U_2^+ (e^{+j\beta z} + e^{j\varphi} e^{-j\beta z}) = 2U_2^+ e^{j\frac{\varphi}{2}} \cos\left(\beta z - \frac{\varphi}{2}\right). \quad (7.137)$$

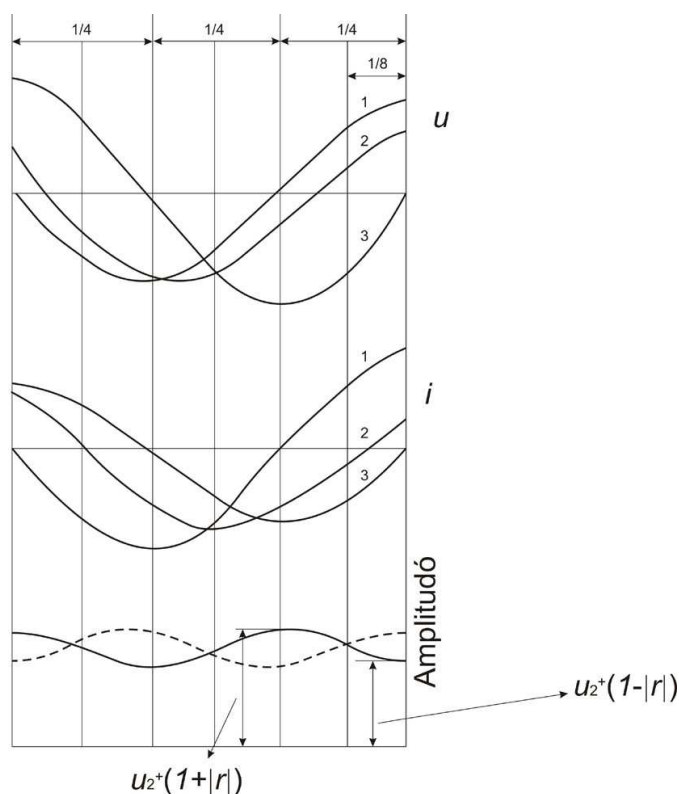
Most is állóhullámot kapunk a vezetéken, csupán a lezárás helyén sem csomópont, sem maximális kitérés nem alakul ki, hanem ez $\frac{\varphi}{2\beta}$ -val van eltolva a szakadással elzárt esethez képest. A bemeneti impedancia tiszta képzetes.

Általános lezárás

Vizsgáljuk meg a vezetéken lejátszódó jelenséget tetszés szerinti impedanciával történő lezárás esetén. Ekkor

$$r_2 = \frac{R + jX - Z_0}{R + jX + Z_0} = \frac{(R - Z_0) + jX}{(R + Z_0) + jX} = |r|e^{j\varphi}, \quad (7.138)$$

ahol láthatóan $|r| < 1$, ha $R > 0$, azaz minden passzív lezárás esetén. Az is belátható a (7.138) elemzésével, hogy $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$.



7.18. ábra. Nem illesztett fogyasztóval lezárt vezeték elektromos viszonyai

A feszültség eloszlása a vezeték mentén a 7.18. ábra szerinti

$$U(z) = U_2^+ \left[e^{+j\beta z} + |r| e^{j\varphi} e^{-j\beta z} \right].$$

Némi számolással:

$$U(l) = U_2^+ \left\{ (1 - |r|) e^{j\beta l} + |r| e^{j\frac{\varphi}{2}} \left[e^{j\left(\beta l - \frac{\varphi}{2}\right)} + e^{-j\left(\beta l - \frac{\varphi}{2}\right)} \right] \right\} = (1 - |r|) U_2^+ e^{+j\beta l} + 2|r| e^{j\frac{\varphi}{2}} U_2^+ \cos\left(\beta l - \frac{\varphi}{2}\right), \quad (7.139)$$

ami a vezetéken kialakuló hullámot egy pozitív irányba haladó és egy állóhullám összegeként írja fel. Az állóhullám következtében az amplitúdó a vezeték mentén változik, maximuma az állóhullám legnagyobb kitérésénél, minimuma az állóhullám csomópontjánál lesz

$$|U|_{\max} = (1+|r|)|U_2^+|, |U|_{\min} = (1-|r|)|U_2^+|. \quad (7.140)$$

Az állóhullám-intenzitás mértékét a tápvonal mentén mérhető maximális és minimális feszültsége hányadosaként definiáljuk, és *állóhullámaránynak* nevezzük. Jele az angol „voltage standing wave ratio” kezdőbetűiből *VSWR*. Kiszámítási módja:

$$VSWR = \frac{|U|_{\max}}{|U|_{\min}} = \frac{1+|r|}{1-|r|}. \quad (7.141)$$

A (7.121) és a (7.122) összefüggés, illetve a 7.12. és 7.18. ábra alapján láthatjuk, hogy a feszültség abszolút értéke maximumánál az áram abszolút értéke minimális (és fordítva), és ezeken a helyeken az áram és a feszültség fázisban vannak. Ezért kimondhatjuk, hogy ideális vezetéken a maximális és minimális abszolút értékű impedancia egyúttal tiszta valós, és az állóhullámaránnyal a következőképpen fejezhető ki

$$Z_{\max} = Z_0 \cdot VSWR, \quad (7.142)$$

$$Z_{\min} = \frac{Z_0}{VSWR}, \quad (7.143)$$

és a két impedancia helyének távolsága éppen negyedhullám hosszúságú.

Az állóhullámarány növekedése csökkenti a vezetéken átvihető teljesítményt. Ha a távvezetéken megengedett maximális feszültség adott (ezt rendszerint a dielektrikum átütési szilárdsága szabja meg), akkor a Z_2 lezáró ellenálláson fellépő hatásos teljesítmény

$$P_2 = \frac{1}{2} \Re U_2 (I_2)^* = \frac{1}{2} \Re U_2^+ (1+r) \frac{(U_2^+)^*}{Z_0} (1-r^*) = \frac{1}{2} \frac{|U_2^+|^2}{Z_0} (1-|r|^2),$$

ahol figyelembe vettük, hogy Z_0 valós. A (7.140) első egyenlőségét felhasználva

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{|U|_{\max}^2}{Z_0} \cdot \frac{1-|r|^2}{(1+|r|)^2} = \frac{|U|_{\max}^2}{2Z_0} \cdot \frac{1-|r|}{1+|r|}.$$

Eredményünk tehát

$$P_2 = \frac{|U|_{\max}^2}{2Z_0} \cdot \frac{1}{VSWR}, \quad (7.144)$$

azaz rögzített maximális megengedett feszültség esetén az átvihető hatásos teljesítmény az állóhullámaránnyal fordítva arányos.

A növekvő állóhullámarány nem csak az átvihető teljesítményt korlátozza, a reflektált hullám a távvezetéken történő információátvitelt is zavarja.

Célkitűzés, hogy a távvezetéken a reflexiót megszüntessük tetszőleges passzív ($R_2 \neq 0$) lezárás esetén.

Távvezetékek illesztése

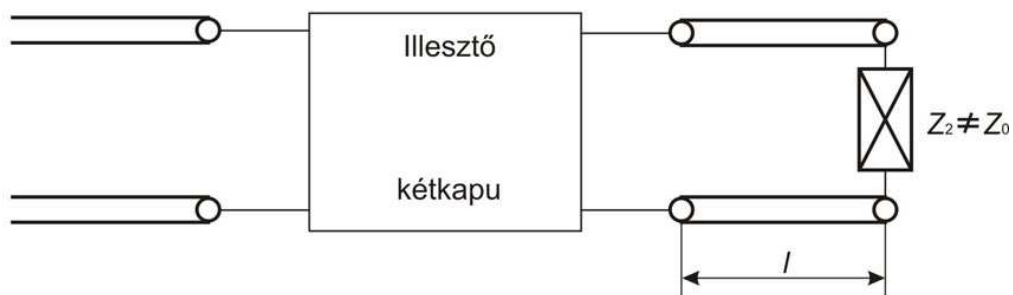
A távvezeték használata során a reflexió a távvezeték mentén hátrányos. Ezért alapvető feladat a reflexió megszüntetése. Ha a lezáróimpedancia a hullámellenállás, $Z_2 = Z_0$, akkor a távvezeték *illesztett* módon van lezárva és nem lép fel reflektált hullám. A felhasználás során nem biztosítható ilyen lezárás.

A továbbiakban a távvezeték nagy részén követeljük meg a reflexiómentes terjedést, a lezárás kis környezetében fogadjuk el a reflexiót.

Itt – mint az eddigiekben is – csupán egyetlen frekvencián való vizsgálatra szorítkozunk. Az illesztés véges frekvenciaintervallumban nem biztosítható. A gyakorlatban ezért véges intervallumban a specifikáció nem a tökéletes illesztést írja elő, hanem azt, hogy az állóhullámarány legfeljebb mekkora értéket vehet fel. A tartományban történő illesztésre a példák között találunk néhány szemléltető feladatot.

Az illesztést mindig a vezeték egy lezáráshoz közeli pontja és a távvezeték többi, „illesztett” része közé helyezett kétkapuval végezzük. A kétkaput úgy kell kialakítanunk, hogy a távvezeték illesztett része felé Z_0 terhelőimpedanciát mutasson.

A 7.19. ábra feltételezi, hogy az illesztetlen távvezeték szakasz hullámimpedanciája megegyezik az illesztett távvezetékével. Ez nem feltétlen követelmény.



7.19. ábra. Távvezeték illesztése

Az illesztésnél az illesztő kétkaput és az l távolságot kell meghatározni oly módon, hogy a kétkapu bemenetén az impedancia $Z_{be} = Z_0$ legyen. Azaz a reflexió tényező $r = 0$, illetve $VSWR = 1$.

A vezeték hosszú szakasza illesztett. Ezért kompromisszumként elviseljük, hogy az illesztetlen szakaszon, amelyet minél rövidebbnek igyekszünk tartani, van reflektált hullám.

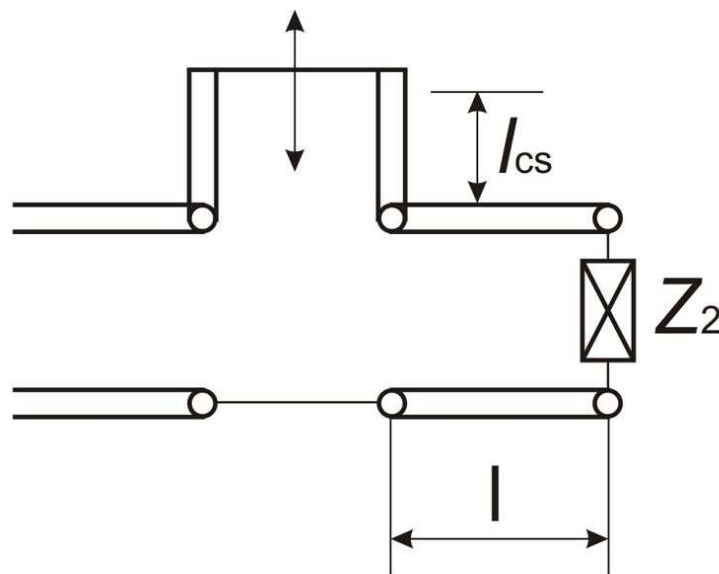
Illesztő kétkapuk

1. Soros reaktancia

Az ötlet: keressük meg a vezetéken azt a helyet, ahol az impedancia valós része éppen Z_0 , a hullámimpedancia. Az itt fellépő reaktanciát ellenkező előjelű, sorosan kapcsolt reaktanciával kompenzáljuk.

A (7.142) és (7.143) tanulsága szerint egymástól negyed hullámhossz távolságra tiszta valós impedancia alakul ki, és pedig $Z_{\max} > Z_0$, míg $Z_{\min} < Z_0$. A köztük lévő negyed hullámhossznyi szakaszon az impedancia valós része folytonosan változik. A folytonos függvények közéértékeltétele következtében van olyan pont ebben az intervallumban, ahol $\Re Z_{be} = Z_0$. Félhullám hosszúságú szakaszon tehát két ilyen hely van. Belátható, hogy az impedancia képzetes része e két pontban ellenkező előjelű, de azonos abszolút értékű. Ezen helyek egyikén végezzük az illesztést.

Az illesztőreakanciát a távvezetéken legkönnyebben rövidzárral vagy szakadással lezárt távvezetékkel tudjuk megvalósítani (7.128). Rövidre zárt csonkkal való illesztés látható a 7.20. ábrán.



7.20. ábra. Soros illesztés

A hangoláshoz l és l_{cs} értékét változtatni kell. A csonknál ez általában nem okoz gondot, l változtatása azonban nehéz, például koaxiális kábelben alig valósítható meg.

Az illesztés számítása viszonylag egyszerű. Az illesztés feltétele:

$$Z_0 = Z_{cs} + Z_{be}, \quad (7.145)$$

ahol

$$Z_{cs} = j Z_{0cs} \operatorname{tg} \beta l_{cs} = j X_{cs}, \quad (7.146)$$

$$Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 \cos \beta l + j Z_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + j Z_2 \sin \beta l} = Z_0 + j X_{be}, \quad (7.147)$$

és a

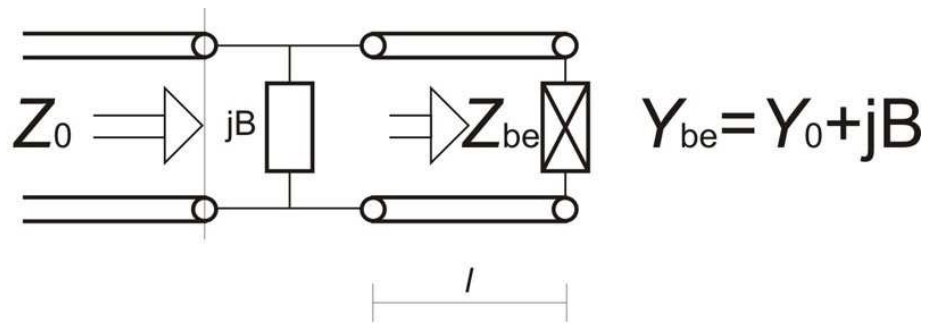
$$Z_0 = \Re Z_{be}, \quad (7.148)$$

$$X_{cs} + X_{be} = 0 \quad (7.149)$$

egyenletekből a keresett l és l_{cs} meghatározható.

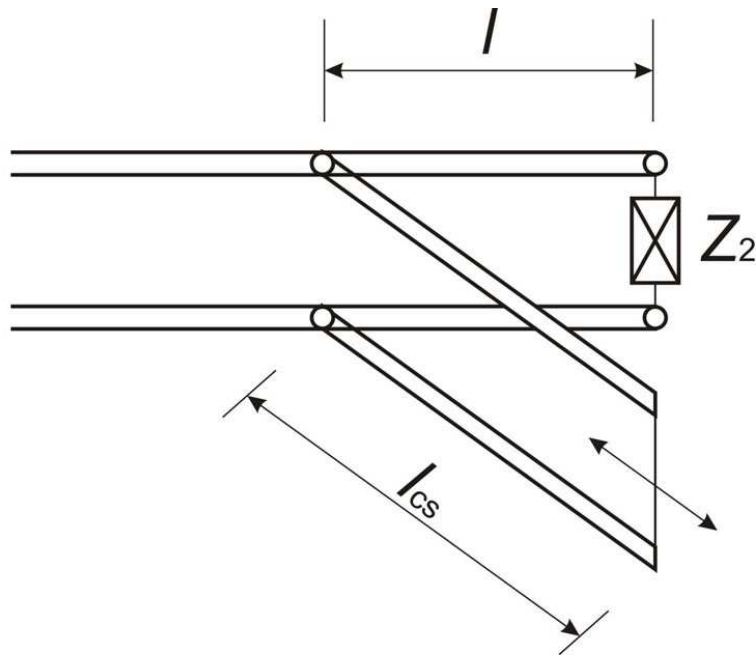
2. Párhuzamos reaktancia

A soros illesztés kivitelezésének technikai nehézségei miatt a párhuzamos illesztés sokkal elterjedtebb (7.21. ábra).



7.21. ábra. Párhuzamos illesztés elve

A reaktanciát most is vezetékcsonkkal, éspedig rövidre zárt vezetékcsonkkal célszerű megvalósítani (7.22. ábra).



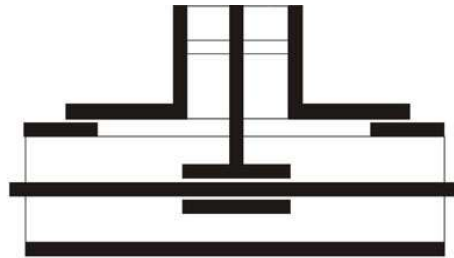
7.22. ábra. Párhuzamos illesztés

Az illesztés feltétele l és l_{cs} megvalósítása, hogy teljesüljön az

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{Z_{cs}} + \frac{1}{Z_{be}} \quad (7.150)$$

feltétel. Ez ismét két valós egyenletet jelent, amelyből a keresett hosszak meghatározhatóak. Most is belátható, hogy a távvezetéken félhullám hosszúságon belül két illesztési hely található.

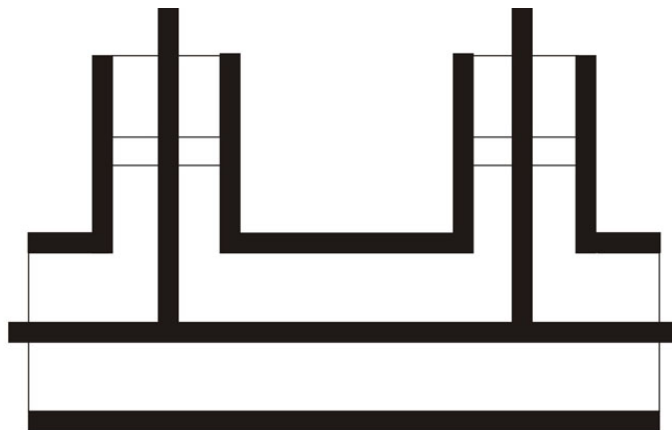
A hangolás a csonk és a rövidzár mozgatásával történik. Ez kettős vezetéken igen egyszerűen kivitelezhető, és koaxiális kábel esetén is megoldható (7.23. ábra).



7.23. ábra. Csúsztatható vezetékcsonk mint illesztő elem

3. Illesztés két csonkkal

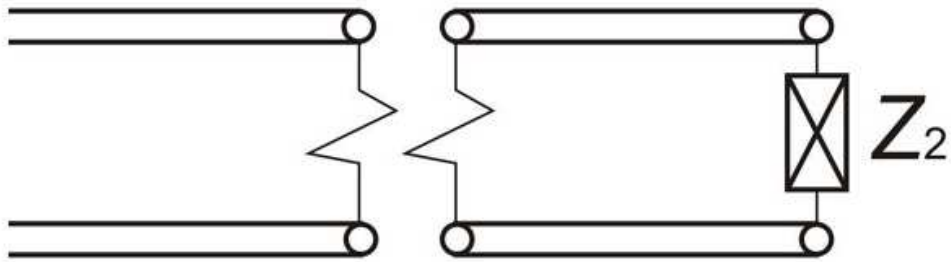
Ha el akarjuk kerülni az illesztőcsonk mozgatását a vezeték mentén, rögzített csonkokat kell használnunk. Az illesztés feltételét legalább két csonkkal lehet megvalósítani (7.24. ábra). Egy mozgatható csonkkal elvben tetszés szerinti állóhullámarány esetén elvégezhető az illesztés, ez két rögzített csonk esetén nem lehetséges.



7.24. ábra. Két helyhez kötött vezetékcsonk, mint illesztőelem

4. Illesztés transzformátorral

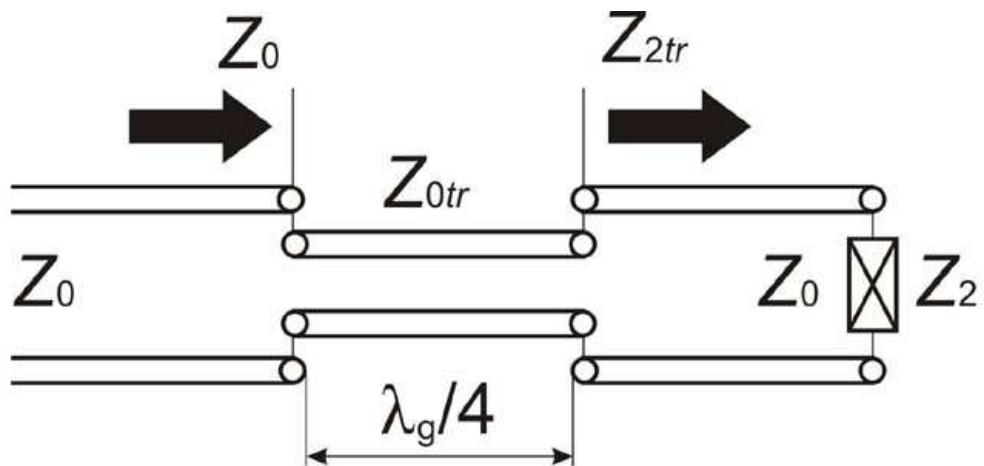
A vezetéken a (7.142) és (7.143) tanulsága szerint félhullám hosszúságon belül két olyan hely található, ahol a vezeték impedanciája tiszta valós: $Z_0 \cdot VSWR$ és $Z_0 / VSWR$. Ezen a helyen ideális transzformátorral a bemeneti impedancia a vezeték hullámimpedanciájára transzformálható (7.25. ábra).



7.25. ábra. Illesztés transzformátorral

Távvezetéken „ideális” transzformátort legkönnyebben $\lambda_g/4$ hosszúságú vezeték szakasszal tudunk megvalósítani (7.26. ábra). Ilyen vezeték szakasszon (7.126) értelmében a transzformátor hullámimpedanciája a lezáró- és a bemeneti impedancia mértani közepe

$$Z_{0tr} = \sqrt{Z_{1tr} Z_{2tr}} \quad (7.151)$$



7.26. ábra. Illesztés $\lambda/4$ -es transzformátorral

Az illesztéshez meghatározzuk azt az l távolságot a lezárástól, ahol az impedancia tiszta valós. (7.142) és (7.143) értelmében itt az impedancia

$$Z_{2tr} = \begin{cases} Z_0 \cdot VSWR \\ \frac{Z_0}{VSWR} \end{cases}, \quad (7.152)$$

és így a transzformátor hullámimpedanciája:

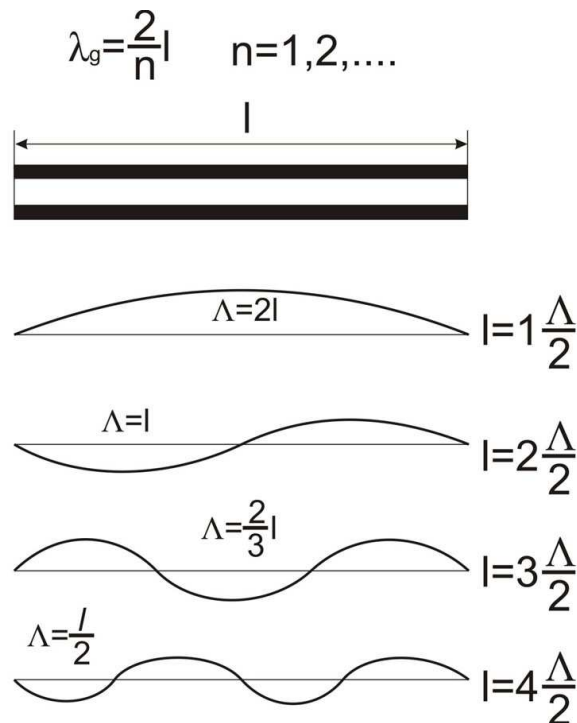
$$Z_{0rr} = \begin{cases} Z_0 \sqrt{VSWR} \\ \frac{Z_0}{\sqrt{VSWR}} \end{cases} \quad (7.153)$$

Figyelem! Valamennyi illesztés egy frekvencián érvényes. A frekvencia változásával az illesztett szakaszon is eltér az állóhullámarány-egységtől. Az illesztés sáv szélességét úgy definiáljuk, hogy a sávon belül az állóhullámaránynak megadott értéknél kisebbnek kell lennie. A sáv szélesség növelése több vezetékcsomókkal történő illesztéssel, illetve több nem szükségszerűen $\lambda_g/4$ -es transzformátor láncba kapcsolásával érhető el.

Távvezeték-rezgőkör

Rövidzárral lezárt távvezetéken állóhullámok alakulnak ki. A feszültségnek a rövidzáron csomópontja van. Ha a vezetéken a következő feszültségcsomópontba rövidzárát teszünk, az így kialakult zárt és véges hosszúságú vezeték szakaszon a feszültség (és áram) eloszlása nem változik. A rövidzárát távolabbi csomópontba helyezve ugyanezt állíthatjuk. A csomópontok közötti távolság $\lambda_g/2$. Az l hosszúságú, mindkét végén rövidzárral lezárt távvezeték szakaszon a félhullám hosszúság egész számú többszöröse helyezkedhet el. A hullámhossz (7.27. ábra) kiszámítása:

$$\lambda_g = \frac{2}{n} l, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.154)$$



7.27. ábra. A két végén lezárt vezeték különböző rezgési állapotai

A távvezeték szakasz frekvenciameghatározó áramkörként (rezgőkörként) viselkedik, ahol a frekvencia

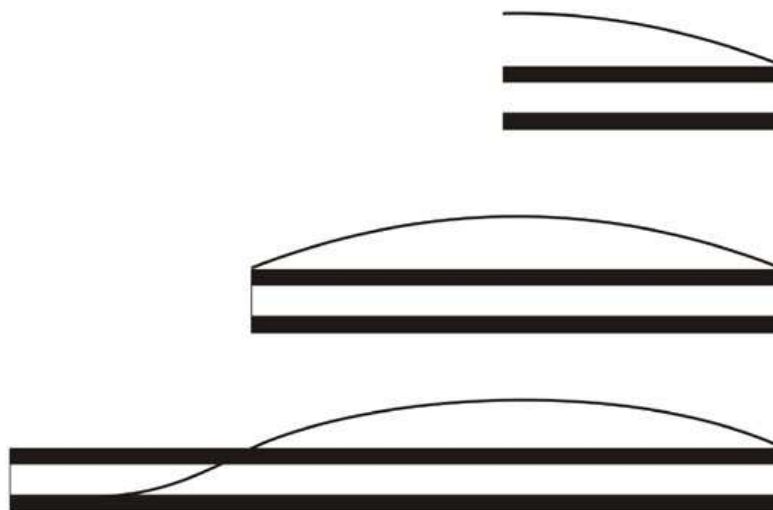
$$f = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \cdot \frac{1}{\lambda_g} = \frac{n}{2} \cdot \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \cdot \frac{1}{l}. \quad (7.155)$$

A szakadással lezárt vezeték végén az áramnak van csomópontja, a feszültség hullám amplitúdója maximális. Ezért mindkét végén szakadással lezárt vezetéken a hullámhossz megegyezik (7.154)-gyel. Az egyik végén rövidre zárt, másik végén nyitott távvezetéken (7.28. ábra) a hullámhossz negyede adódik a félhullámhosszhoz

$$l = n \frac{\lambda_g}{2} + \frac{\lambda_g}{4}, \quad (7.156)$$

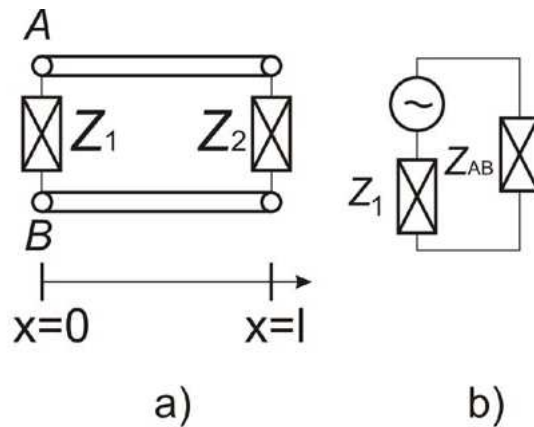
ahonnan

$$\lambda_g = \frac{4}{2n+1} l, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.157)$$



7.28. ábra. Negyedhullám, félhullám, és háromnegyedhullám hosszúságú rezgőrendszer

Általános lezárások esetén a rendszer saját rezgésének frekvenciáját a következőképpen számítjuk (7.29. ábra).



7.29. ábra. Mindkét végén megadott impedanciával lezárt vezeték mint rezgőrendszer

A Z_1 impedanciával sorba kötünk egy feszültségforrást. A bemeneten folyó áramot I_1 -gyel jelölve

$$I_1 (Z_1 + Z_{AB}) = U_G, \quad (7.158)$$

ahol Z_{AB} a távvezeték bemeneti impedanciája. A rezgőkörben $U_G = 0$. Ekkor véges áramot csak akkor kaphatunk, ha

$$Z_1 + Z_{AB} = 0, \quad (7.159)$$

azaz részletesen

$$Z_1 + Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \operatorname{tg} \frac{\omega}{c} l}{Z_0 + jZ_2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{c} l} = 0. \quad (7.160)$$

Ebben az összefüggésben egyetlen szabad paraméter van: ω . A komplex egyenlet megoldása nem feltétlenül valós. A komplex ω értékek csillapódó rezgéseket jelentenek

$$\omega = \omega' + j\omega'' \quad (7.161)$$

esetén

$$e^{j\omega t} = e^{-\omega'' t} e^{j\omega' t}. \quad (7.162)$$

Távvezetékek időtartománybeli vizsgálata

Egyszerű eszközökkel csak ideális (torzításmentes) távvezetéken terjedő hullámokat tudunk kezelni. A könnyebb áttekinthetőség kedvéért csak az ideális vezeték jelenségeire vonatkozó alapfeladatokat ismertetjük. Az eredmények kiterjesztése torzításmentes vezetésekre nem nehéz.

A távvezetéken lejátszódó jelenség tér-idő dinamikája általában megköveteli kezdeti és peremértékek együttes kitűzését. Speciális esetekben közülük elegendő az egyiket kitűznünk. A továbbiakban valamennyi alapesetet végigvizsgáljuk.

A vezetéken haladó hullámokat (7.16) és (7.17)-nek megfelelően az alábbi alakban keressük

$$u(z, t) = f_1(z - vt) + f_2(z + vt), \quad (7.163)$$

$$i(z, t) = \frac{1}{Z_0} [f_1(z - vt) - f_2(z + vt)]. \quad (7.164)$$

A képletekben f_1 és f_2 tetszőleges alakú függvények lehetnek. Általában megköveteljük, hogy függvények véges energiát hordozzanak, azaz abszolút értékük négyzete mindkét változójuk szerint integrálható legyen.

1. Kezdetiérték-feladat

Végtelen hosszú távvezetéken a peremértékeket nem tudjuk megadni. Az egyértelmű megoldáshoz a vezeték mentén meg kell adnunk a feszültség és az áram eloszlását a $t = 0$ pillanatban. Ez a *kezdeti érték*.

Legyen

$$u(z, 0) = U(z), \quad (7.165)$$

$$i(z, 0) = I(z), \quad (7.166)$$

ahonnan némi számolással

$$f_1(z) = \frac{1}{2} [U(z) + Z_0 I(z)], \quad (7.167)$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2} [U(z) - Z_0 I(z)]. \quad (7.168)$$

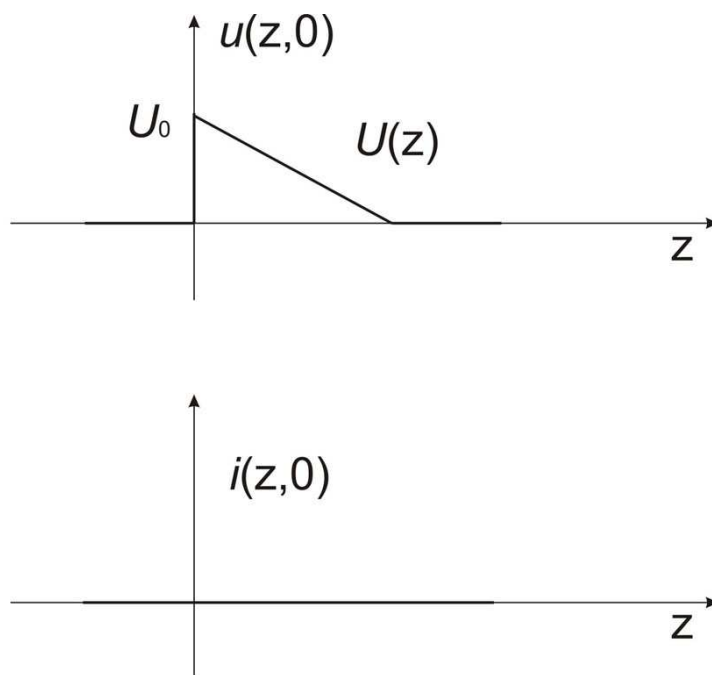
A megoldás (7.163) és (7.164) felhasználásával könnyen előállítható

$$u(z, t) = \frac{1}{2} [U(z - vt) + Z_0 I(z - vt) + U(z + vt) - Z_0 I(z + vt)]. \quad (7.169)$$

Áramra

$$i(z, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{U(z - vt)}{Z_0} + I(z - vt) - \frac{U(z + vt)}{Z_0} + I(z + vt) \right]. \quad (7.170)$$

Például tételezzük fel, hogy a távvezeték mentén egy feszültséglökés alakul ki, de a kezdeti pillanatban áram még nem folyik (7.30. ábra).



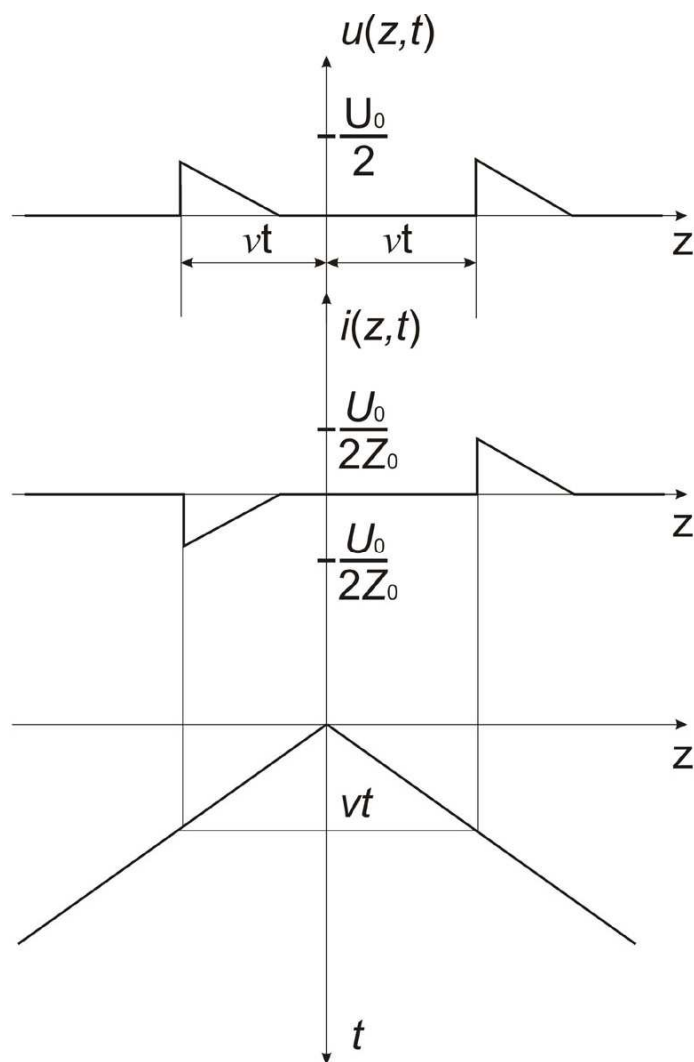
7.30. ábra. Távvezeték kezdeti állapota

A kialakuló feszültség-, illetve áramhullám

$$u(z, t) = \frac{1}{2} [U(z - vt) + U(z + vt)], \quad (7.171)$$

$$i(z, t) = \frac{1}{2Z_0} [U(z - vt) - U(z + vt)]. \quad (7.172)$$

A feszültség és az áram eloszlása a vezeték mentén $t \neq 0$ pillanatban a 7.31. ábrán látható.



7.31. ábra. Kezdetiérték-feladat megoldása

Az áram előjele jelzi, hogy az áram pozitív vagy negatív irányban folyik-e a referencia-vezetéken. Feltüntettük a karakterisztikát. Ágai azt mutatják, hogy a vezetéken a hullám egy karakterisztikus pontja (esetünkben a maximuma) hogyan halad a vezeték mentén t függvényében. Egyenletes haladás (állandó sebesség) esetén a karakterisztika v meredekségű egyenes.

A karakterisztika nem állandó sebességű terjedés esetén is a hullámjelenségek vizsgálatának fontos segéd-eszköze. Ilyenkor nem egyenes a karakterisztika.

A karakterisztika akkor használható, ha a hullám alakja a terjedés során csak lassan változik.

2. Peremérték-feladat

A vezetéken a kezdeti érték zérus, a vezeték egy pontján előírjuk a feszültség és/vagy áram időbeli változását. Mindkét mennyiség előírásakor kellő óvatossággal kell eljárni, a terjedő hullám árama és feszültsége meghatározzák egymást.

A peremérték

$$u(0, t) = U_0(t), \quad (7.173)$$

$$i(0, t) = I_0(t). \quad (7.174)$$

Mindkét irányban terjedő hullám esetén (7.163) és (7.164)-ből:

$$f_1(t) = \frac{1}{2} [U_0(t) + Z_0 I_0(t)], \quad (7.175)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2} [U_0(t) - Z_0 I_0(t)], \quad (7.176)$$

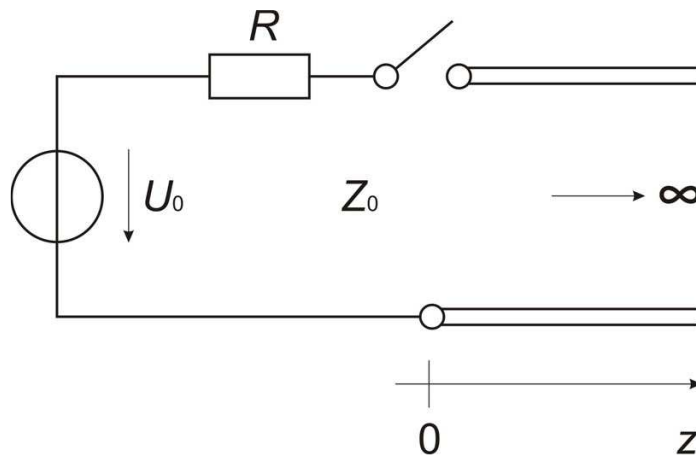
ahonnan

$$u(z, t) = \frac{1}{2} \left[U_0 \left(t - \frac{z}{v} \right) + Z_0 I_0 \left(t - \frac{z}{v} \right) + U_0 \left(t + \frac{z}{v} \right) - Z_0 I_0 \left(t + \frac{z}{v} \right) \right], \quad (7.177)$$

$$i(z, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{U_0 \left(t - \frac{z}{v} \right)}{Z_0} + I_0 \left(t - \frac{z}{v} \right) - \frac{U_0 \left(t + \frac{z}{v} \right)}{Z_0} + I_0 \left(t + \frac{z}{v} \right) \right]. \quad (7.178)$$

A karakterisztika az előző esethez viszonyítva változatlan.

Bekapcsolási transziens látható a 7.32. ábrán, amely az egyik irányban történő terjedésre példa.



7.32. ábra. Peremérték-feladat

$$u(0, t) = U^{(+)} \varepsilon(t), \quad (7.179)$$

$$i(0, t) = \frac{U^{(+)}}{Z_0} \varepsilon(t). \quad (7.180)$$

Miután csak pozitív irányba haladó hullám van, $u(0, t)$ egyértelműen meghatározza $i(0, t)$ -t. Bármely időpillanatban a (7.163) és (7.164) alapján a 7.33. ábrán látható módon

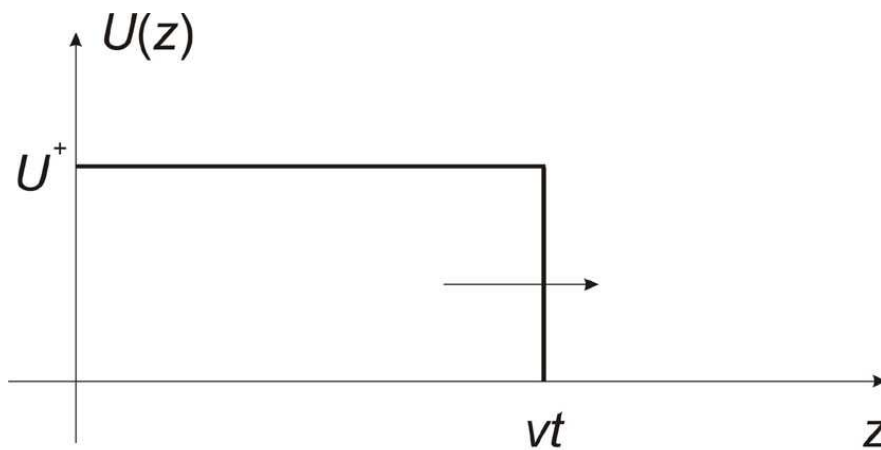
$$u(z, t) = U^{(+)} \mathcal{E}\left(t - \frac{z}{v}\right) \quad (7.181)$$

és

$$i(z, t) = \frac{U^{(+)}}{Z_0} \mathcal{E}\left(t - \frac{z}{v}\right), \quad (7.182)$$

azaz

$$u = \begin{cases} U^{(+)}, & \text{ha } z < vt \\ 0, & \text{ha } z > vt \end{cases}. \quad (7.183)$$



7.33. ábra. Peremérték-feladat megoldása

A karakterisztika megegyezik a 7.31. ábra pozitív féltengelyhez tartozó karakterisztikájával. Az $u(0, t)$ és $i(0, t)$ ismeretében a 7.32. ábra alapján

$$U^{(+)} = U_0 - I^{(+)}R = U_0 - \frac{U^{(+)}}{Z_0}R,$$

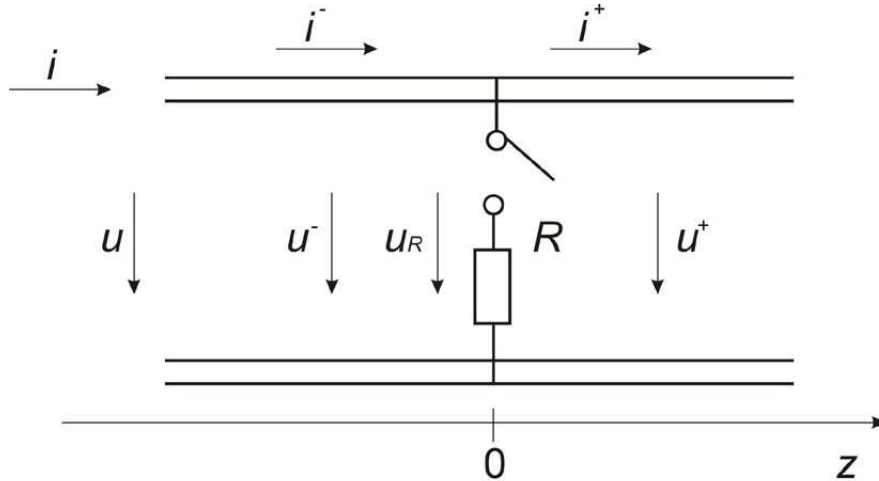
ahonnan

$$U^{(+)} = \frac{Z_0}{R + Z_0} U_0, \quad (7.184)$$

azaz a vezeték bemenetének feszültsége egyszerű feszültségosztással számítható az R és Z_0 ellenállás között.

3. Kezdetiérték- és peremérték-feladat

Az általános esetre példa a vezetéken kialakuló zárlat hatását modellezi. Legyen a távvezetéken a 0 pillanatban stacionárius U feszültség, az áram a vezeték mentén zérus. A $t = 0$ pillanatban a $z = 0$ helyen véges R ellenállást kapcsolunk a vezetékre a 7.34. ábra szerint.



7.34. ábra. Kezdeti- és peremérték-feladat

$$u(z, 0) = U, \quad (7.185)$$

$$i(z, 0) = 0. \quad (7.186)$$

Az R ellenállás bekapcsolásakor mindkét irányba azonos értékű feszültség hullám indul el. Az R ellenálláson fellépő U_R feszültség

$$U_R = Ri_R = U + u^- = U + u^+, \quad (7.187)$$

ahol $u^- = u^+$. De

$$-i^- = \frac{u^-}{Z_0}, \quad +i^+ = \frac{u^+}{Z_0} = -i^-, \quad (7.188)-(7.189)$$

ahonnan az ellenálláson folyó áram

$$i_R = i^- - i^+ = 2i^-.$$

Ebből (7.187)-et felhasználva kapjuk

$$U + u^- = i_R R = 2i^- R = -2 \frac{R}{Z_0} u^-,$$

azaz

$$u^- = -\frac{Z_0}{2R + Z_0}U, \quad (7.190)$$

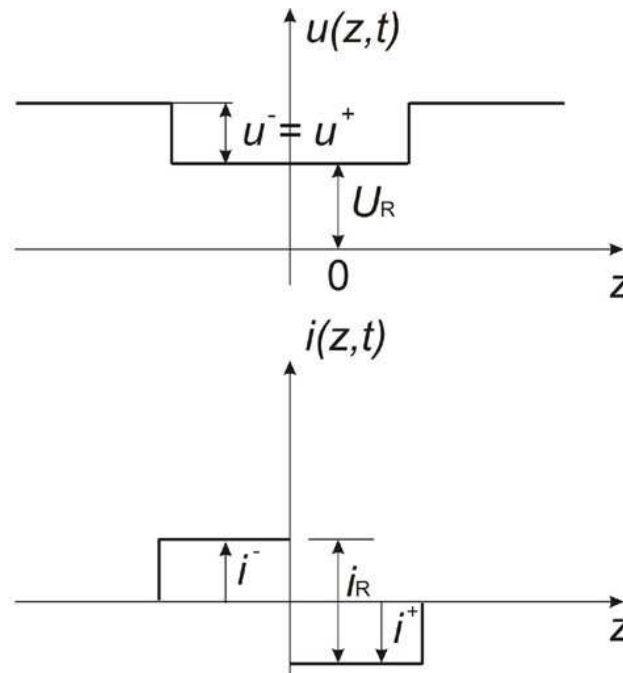
$$i^- = \frac{U}{2R + Z_0}. \quad (7.191)$$

A zárlati feszültség, illetve áram értéke

$$u_R = \frac{2R}{2R + Z_0}U, \quad (7.192)$$

$$i_R = \frac{2U}{2R + Z_0}. \quad (7.193)$$

A legérdekesebb eredmény, hogy a zárlati áram $R = 0$ esetén is véges marad (7.35. ábra).



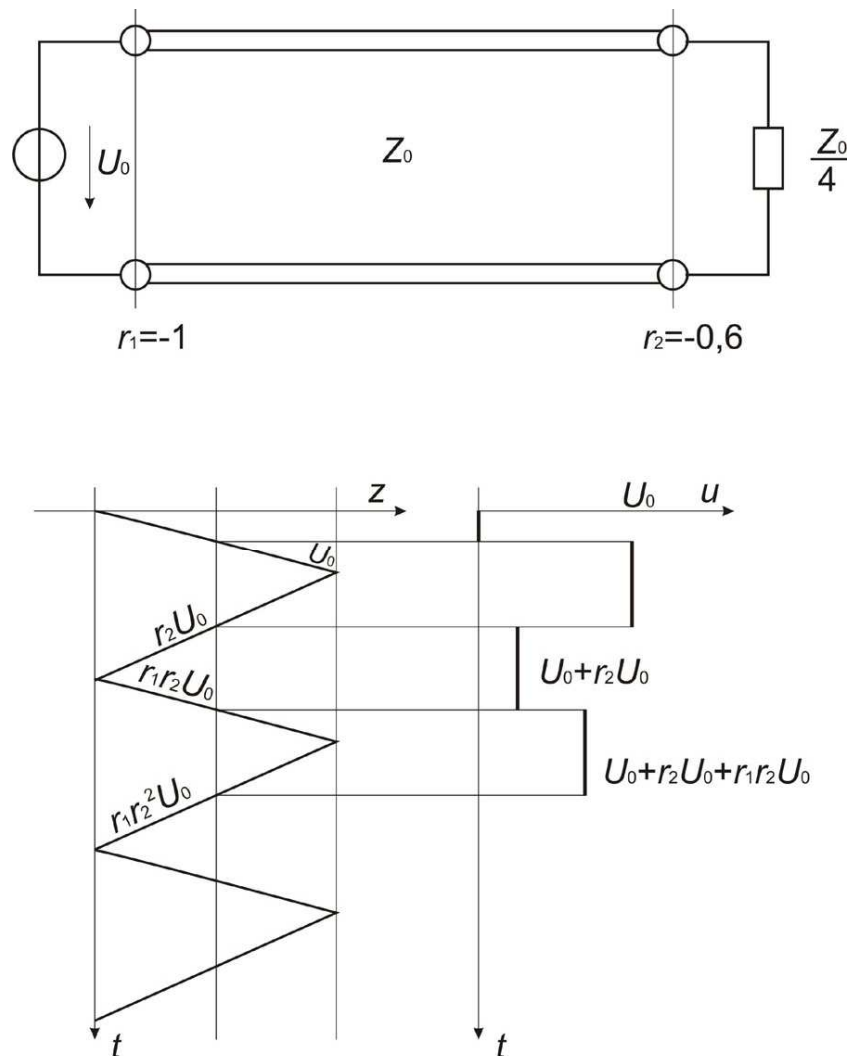
7.35. ábra. Kezdeti- és peremérték-feladat megoldás

A karakterisztika megegyezik a 7.31. ábra karakterisztikájával. Az áramhullám a vezeték végét $T = L/v$ idővel a rövidzárlat bekövetkezte után éri el, és legnagyobb értéke u/Z_0 lehet.

A menetdiagramok módszere

A karakterisztikák segítségével frekvenciafüggetlen lezárásnál a tranziens nyomon követhető, a távvezeték egyes pontjaiban az áram és feszültség értéke megszerkeszthető. Egy példán keresztül mutatjuk be a módszer használatát.

Tekintsük a 7.36. ábrán bemutatott elrendezést. Kapcsoljuk az U_0 feszültségforrást a $t = 0$ pillanatban a vezetékre.



7.36. ábra. Menetdiagram-módszer

Az ábrán $\tau = \frac{l}{v}$ a futási idő a vezeték mentén.

$$r_1 = \frac{0 - Z_0}{0 + Z_0} = -1, \quad r_2 = \frac{\frac{Z_0}{4} - Z_0}{\frac{Z_0}{4} + Z_0} = \frac{-0,75}{1,25} = -0,6.$$

A karakterisztikákból álló menetdiagrammal a vezeték két végén visszaverődő hullámok nyomon követhetők, és a vezeték bármely pontjában összegezhetőek.

Látszik, hogy frekvenciafüggő reflexió és bonyolultabb gerjesztés esetén ez a félgrafikus módszer nem használható.

A menetdiagram-módszer befejezéséként határozzuk meg az állandósult feszültséget és áramot a lezáráson

$$\begin{aligned}
U_2 &= (1+r_2)U_0 - r_2(1+r_2)U_0 + r_2^2(1+r_2)U_0 + \dots + = \\
&= (1+r_2)(1-r_2+r_2^2-r_2^3 \pm \dots \pm)U_0 = \frac{1+r_2}{1+r_2}U_0 = U_0,
\end{aligned} \tag{7.194}$$

$$I_2 = (1-r_2)\frac{U_0}{Z_0} - r_2(1-r_2)\frac{U_0}{Z_0} \pm \dots \pm = \frac{1-r_2}{1+r_2}\frac{U_0}{Z_0} = \frac{U_0}{R_2}. \tag{7.195}$$

A fenti formulák megfelelnek a fizikailag indokolt várakozásnak.

Az előző megfontolások az egyenáramú fogyasztó áram- és feszültségbekapcsolásakor fellépő tranzienseit szemléltetik.

Általános tranziensek

Veszteséges vezeték és/vagy tetszés szerinti lezárás esetén az eddigi módszerek nem használhatók. A numerikus megoldáson kívül lehetséges a transzformációs módszerek használata is. A Fourier-transzformáció alkalmazásakor a Laplace-transzformációval hasonló eredményekre jutunk.

A transzformáció az időtartományt a $j\omega$ frekvenciatartományba képezi le, miközben a térbeli változó paraméterként szerepel

$$\mathcal{F}u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-j\omega t} dt = U(x,j\omega), \tag{7.196}$$

$$\mathcal{F}i(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(x,t)e^{-j\omega t} dt = I(x,j\omega). \tag{7.197}$$

A vezetéken pozitív irányban haladó hullám

$$u^+(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(j\omega)e^{-\gamma x}e^{j\omega t} d\omega, \tag{7.198}$$

$$i^+(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_1(j\omega)}{Z_0(j\omega)}e^{-\gamma x}e^{j\omega t} d\omega, \tag{7.199}$$

ahol $U_1(j\omega)$ a bemeneti $U_1(t) = U(0,t)$ feszültség transzformáltja, Z_0 a hullámimpedancia. A reflexiótényező a lezáráson

$$r_2(j\omega) = \frac{Z_2(j\omega) - Z_0(j\omega)}{Z_2(j\omega) + Z_0(j\omega)}, \tag{7.200}$$

és a bemeneten

$$r_1(j\omega) = \frac{Z_1(j\omega) - Z_0(j\omega)}{Z_1(j\omega) + Z_0(j\omega)}. \quad (7.201)$$

Az első reflektált hullám l hosszúságú vezetéken

$$u^-(x, j\omega) = r_2 U_1(j\omega) e^{-\gamma l} e^{\gamma(z-l)},$$

és végül a sokszoros oda-vissza verődés után

$$\begin{aligned} U(x, j\omega) &= U_1(j\omega) \left[e^{-\gamma x} + r_2 e^{-\gamma(2l-x)} + r_1 r_2 e^{-\gamma(2l+x)} + r_1 r_2^2 e^{-\gamma(4l-x)} + \dots \right] = \\ &= U_1(j\omega) \left[e^{-\gamma x} (1 + r_1 r_2 e^{-2\gamma l} + r_1^2 r_2^2 e^{-4\gamma l} + \dots) + r_2 e^{-\gamma(2l-x)} (1 + r_1 r_2 e^{-2\gamma l} + \dots) \right]. \end{aligned}$$

Innen a mértani sort összegezve kapjuk az

$$U(z, j\omega) = U_1(j\omega) \frac{e^{-\gamma x} + r_2 e^{\gamma(x-2l)}}{1 - r_1 r_2 e^{-2\gamma l}}, \quad (7.202)$$

$$I(z, j\omega) = \frac{U_1(j\omega)}{Z_0(j\omega)} \frac{e^{-\gamma x} - r_2 e^{\gamma(x-2l)}}{1 - r_1 r_2 e^{-2\gamma l}}. \quad (7.203)$$

A sorösszegzés feltétele, hogy az

$$|r_1 r_2 e^{-2\gamma l}| < 1 \quad (7.204)$$

egyenlőtlenség fennálljon.

A (7.202) és (7.203) kifejezésekben jól elkülönül a pozitív és negatív irányba haladó hullám. Állandósult állapotban csak a lezárás határozza meg a reflexiót: r_2 a reflexiótényező.

A kifejezésekben a bemeneti gerjesztés Fourier-transzformáltjának szorzója a rendszer átviteli függvénye. Az időtartományba visszatérésnél az átviteli függvény nevezője kitüntetett szerepet kap. Az átviteli függvény pólusai, azaz a nevező zérushelyei határozzák meg a rendszer sajátrezgéseit. Esetünkben a sajátrezgések frekvenciái azok a (komplex) frekvenciák, amelyeken teljesül a

$$r_1 r_2 e^{-2\gamma l} = 1 \text{ feltétel.} \quad (7.205)$$

A feltétel a (7.160) egyenlettel azonos sajátfrekvenciákra vezet.

8. ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK KELTÉSE

Amint a 1. fejezetben az elektrodinamika felosztásánál láttuk, az elektromágneses tér legáltalánosabb egyenletei:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \quad (\text{I})$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{II})$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \quad (\text{IV})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \quad (\text{V})$$

Homogén közeget tételezünk fel, tehát ε és μ állandó.

A teret gerjesztő mennyiségek az *áram* és a *töltés*. A továbbiakban azt vizsgáljuk, milyen módon lehet meghatározni a gerjesztőmennyiségek ismeretében a létrehozott teret.

Az összefüggéseket nem a térjellemező mennyiségekre írjuk fel, hanem a potenciálokra. Az a tény, hogy a \mathbf{B} vektor divergenciamentes, lehetővé teszi, hogy egy alkalmasan választott \mathbf{A} vektorpotenciál rotációjaként fejezzük ki

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \quad (8.1)$$

Ezt az összefüggést (II)-be helyettesítve és felcserélve a hely és idő szerinti deriválást (ami nyugvó rendszerben mindig megtehető), a következő összefüggésekhez jutunk

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{A} = -\operatorname{rot}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0. \quad (8.2)$$

Mivel a zárójelben álló vektor rotációmentes, előállítható egy skalárpotenciál gradienseként:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

ahonnan

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \quad (8.3)$$

A sztatikus ($\partial/\partial t = 0$) esettel ellentétben az elektromos tér nem állítható elő csak skalárpotenciállal, hanem a mágneses teret meghatározó vektorpotenciál is megjelenik az értékében. Történelmi érdekesség, hogy Maxwell munkáiban az alapegyenletek az (I), (IV), (8.1) és (8.3) voltak. Ennek oka az a bonyolult hidrodinamikai modell volt, amellyel Maxwell az elektromágneses teret modellezte, és amelyben az \mathbf{A} vektorpotenciál kitüntetett szerepet játszott. Az egyenletek mai alakját *O. Heaviside* formulázta meg 1884-ben, már Maxwell halála után. Lényegében azonos egyenletekre jutott *H. Hertz*, aki kísérleti úton először keltett rádióhullámokat. Érdekesség, hogy az (I)–(II) egyenleteket *Einstein* mindig mint Maxwell–Hertz-egyenleteket idézte.

Az eddigiek értelmében, ha adva van \mathbf{A} és φ , a vektor- és skalárpotenciál, mint a hely és idő függvénye, akkor \mathbf{E} és \mathbf{B} a (8.3) és (8.1) egyenletekből meghatározható.

A potenciálokat az eddig fel nem használt (I) és (IV) egyenletekkel tudjuk meghatározni. Vegyük észre: csak ezek az egyenletek tartalmazzák a gerjesztőmennyiségeket, a másik két egyenlet homogén!

Miután az \mathbf{A} vektorpotenciálnak csak a rotációja kötött, a divergenciáját szabadon választhatjuk. Ez az úgynevezett *mértékválasztás*. A divergenciát célszerűen úgy választjuk, hogy az egyenletek a lehető legkényelmesebb alakúak legyenek:

$\mathbf{H} = (1/\mu)\text{rot}\mathbf{A}$ -t (I)-be helyettesítve a

$\text{rot rot}\mathbf{A} = \text{grad div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = \mu\mathbf{J} - \varepsilon\mu \text{grad} \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}$ összefüggéshez jutunk, amelyből rendezés után kapjuk a

$$\Delta\mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J} + \text{grad} \left(\text{div}\mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) = 0. \quad (8.4)$$

A (IV) egyenletbe (8.3) ε -szorosát helyettesítve \mathbf{D} helyére, az alábbi kifejezést kapjuk, $\text{div}\mathbf{D} = -\varepsilon \text{div grad } \varphi - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{div}\mathbf{A} = \rho$, ahonnan rendezés után a

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial t} \text{div}\mathbf{A} \quad (8.5)$$

összefüggéshez jutunk.

A mértéket a (8.4) egyenletet egyszerűsítve megválaszthatjuk úgy, hogy

$$\text{div}\mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \text{ legyen.} \quad (8.6)$$

Ez az összefüggés a *Lorenz-feltétel* és az így választott mértéket Lorenz-mértéknek nevezzük. (8.6) alkalmazásával (8.4) az alábbi egyenletre egyszerűsödik

$$\Delta\mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}, \quad (8.7)$$

míg (8.5)

$$\Delta\varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (8.8)$$

alakú lesz.

Az \mathbf{A} vektorpotenciálra és a φ skalárpotenciálra azonos alakú egyenletet kapunk a Lorenz-feltétel alkalmazásával.

Az egyenletek térbeli hullámegyenletek. Nem függetlenek, hiszen a jobb oldalon álló mennyiségek között a folytonossági egyenlet erős kötést jelent. Belátható, hogy a (8.6) Lorenz-feltétel a (8.7) és (8.8) egyenletek jobb oldalán álló gerjesztőmennyiségek között a folytonossági egyenlet teljesülését biztosítja.

Induljunk ki ennek bizonyítására a (8.7) egyenletről. Vegyük mindkét oldal divergenciáját

$$\operatorname{div}\Delta\mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div}\mathbf{A} = -\mu\operatorname{div}\mathbf{J}.$$

A vektorra ható Δ operátor definíciója

$$\Delta = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \operatorname{rot} \operatorname{rot},$$

amivel

$$\operatorname{div}\Delta\mathbf{A} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div}\mathbf{A} - \operatorname{div} \operatorname{rot} \operatorname{rot}\mathbf{A} = \Delta \operatorname{div}\mathbf{A},$$

mert a rotáció mindig divergenciamentes.

Az egyenlet a következő alakba írható

$$\left(\Delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \operatorname{div}\mathbf{A} = -\mu\operatorname{div}\mathbf{J}.$$

Ezek után deriváljuk (8.8) mindkét oldalát az idő szerint és szorozzuk meg $\varepsilon\mu$ -vel

$$\left(\Delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

A fenti két egyenletet összeadva a bizonyítandó állítás nyilvánvaló.

$$\left(\Delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu \left(\operatorname{div}\mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad (*)$$

Tetszés szerinti ψ függvény segítségével olyan potenciálok állíthatók elő, amelyek azonos térmennyiségekre vezetnek. A potenciálok

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \operatorname{grad}\psi, \quad (8.9)$$

$$\varphi^* = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (8.10)$$

A ψ elnevezése: *mértékfüggvény*. Ha úgy választjuk, hogy \mathbf{A}^* és φ^* is eleget tegyen az előzően választott mértéknek, *mértékinvarianciáról* beszélünk. Könnyen belátható, hogy a mértékinvariancia esetén a Lorenz-mértéknél ψ eleget tesz a homogén hullámegyenletnek:

$$\Delta\psi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (8.11)$$

A (*) egyenlet állítása mértékinvariancia esetén változatlan marad.

Gyakran választott mérték a stacionárius esetből jól ismert *Coulomb-mérték*

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \quad (8.12)$$

Ezzel a (8.5) egyenlet a Poisson-egyenletre egyszerűsödik (de a benne szereplő mennyiségek az időben változnak)

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (8.13)$$

A vektorpotenciálra vonatkozó (8.4) egyenlet bonyolultabb lesz.

$$\Delta\mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J} + \varepsilon\mu \operatorname{grad} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad (8.14)$$

(8.13)-ból φ meghatározható a sztatikából ismert módon. Az így kapott potenciált (8.14)-be helyettesítve kell megoldanunk a hullámeqyenletet.

A gerjesztőmennyiségekre a folytonossági egyenlet most is teljesül. (8.14) mindkét oldalának divergenciáját véve, a bal oldalon (8.12) következtében zérust kapunk, míg a jobb oldalt kiszámítva a folytonossági egyenletre jutunk.

$$-\operatorname{div}\mathbf{J} + \varepsilon \operatorname{div}\operatorname{grad} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \Delta\varphi = -\operatorname{div}\mathbf{J} - \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (8.15)$$

A mértékinvariancia feltétele (8.9) felhasználásával $\operatorname{div}\mathbf{A}^* = \operatorname{div}\mathbf{A} + \Delta\psi = 0$ alapján

$$\Delta\psi = 0, \quad (8.16)$$

azaz a mértékfüggvény a Laplace-egyenletnek kell eleget tgyen. A feltétel (8.10) és (8.13) alapján a φ skalárpotenciál invarianciáját is biztosítja.

Térjünk vissza a hullámeqyenletekre! A hullám terjedési sebességére (ezt a 7. fejezetben már láttuk) a közegben mérhető fénysebesség adódik

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n}. \quad (8.17)$$

A két egyenlethől jól látszik, hogy a sztatikus-stacionárius alapeqyenleteket akkor kapjuk vissza, ha a terjedés sebessége végtelen. A sztatikus-stacionárius leírás a valódi folyamatoknak mindig csak a közelítése. Ez a közelítés a fénysebesség igen nagy értéke miatt viszonylag nagy kiterjedésű térrészben jó lehet. Ez a tény teszi lehetővé például a koncentrált paraméterű hálózatokkal történő, azonnali kölcsönhatást feltételező leírást.

$$\varepsilon\mu \rightarrow 0, \text{ azaz } v \rightarrow \infty, \quad (8.18)$$

Határozzuk meg a (8.7) és (8.8) egyenletek megoldását. Kezdjük a legegyszerűbbel, egy időben változó pontszerű töltés potenciáljával.

A megoldás gömbszimmetrikus lesz. Ezért a (8.8) egyenletet gömbi koordinátákban kell felírni. A Laplace-operátor az r , ϑ , ϕ gömbi koordinátákkal felírva:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}.$$

A gömbszimmetrikus megoldás csak r -től függ, így az egyenlet alakja az origó kivételével (ahol pontszerű töltés van)

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Tételezzük fel, hogy a megoldás alakja, ismerve a sztatikus határértéket

$$\varphi(r, t) = \frac{f(r, t)}{r}.$$

Ezt a hullámeqyenletbe helyettesítve:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{f}{r^2},$$

$$r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = r \frac{\partial f}{\partial r} - f,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{\partial f}{\partial r} + r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\partial f}{\partial r} = r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}.$$

Az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \varepsilon\mu \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Az origótól eltekintve az egyenlet tehát

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) = 0$$

alakba írható, azaz a zárójeles kifejezés minden r -re zérus. Ennek az egyenletnek a megoldását a távvezetékek elméletéből ismerjük:

$$f(r, t) = f_1 \left(t - \frac{r}{v} \right) + f_2 \left(t + \frac{r}{v} \right).$$

Foglalkozunk a fizikailag jól értelmezhető megoldással: a pozitív r irányban terjedő hullámmal. Legyen

$$f(r, t) = f\left(t - \frac{r}{v}\right).$$

$r \rightarrow 0$ esetén a sztatikus határértéket kell kapnunk. Az ennek megfelelő megoldás

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}. \quad (8.19)$$

Megjegyzés: a kifejezés eleget tesz azon feltételünknek is, hogy $v \rightarrow \infty$ esetén a sztatikus határértékbe megy át.

Elosztott töltés esetén

$$dQ = \rho\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{v}\right) d\xi d\eta d\zeta, \quad (8.20)$$

és ezzel

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{v})}{r} d\xi d\eta d\zeta. \quad (8.21)$$

Hasonló módon:

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{v}\right)}{r} d\xi d\eta d\zeta. \quad (8.22)$$

Az eddigi konvenciónknak megfelelően x, y, z azon P pont koordinátái, ahol a potenciált keressük: ξ, η, ζ azon Q pont koordinátái, ahol a töltés/áram van. r a P és Q pont közötti távolság, ami mind a hat koordináta függvénye.

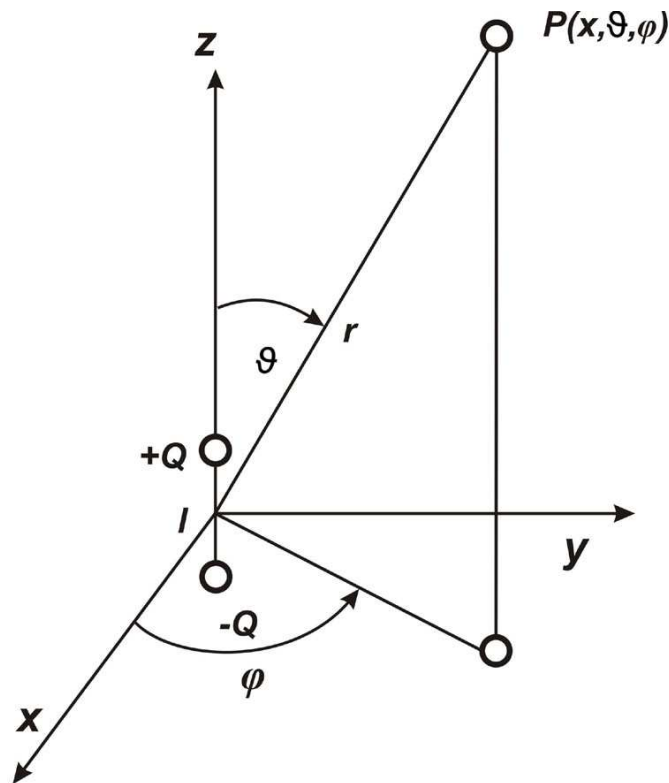
(8.21) és (8.22) a *retardált (késleltetett) potenciálok*. Abban különböznek a sztatikus-stacionárius potenciáloktól, hogy a potenciálértéket nem a vizsgált időpillanatban fennálló gerjesztés határozza meg, hanem az az érték, amelyet a gerjesztés $t - \frac{r}{v}$ időpontban, tehát $\frac{r}{v}$ idővel a vizsgálat előtt vett fel. Ez azt jelenti, hogy a véges terjedési sebesség miatt a gerjesztés a hatását késleltetve fejt ki.

A kifejezések a $t + \frac{r}{v}$ változóval is az inhomogén hullámegyenlet megoldását adják. Ezek az avanszált (siető) potenciálok, amelyekben az ok-okozati viszony időrendje felcserélődik. Létezésük mégsem vezet ellentmondásra. (Ennek magyarázata például a Simonyi–Zombory: Elméleti villamosságtan könyv 4.5. szakaszában található. Ezen magyarázat szerint is a retardált potenciálok elégségesek a tér keltésének vizsgálatára.)

A Hertz-dipólus sugárzása

A *Hertz-dipólus* rövid, l hosszúságú vezetékdarab, amelyen tiszta szinuszos időfüggésű áram folyik, amelynek értéke a vezeték hossza mentén állandó. Ez akkor lehetséges, ha vezeték hossza sokkal kisebb az adott frekvenciához tartozó hullámhossznál.

A vezeték végén az áramnak divergenciája van. Ezért fel kell tételeznünk, hogy a vezeték végén negatív és pozitív töltés halmozódik fel, azonos abszolút értékkel. Az elrendezés elektromos szempontból egy dipólus, amelynek momentuma szinuszosan változik (8.1. ábra).



8.1. ábra. Dipólus a koordináta-rendszer origójában

A Hertz-dipólus jelentősége, hogy vékony vezetékből kialakított (vonalszerű = lineáris) antenna kis szakasza helyettesíthető vele. Az egész antenna elektromágneses tere a dipólusok terének szuperpozíciója.

A dipólus nyomatéka

$$\mathbf{p} = \Re\{\mathbf{p}_0 e^{j\omega t}\} = lq = l\Re\{Q_0 e^{j\omega t}\}, \quad (8.23)$$

ahonnan a nyomaték időbeli változása

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \Re\{\mathbf{p}_0 j\omega e^{j\omega t}\} = l \frac{dq}{dt} = li = \Re\{I_0 e^{j\omega t}\}. \quad (8.24)$$

(8.23) és (8.24) összevetéséből:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{l} \frac{I_0}{j\omega}. \quad (8.25)$$

A vektorpotenciál (8.22) felhasználásával szabad térben ($v = c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \mathbf{l} = \Re \left\{ \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \cdot \frac{e^{j\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}}{r} \mathbf{l} \right\}. \quad (8.26)$$

A továbbiakban csak a (helyfüggő) komplex amplitúdókkal számolunk, az $e^{j\omega t}$ alakú időfüggő tényezőt elhagyjuk.

A (8.1) alapján

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \mathbf{A}. \quad (8.27)$$

Felhasználjuk a vektoranalízis azonosságát

$$\text{rot} [f(r) \mathbf{a}] = f(r) \text{rot} \mathbf{a} + \text{grad} f(r) \times \mathbf{a}. \quad (8.28)$$

Ezzel a mágneses térerősség

$$\mathbf{H} = \frac{I_0}{4\pi} \text{grad} \frac{e^{-j\omega \frac{r}{c}}}{r} \times \mathbf{l}, \quad (8.29)$$

mivel $\text{rot} \mathbf{l} = 0$. Bevezetve az $r_0 = \mathbf{r}/r$ egységvektort

$$\mathbf{H} = \frac{I_0}{4\pi} \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-j\omega \frac{r}{c}} [\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0]. \quad (8.30)$$

Az $\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0$ vektorszorzat merőleges a dipólus és a vizsgált pont felé mutató vektor által kifeszített síkra. Ebből következik, hogy a mágneses tér erővonalai kör alakúak, középpontjuk a dipólus tengelyén van.

A mágneses térerősség két részből áll. Az első tag a távolság első hatványával fordított arányban csökken, míg a második tag a távolság négyzetével fordított arányban. A második tagot *közeli térnek* nevezzük, az első tagot *távoli* vagy *sugárzási térnek*, mert a második tag csak kis távolságokban éreztetni hatását, még az első tag nagy távolságokban is. Az $1/r^2$ távolságfüggés a *Biot-Savart-törvénynek* felel meg.

A számítást egyszerűbb koordináták szerint végezni. A mágneses térerősség (8.30) kifejezése $|\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0| = l \sin \vartheta$ helyettesítéssel gömbi koordináta-rendszerben a következő komponensekhez vezet

$$H_r = 0,$$

$$H_{\vartheta} = 0,$$

$$H_{\varphi} = \frac{I_0 l}{4\pi} \left[\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right] \sin \vartheta e^{-j\beta r}, \quad (8.31)$$

$$\text{ahol } \beta = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}.$$

Az elektromos tér számítására az (I) *Maxwell-egyenletet* használjuk fel. A tiszta szinuszos gerjesztés következtében a komplex amplitúdókra felírt egyenletekben $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$ helyettesítéssel élünk. Az origón kívül nem folyik áram, tehát $\mathbf{J} = 0$.*

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \text{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\mu_0} \text{rot rot}\mathbf{A}. \quad (8.32)$$

(8.31) rotációját gömbi koordinátákban kiszámítva:

$$E_r = \frac{I_0 l}{4\pi} \left[\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{2}{r^2} - \frac{2j}{\omega\varepsilon_0 r^3} \right] \cos \vartheta e^{-j\beta r},$$

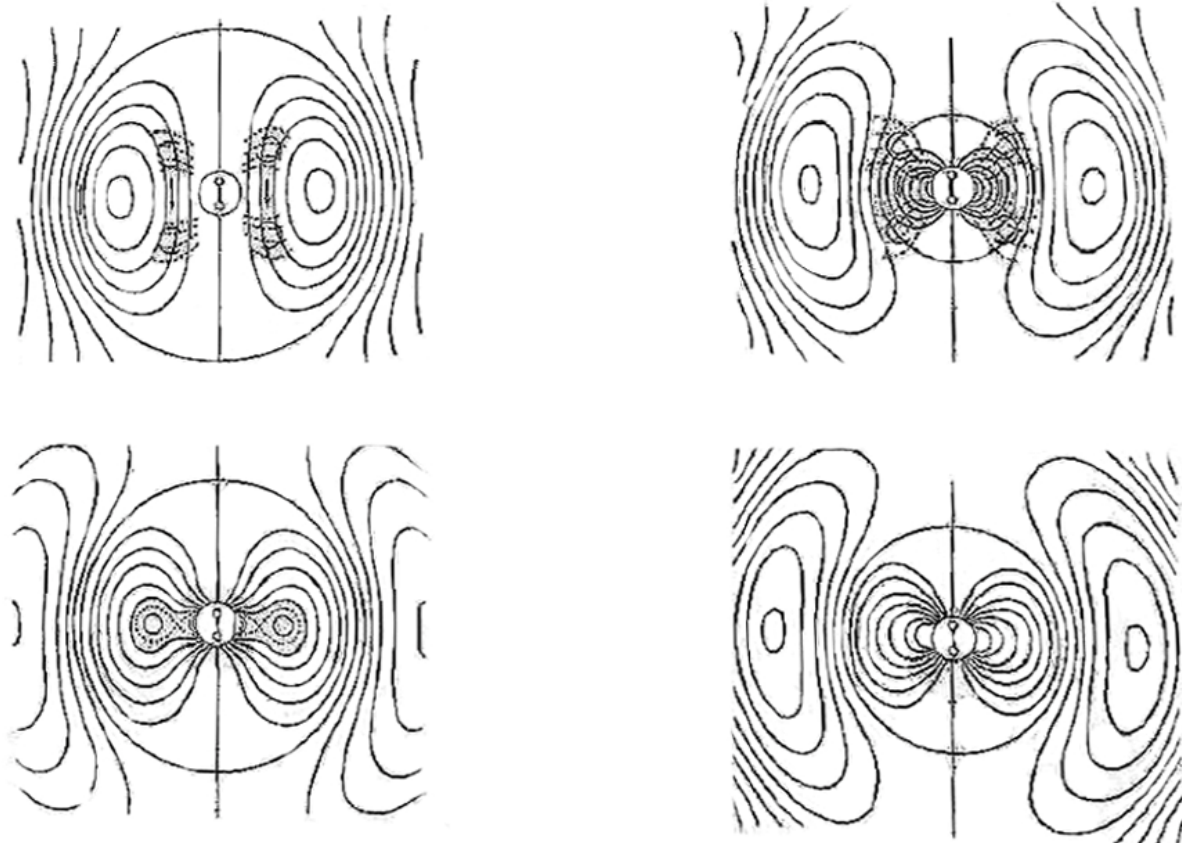
$$E_{\vartheta} = \frac{I_0 l}{4\pi} \left[\frac{j\omega\mu_0}{r} - \frac{j}{\omega\varepsilon_0 r^3} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{r^2} \right] \sin \vartheta e^{-j\beta r}, \quad (8.33)$$

$$E_{\varphi} = 0.$$

Az elektromos térerősség kifejezésében is találunk $1/r$ -rel arányos távoli teret. A közeli tér $1/r^3$ -beli arányos komponensei a sztatikus dipólus retardált teréből adódnak, míg az $1/r^2$ -tel arányos tagok a mágneses tér hasonló tagjainak változása által indukált elektromos teret írják le.

Az elektromos térnek csak a dipólus tengelyére fektetett síkban (meridiánsík) vannak komponensei, φ irányú komponense nincsen (8.2. ábra). Ezzel szemben a mágneses térnek csak φ irányú komponense van, amint az előzőekben beláttuk. Erővonalai körök, amelyek középpontja a dipólus tengelyén van. Az elektromos és mágneses térerősség azonos intenzitású helyei egybeesnek.

* Miért nem a (8.3) összefüggést használjuk? Azért, mert a kiszámítása jóval hosszadalmasabb és bizonyíthatóan (8.32)-re vezet. Vigyázat! Ez nem általános, más esetekben más megfontolások lehetnek érvényesek.



8.2. ábra. A villamos erővonalak a dipólusnál. Hertz 1888-ban megjelent cikkéből

A jelenség első részletes elméleti vizsgálatát *Heinrich Hertz* német fizikus 1888-ban publikálta, miután kísérleti úton először állított elő egyenes vezetéken folyó nagyfrekvenciás árammal (antennával) elektromágneses hullámot. Az ábrán az eredeti cikkből származó elektromos erővonalképek láthatók a négy, egymást negyed periódusnyi időben követő fázisban.

Jól látható, hogy a távoli térben az elektromos térerősségnek csak ϑ komponense van. Ezek a komponensek az antenna tengelyére merőleges irányban a legintenzívebbek. A $\sin \vartheta$ függés miatt az antenna tengelyének irányában nincs ϑ irányú komponens, így távoli tér sincs. Az erővonalak záródását a közeli tér r irányú komponensei teszik lehetővé.

Az erővonalaktól elvárjuk, hogy zártak legyenek, mert a térben (az antennán kívül) sehol sincsen töltés, a tér divergenciamentes.

A Hertz- dipólus távoli tere

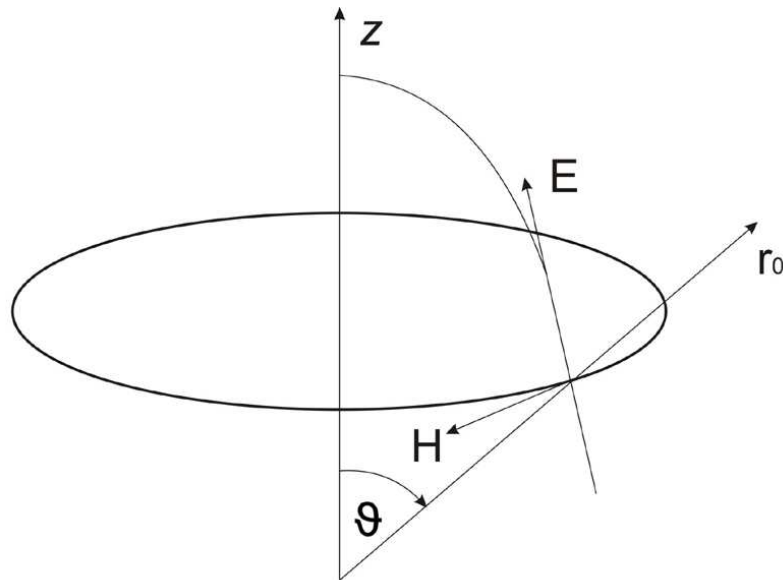
A távoli tér komponensei

$$E_{\vartheta} = \frac{I_0 l}{4\pi} \cdot \frac{j\omega\mu_0}{r} \sin \vartheta e^{-j\beta r}, \quad (8.34)$$

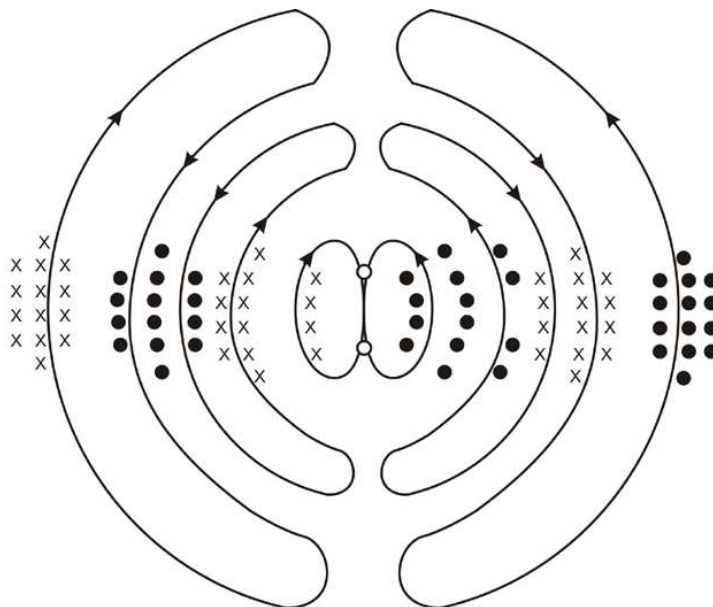
$$H_{\varphi} = \frac{I_0 l}{4\pi} \cdot \frac{j\beta}{r} \sin \vartheta e^{-j\beta r}. \quad (8.35)$$

A távoli tér komponensei egymásra merőleges vektorok (8.3. ábra). Miután az elektromos és mágneses tér között nincsen fáziskülönbség, a távoli térben a térerősségek maximumai helyben is egybeesnek (8.4. ábra). Az előző állítás azt is jelenti, hogy \mathbf{E} és \mathbf{H} amplitúdójának hányadosa mindenütt állandó mennyiség

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \frac{\omega\mu_0}{\beta} = c\mu_0 = \frac{\mu_0}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}. \quad (8.36)$$



8.3. ábra. A villamos és mágneses térerősség iránya a távoli térben

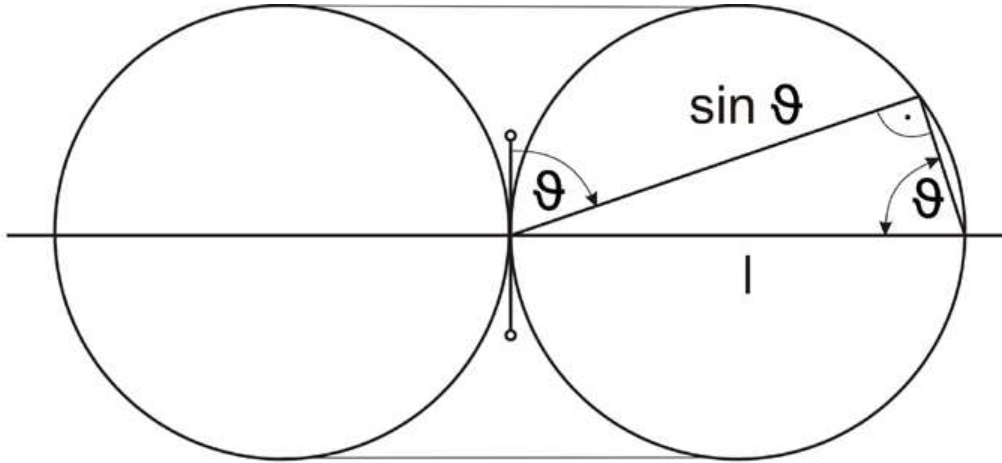


8.4. ábra. A villamos és mágneses térerősség maximális intenzitású helyei a térben egybeesnek

Esetünkben a rövid dipólus iránykarakterisztikája

$$F(\vartheta, \varphi) = \sin \vartheta \quad (8.44)$$

hengersizmetrikus, csak a ϑ függvénye (8.5. ábra).



8.5. ábra. A Hertz-dipólus sugárzási iránykarakterisztikája

A kisugárzott teljesítmény

A kisugárzott teljesítményt a távoli tér szállítja el az antenna környezetéből. Ha az $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ Poynting-vektort számítjuk, csak az $1/r$ -rel arányos komponensek adnak $1/r^2$ -tel arányos Poynting-vektort. Miután a felület, amelyen a teljesítmény átáramlik, a távolság növekedésekor r^2 -tel arányosan nő, csak a távoli tér komponensei által szállított teljesítmény nem csökken a távolság növekedésekor. Ez a távoli tér jelentősége. Minden más elektromágneses tér az antenna által kisugárzott távoli térnél gyorsabban csökken a távolság növekedésekor, ezért nem alkalmas a teljesítmény nagy távolságra szállítására.

Ezt előre bocsátva, számítsuk ki a távoli tér komponensei által létrehozott teljesítményáram sűrűségét, a Poynting-vektort, majd integráljuk azt az antennát körülvevő zárt felületre. Az előbbiek értelmében valamennyi zárt felületre azonos eredményt kell kapnunk. Ezért egyszerűség kedvéért egy gömbfelületre integrálunk. A távoli tér Poynting-vektora mindenütt merőleges erre a felületre.

A szinuszos időfüggés következtében komplex Poynting-vektorral kell számolnunk. Mivel a távoli tér komponensei merőlegesek egymásra és fázisban vannak, a komplex Poynting-vektor tiszta valós lesz és abszolút értéke

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{2} EH = \frac{1}{2} 60\pi \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 I_0^2 \sin^2 \vartheta, \quad (8.45)$$

$$P = \oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{2} 30\pi \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 I_0^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^2 \vartheta r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (8.46)$$

ahol $r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ a gömbfelület elemi darabja. A kifejezés integráljainak értéke

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi, \quad \int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{4}{3}. \quad (8.47)$$

A hatásos teljesítmény

$$P = \frac{1}{2} 30\pi \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_0^2 2\pi \frac{4}{3} = \frac{1}{2} I_0^2 \cdot 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (8.48)$$

Az R ellenálláson átfolyó I_0 amplitúdója áram hatásos teljesítménye

$$P = \frac{1}{2} I_0^2 R, \quad (8.49)$$

ahonnan a rövid antenna *sugárzási ellenállását* kapjuk

$$R_s = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (8.50)$$

A teljesítményt szolgáltató generátor számára az antenna a sugárzási ellenállással megegyező ellenállásnak látszik. A generátor nem „észleli”, hogy a teljesítmény nem disszipálódik, hanem a szabad térbe távozik.

Az antenna sugárzási ellenállása tehát az antenna hossza és a hullámhossz hányadosa négyzetével arányos. Egy dipóllal annál hatásosabban tudunk sugározni, minél hosszabb az antenna és minél kisebb a hullámhossz. A (8.50) összefüggés csak az $l \ll \lambda$ feltétel fennállása esetén érvényes.

Általánosan igaz, hogy nagyobb frekvencián, tehát rövidebb hullámhosszon ugyanakkora áramerősséggel nagyobb teljesítményt tudunk sugározni.

A sugárzási ellenállás sok vonatkozásban valódi ellenállásként viselkedik, például a távvezetőken fellépő reflexió szempontjából. Produkálja az úgynevezett ellenállásajt is.

Az antenna impedanciájának van képzetes része is. A közeli tér komponensei eltérő fázisúak. A belőlük számított komplex Poynting-vektor képzetes része jelzi, hogy a közeli térben van ide-oda áramló teljesítménylengés. Ennek hatására az antenna impedanciájában a sugárzási ellenálláson kívül reaktáns komponens is megjelenik. Értéke a Hertz-dipólus esetén értelmezhetetlen. Ennek oka a dipólus pontszerű kiterjedése és a tér erős szingularitása. Sugárzási reaktanciát csak véges térfogatú antennánál tudunk számítani a geometria ismeretében.

Az antenna irányítottsága az a tulajdonság, hogy egyes irányokban nagyobb, más irányokban kisebb vagy éppen semmilyen teljesítményt nem sugároz. Az antenna irányítottságát a D irányhatás jellemzi, ami a legnagyobb teljesítménysűrűség és kisugározott átlagos teljesítmény hányadosa

$$D = \frac{S_{\max}}{S_{\text{átl}}} = \frac{S_{\max}(r)}{P_{\text{sug}}/4\pi r^2}, \quad (8.51)$$

ahol a távoli térkomponensekkel számolunk. Hertz-dipólusra a (8.45) alapján

$$S_{\max} = 15\pi \frac{1}{r^2} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 I_0^2, \quad (8.52)$$

míg a kisugárzott teljesítmény (8.48)-ból

$$P = 40\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 I_0^2. \quad (8.53)$$

Mindezt (8.51)-be helyettesítve

$$D = 1,5. \quad (8.54)$$

Ez a Hertz-dipólus irányhatása, amely mennyiséget rendszerint logaritmikus egységben, decibelben fejezik ki

$$D^{\text{dB}} = 10 \lg D = 10 \lg 1,5 = 1,76 \text{ dB}.$$

Figyelem! Az antennák irányítottságának jellemzésére gyakran a G nyereséget használják. Ez abban különbözik az irányhatástól, hogy nem a kisugárzott, hanem az antennába táplált teljesítmény szerepel a hányadosban

$$G = \frac{S_{\max}(r)}{P_{\text{össz}}/4\pi r^2}, \quad (8.55)$$

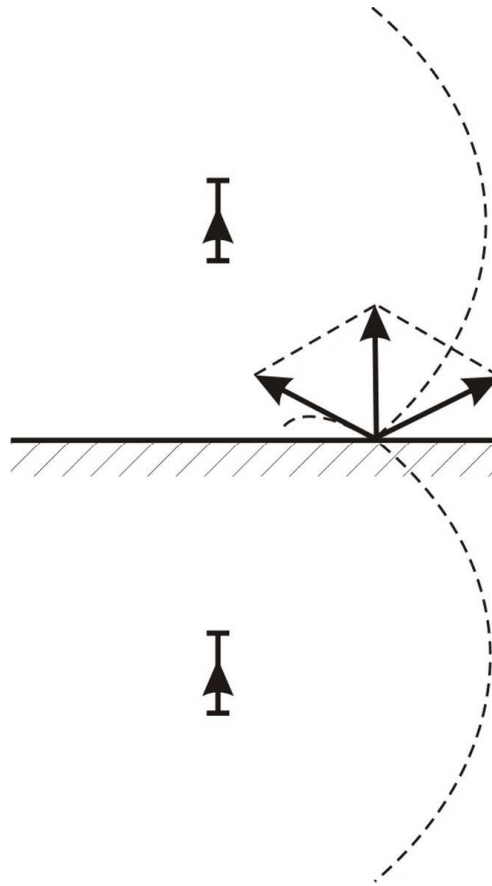
$P_{\text{össz}}$ a kisugárzott teljesítményen kívül az antenna veszteségeire fordított teljesítményt is tartalmazza. Jó vezetőképességű anyagból készült antennák esetén a nyereség és az irányhatás gyakorlatilag megegyezik.

A Föld hatása a tér kialakulására

Az antennához közeli földet végtelen jó vezetőképességűnek tekintjük. Ez a közelítés a frekvencia növekedésével egyre romlik, de kisebb frekvenciákon jó a közelítés.

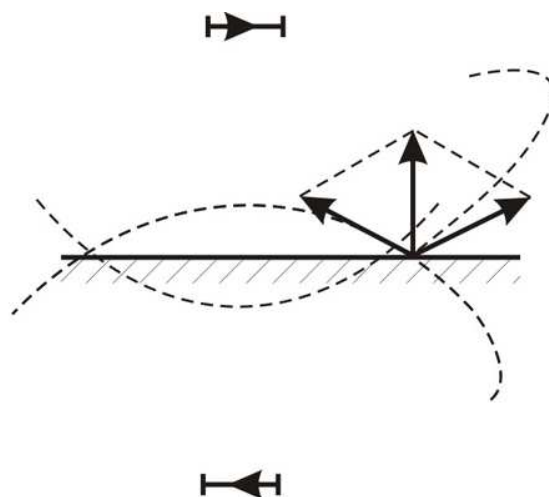
A végtelen jó vezetőképességű Föld felszínén az elektromos térerősségnek merőlegesnek kell lennie a felületre. Sík felület esetén ilyen teret az antenna alkalmas tükrözésével tudunk előállítani. Végeredményben a vezető felületen folyó áramok hatását alkalmasan választott helyettesítő töltéselrendezéssel írjuk le.

A vezetősíkra merőleges dipólus töltését az ismert módon tükrözve, a kialakuló tüköráram azonos irányban folyik az eredeti dipólus áramával. A két dipólus terének szuperpozíciója mindenütt merőleges a vezetőfelületre (8.6a ábra). Az eredő térnek csak a határoló felülettől az eredeti dipólust tartalmazó félterében van fizikai jelentése.

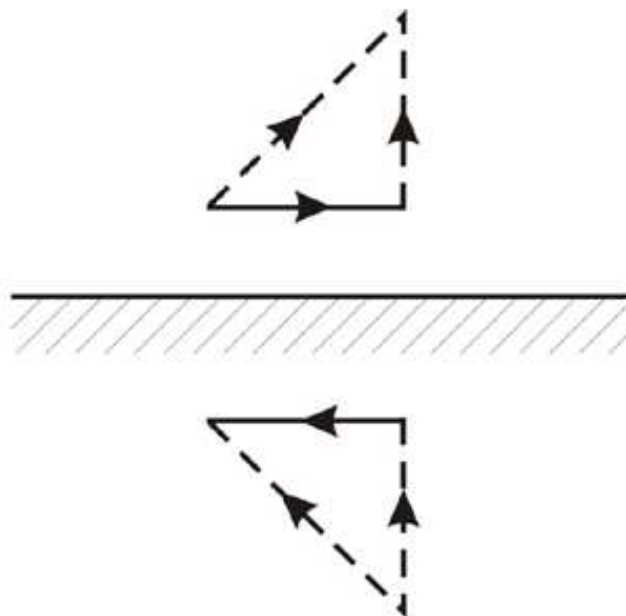


8.6a ábra. Függőleges dipólus tükörképében az áram azonos fázisban folyik

A vezetősíkkal párhuzamos dipólus tükörképében az eredetivel ellentétes irányú áram folyik (8.6b ábra). Tetszés szerinti pozícióban álló antenna egy, a felületre merőleges és egy, azzal párhuzamos komponensű árammal modellezhető (8.6c ábra).



8.6b ábra. Vízszintes dipólus tükörképében az áram ellenkező fázisban folyik



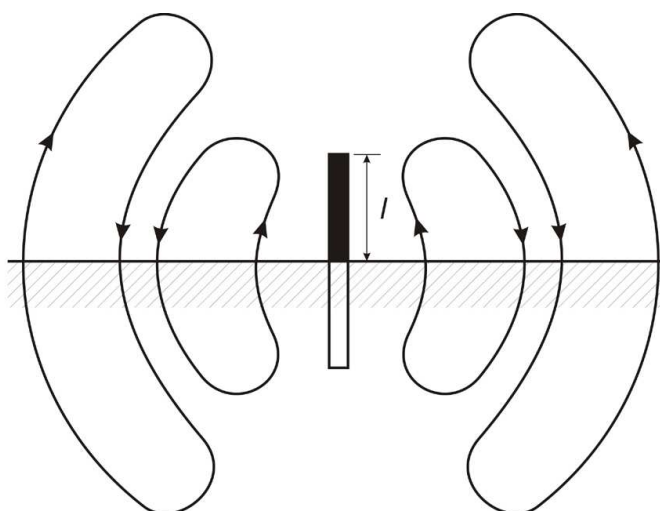
8.6c ábra. Ferde dipólus tükörképének függőleges komponensében az eredeti dipólus függőleges komponensével azonos fázisú, vízszintes komponensében pedig az eredeti dipólus vízszintes komponensével ellenkező fázisú áram folyik

Az eddigieket figyelembe véve vizsgálhatjuk a Földre állított rövid dipól sugárzási tulajdonságait (8.7. ábra). Az l hosszúságú dipólust tükörképével kiegészítve $2l$ hosszúságú antenna terével kell számolnunk, amelynek csak a Föld síkja feletti tere fizikai jelentésű.

(8.41) felhasználásával, és kivételesen effektív értékekre felírva az összefüggéseket:

$$E_{\text{eff}}^{\text{mV/m}} = 120\pi \frac{1}{r_{\text{km}}} \cdot \frac{l}{\lambda} I_{\text{eff}} \sin \vartheta, \quad (8.56)$$

ahol a távolságokat km-ben, a térerősséget mV/m-ben mérjük. A kifejezésben figyelembe vettük, hogy a tükörképpel együtt az antenna $2l$ hosszúságú.



8.7. ábra. A végtelen jó vezetőképességű sík befolyása a sugárzó tér kialakítására

A sugárzott teljesítmény kiszámításakor figyelembe kell vennünk, hogy a $2l$ „hosszúságú” antenna csak a felső térrészben sugároz energiát, ez a teljes, számított energiának csupán a fele

$$P = \frac{1}{2} 80\pi^2 \left(\frac{2l}{\lambda} \right)^2 I_{\text{eff}}^2 = 160\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 I_{\text{eff}}^2. \quad (8.57)$$

(8.56) és (8.57) összevetéséből némi számolással kapjuk, hogy

$$E_{\text{eff}}^{\text{mV/m}} = \frac{300}{r_{\text{km}}} \sqrt{P^{\text{kW}}}. \quad (8.58)$$

Az itt olvasható „háromszáz” formula a rádiótávközlés korai szakaszának általános képlete volt. A korabeli berendezések viszonylag nagy hullámhosszal dolgoztak, az antennák ezért „rövidek” voltak. Az áramerősség csak közelítőleg volt állandó, de a fenti összefüggés így is jó becslést adott a Földre állított függőleges antenna által létrehozott térerősségre.

A Földre állított rövid antenna sugárzási ellenállás a (8.57)-ből

$$R_s = \frac{P}{I_{\text{eff}}^2} = 160\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (8.59)$$

kétszerese a magában álló dipólénak.

Mivel a maximális teljesítménysűrűség kétszeres antennahossznál négyszeresre nő, a kisugárzott teljesítmény csak kétszeresére, az irányhatás $4/2=2$ -szeresére nő, azaz

$$D = 3,$$

illetve logaritmikus egységekben $10 \lg 2 = 3$ dB-lel nő, tehát

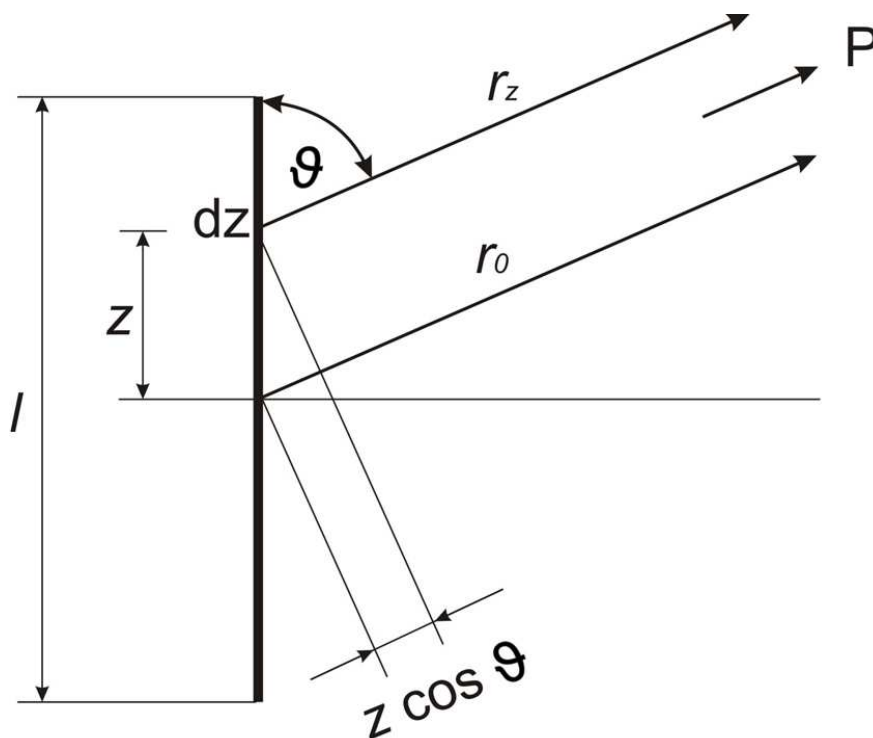
$$D^{\text{dB}} = 4,76 \text{ dB}.$$

Középen táplált egyenes huzalantennák tere

Vonalszerű (lineáris) antennák tere mindig előállítható Hertz-dipólusok terének szuperpozíciójaként.

Példaként nézzük az egyenes szimmetrikus dipólust. Az egyenes antenna (8.8. ábra) kicsiny dz hosszúságú darabja által keltett elektromos térerősség amplitúdója (8.42) figyelembevételével:

$$dE_{\vartheta} = j \frac{60\pi}{r_z \lambda} I(z) dz e^{-j\beta r_z} \sin \vartheta. \quad (8.60)$$



8.8. ábra. Tetszés szerinti árameloszlású egyenes antenna sugárzóterének megállapításához

Feltételezzük, hogy a P pont, ahol a távoli teret keressük, olyan messze van, hogy az antenna különböző pontjaiból odahúzott egyenesek párhuzamosak. Az ábrából leolvasható, hogy

$$r_z = r_0 - z \cos \vartheta,$$

ahol r_0 az antenna közepének távolsága a vizsgált ponttól.

Az r_z egymást követő közelítései:

- zérusrendű: $r_z \cong r_0$,
- elsőrendű: $r_z \cong r_0 - z \cos \vartheta$.

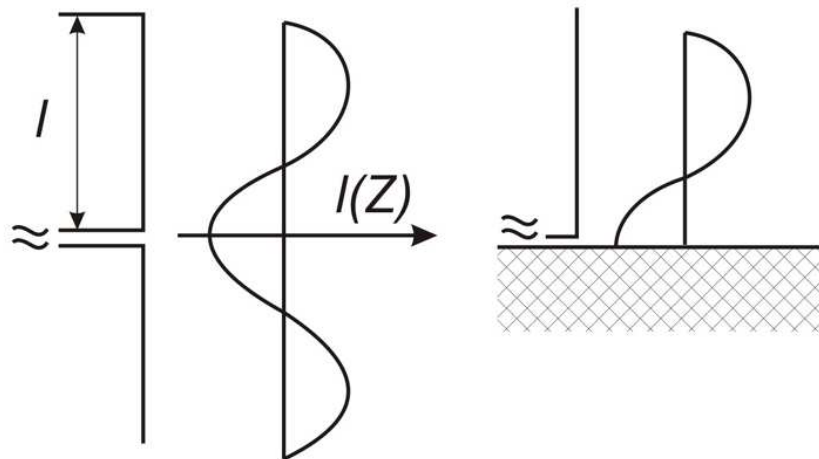
A (8.60) nevezőjében a zérusrendű közelítés megengedhető, de az exponenciális függvény kitevőjében nem. Az amplitúdó számításánál a hiba zérusrendű közelítéssel elenyésző, a fázisszámításnál nagyobb pontosság szükséges, ezért ott az elsőrendű kifejezést használjuk. Ezzel

$$dE_\vartheta = j \frac{60\pi}{r_0 \lambda} e^{-j\beta(r_0 - z \cos \vartheta)} \sin \vartheta. \quad (8.61)$$

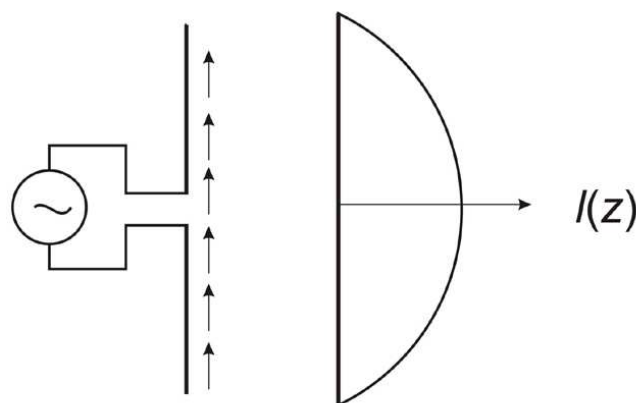
Az egyes Hertz-dipólusok terének eredőjét a fenti kifejezés integrálásával kapjuk

$$E_\vartheta = j \frac{60\pi}{\lambda} \cdot \frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0} \sin \vartheta \int_{-l/2}^{+l/2} I(z) e^{j\beta z \cos \vartheta} dz. \quad (8.62)$$

A kifejezés a távoli térben igen jó eredményt ad, ha ismerjük az antenna mentén az árameloszlást. Sajnos, ezt az eloszlást pontosan nem ismerjük! Jó közelítést kapunk, ha az antennát szakadással lezárt kinyitott tápvonalnak tekintjük, amelyen állóhullámok alakulnak ki, hiszen a vezetékvégeken az áram zérus. Feltételezzük, hogy ezek az állóhullámok ugyanolyan szinuszos eloszlásúak, mint a távvezetéken (8.9. ábra). Ez a közelítés igen jó például félhullám hosszúságú antennák esetében (8.10. ábra).



8.9. ábra. Jó vezető, földre helyezett antenna árameloszlása



8.10. ábra. Középen táplált szimmetrikus antenna árameloszlásának meghatározása a távvezeték-analógiával

Az árameloszlás

$$I(z) = \begin{cases} I_0 \sin \beta(l-z), & z > 0 \\ I_0 \sin \beta(l+z), & z < 0 \end{cases}, \quad (8.63)-(8.64)$$

vagy egyetlen összefüggésben:

$$I(z) = I_0 \sin \beta(l-|z|), \quad (8.65)$$

ahol az antenna hossza $2l$. Ezzel a szimmetrikus gerjesztést biztosítottuk.

(8.65)-öt behelyettesítve (8.62)-be, r_0 helyére a szokásos r -t írva, és némi rendezés után a következő összefüggéshez jutunk:

$$E_{\vartheta} = j \frac{120\pi I_0}{\lambda} \cdot \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin \vartheta \int_0^l \sin \beta(l-z) \cos(\beta z \cos \vartheta) dz. \quad (8.66)$$

Az integrálás – ritka eset – zárt alakban elvégezhető:

$$E_{\vartheta} = j60I_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r} \cdot \frac{\cos(\beta l \cos \vartheta) - \cos \beta l}{\sin \vartheta}. \quad (8.67)$$

Ha $l < 0,25\lambda$, az antenna rövidebb, mint fél hullámhossz, az I_0 árammaximum nincs az antennán. Ilyenkor a bemeneti $I(0)$ árammal számolhatunk, ahol

$$I(0) = I_0 \sin \beta l. \quad (8.68)$$

Ezzel

$$E_{\vartheta} = j60 \frac{I(0)}{\sin \beta l} \cdot \frac{e^{-j\beta r}}{r} \cdot \frac{\cos(\beta l \cos \vartheta) - \cos \beta l}{\sin \vartheta}. \quad (8.69)$$

(8.68), illetve (8.69) felhasználásával a szimmetrikusan táplált egyenes antennák (a szaknyelv ezeket is dipólusnak nevezi) iránykarakterisztikája, illetve sugárzási ellenállása és irányhatása számítható.

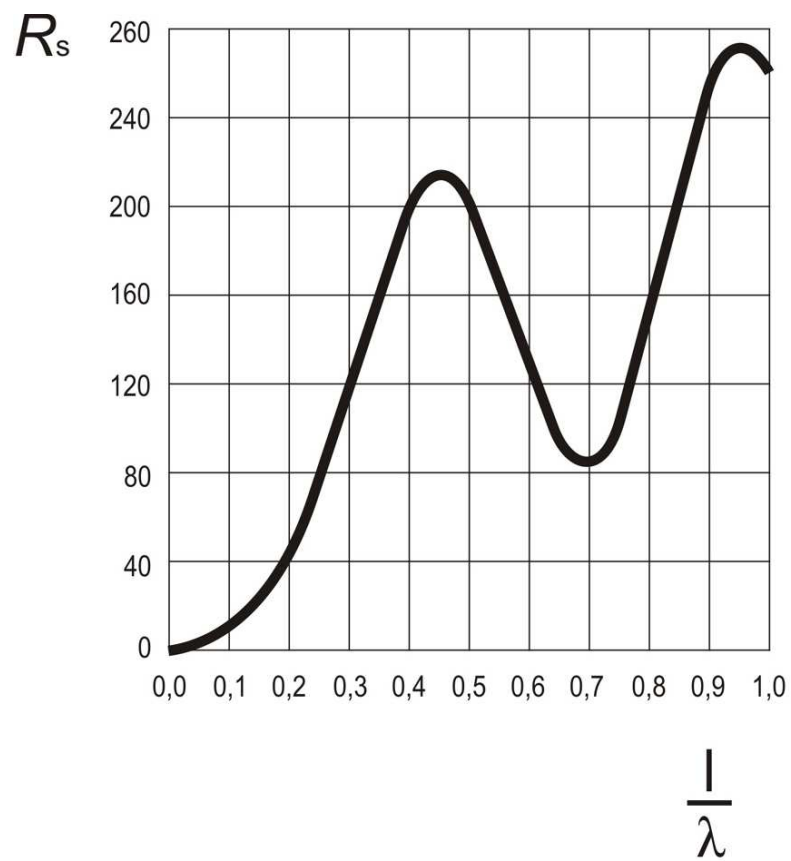
Az iránykarakterisztika számításához kimutatható, hogy a fő sugárzási irány $l/\lambda \leq 0,625$ esetén $\vartheta_{\max} = 90^\circ$, az antennára merőleges. Eddig az antennahosszig tehát

$$|E_{\max}| = 60I_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r} (1 - \cos \beta l), \quad (8.70)$$

és így az amplitúdó iránykarakterisztikája:

$$F(\vartheta) = \frac{\cos(\beta l \cos \vartheta) - \cos \beta l}{(1 - \cos \beta l) \sin \beta l}. \quad (8.71)$$

A sugárzási ellenállás és az irányhatás általában nem fejezhető ki zárt alakban, de numerikus integrálással meghatározható. Az eredményeket diagramon ábrázolva (8.11. ábra) látható, hogy például $l/\lambda = 0,25$ esetén $R_s = 73,2 \Omega$. Erre az antennahosszra az irányhatás $D = 1,64$ (2,15 dB).



8.11. ábra. A sugárzási ellenállás

9. ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK TERJEDÉSE

Síkhullámok

Keressük a *Maxwell-egyenletek* legegyszerűbb megoldását homogén, *izotróp* (az izotróp tulajdonság azt jelenti, hogy a közeg elektromágneses jellemzői irányfüggetlenek) közegben, töltések és áramok nélkül.

A Maxwell-egyenletek a következő alakot öltik:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{I}^*)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (\text{II}^*)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad (\text{III}^*)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0. \quad (\text{IV}^*)$$

Képezzük (II*) mindkét oldalának rotációját

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot}\mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div}\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}\mathbf{H}$$

(IV*) és (I*) behelyettesítésével a

$$\Delta\mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (9.1)$$

egyenletre jutunk.

Hasonló gondolatmenettel kapjuk \mathbf{H} -ra

$$\Delta\mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (9.2)$$

Az egyenletek homogén hulláme egyenletek. Keressük a megoldást olyan függvénnyel, ahol az x koordinátatengely irányában terjed a hullám. Ezért y és z irányban nincsen változás. Ekkor az egyenletek a következők lesznek

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2},$$

$$i = x, y, z \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2}.$$

A (9.3) összefüggésben szereplő térbeli dimenziós hullámegyenlet megoldását a távvezeték elméletéből ismerjük. Minden megoldás

$$\left. \begin{array}{l} E_i \\ H_i \end{array} \right\} = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right) \quad (9.4)$$

alakú, ahol $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{n}$.

A megoldás csak az x koordinátától, a terjedés irányától függ. Az arra merőleges síkban a térerősség értéke azonos. A hullámegyenlet megoldása a *síkhullám*.

Az elektromos és mágneses térre vonatkozó egyenletek megoldásai nem függetlenek egymástól. Az eredeti Maxwell-egyenletekből dönthető el, hogy mely megoldások tartoznak össze.

(Figyelem! Az egyenletek egyszerűsítésekor könnyebben megoldható egyenleteket kaptunk, de olyan információ veszett el, amit csak az eredeti egyenletek felhasználásával tudunk megszerezni!)

Írjuk az I. Maxwell-egyenletet a következő alakba:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (9.5)$$

Esetünkben $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$, míg (9.6)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \mp \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (9.7)$$

Ezt a (9.5) összefüggésbe helyettesítve:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mp \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mp \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}. \quad (9.8)$$

A kifejezés jobb oldalán álló determináns az \mathbf{i} egységvektor és a \mathbf{H} vektoriális szorzata

$$\mp \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{i} \times \mathbf{H}] = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (9.9)$$

A derivált mennyiségek egy időben állandó konstanstól eltekintve azonosak. Hullámjelenségnél az állandó (sztatikus, stacionárius) térerősségeknek nincs szerepe, tehát zérusnak tekinthetjük őket.

Felhasználva a sebesség kifejezését

$$\mathbf{i} \times \mathbf{H} = \mp \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E}, \quad (9.10)$$

illetve hasonló módon a II. Maxwell-egyenletből

$$\mathbf{i} \times \mathbf{E} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H}. \quad (9.11)$$

A felső előjel a pozitív, az alsó előjel a negatív irányba terjedő hullám esetén érvényes.

A (9.10) és (9.11) egyenletekből a homogén és *izotróp* (és veszteségmentes) közegben terjedő síkhullám következő tulajdonságai olvashatók ki:

a) az elektromos és mágneses térerősség, valamint a terjedés irányába mutató vektor kölcsönösen merőleges egymásra és ebben a sorrendben (\mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{i}) jobbsodrású rendszert alkotnak;

b) az elektromos és mágneses térerősség vektora abszolút értékének hányadosa az egy irányban terjedő hullám bármely pontjában azonos

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_0, \quad (9.12)$$

ami a közeg *hullámimpedanciája*.

Vákuumban

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 377 \, \Omega \quad (\cong 120\pi \, \Omega). \quad (9.13)$$

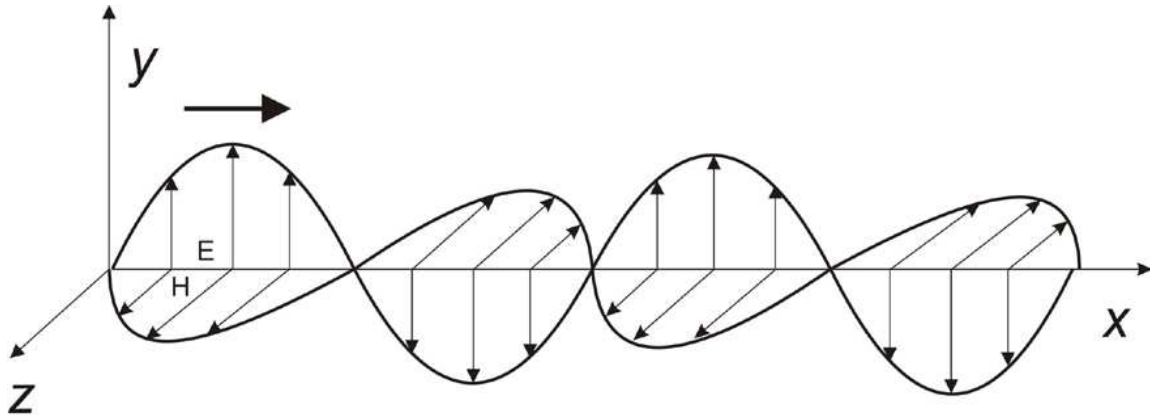
Az a) tulajdonság jelentése, hogy a síkhullám *transzverzális hullám*, azaz a térerősség merőleges a terjedés irányára. Miután ez mindkét térerősségre igaz, az elektromágneses síkhullámot transzverzális elektromos-mágneses hullámnak nevezzük. Rövid jelölése: TEM. Tiszta szinuszos időbeli lefolyás esetén az x tengely mentén haladó hullám térerősségei a következő módon változnak

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{j\omega \left(t \mp \frac{x}{v} \right)}, \quad (9.14)$$

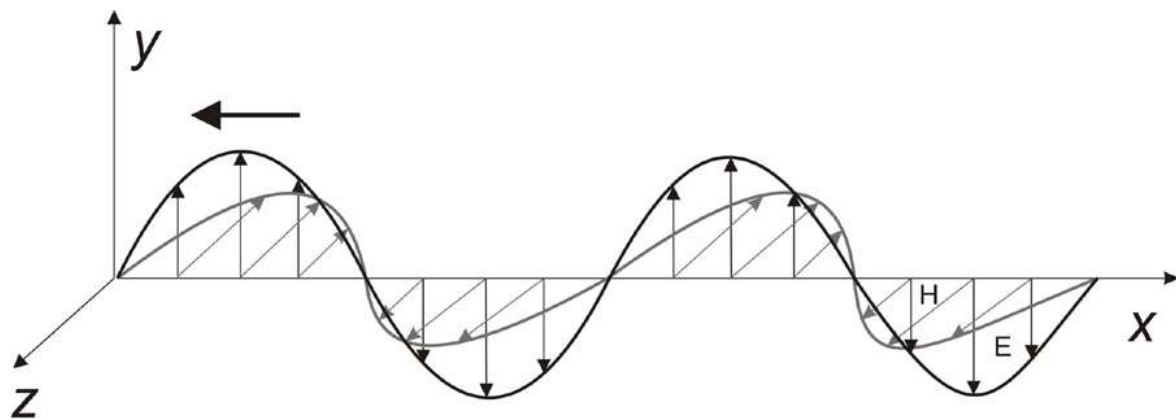
$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{j\omega\left(t \mp \frac{x}{v}\right)}. \quad (9.15)$$

Ezek a hullámok a 9.1a és 9.1b ábrán láthatók.

A hullámok képe pontosan megegyezik Maxwell 1873-ban megjelent művének, „*A Treatise on Electricity and Magnetism*” (Értekezés az elektromosságról és mágnességről) egyik ábrájával. Maxwell az 1865-ben írt tanulmányában kifejtette, hogy a fény vélhetően elektromágneses hullám, de a *Treatise* megjelenése idejében ez az erős sejtés bizonyossággá vált számára.



9.1a ábra. A villamos és a mágneses térerősség térbeli eloszlása síkhullámban, ha a hullám jobbra halad



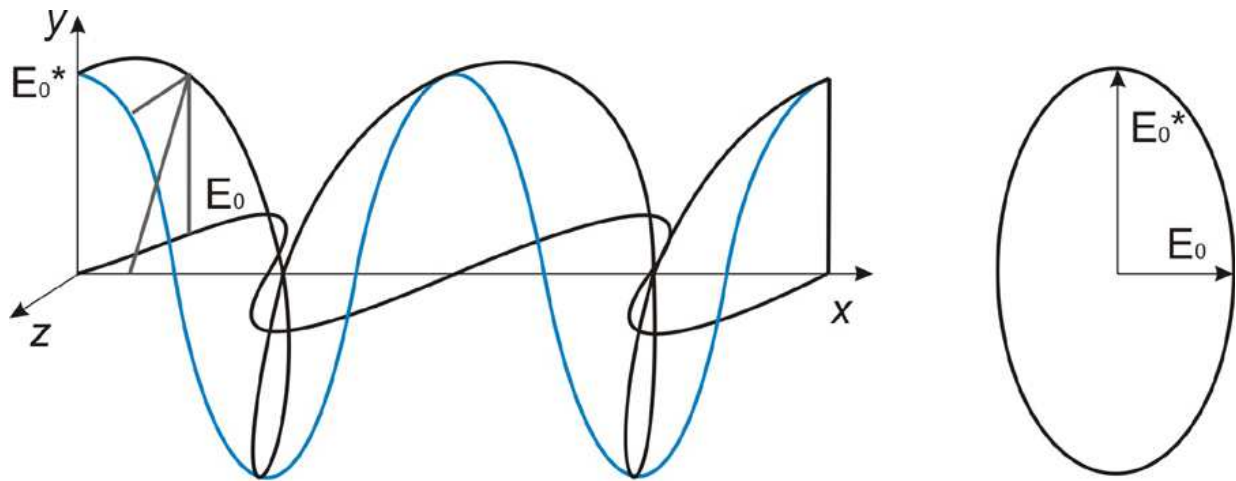
9.1b ábra. A villamos és a mágneses térerősség térbeli eloszlása síkhullámban, ha a hullám balra halad

Foglaljuk össze a tulajdonságokat, amelyek ezt alátámasztják:

- a terjedés sebessége szabad térben közelítőleg megegyezik a *fénysebesség* értékével;
- a fény hullámjelenség, amit az *interferencia* és *elhajlás* bizonyít;
- a fény transzverzális hullám, amit a *polarizáció* jelensége bizonyít.

A TEM-hullámok polarizációját az a sík jellemzi (polarizáció síkja), amelyet az \mathbf{E} vektor és a terjedés iránya kijelölnek. Egy irányba haladó, azonos hullámhosszú síkhullámok

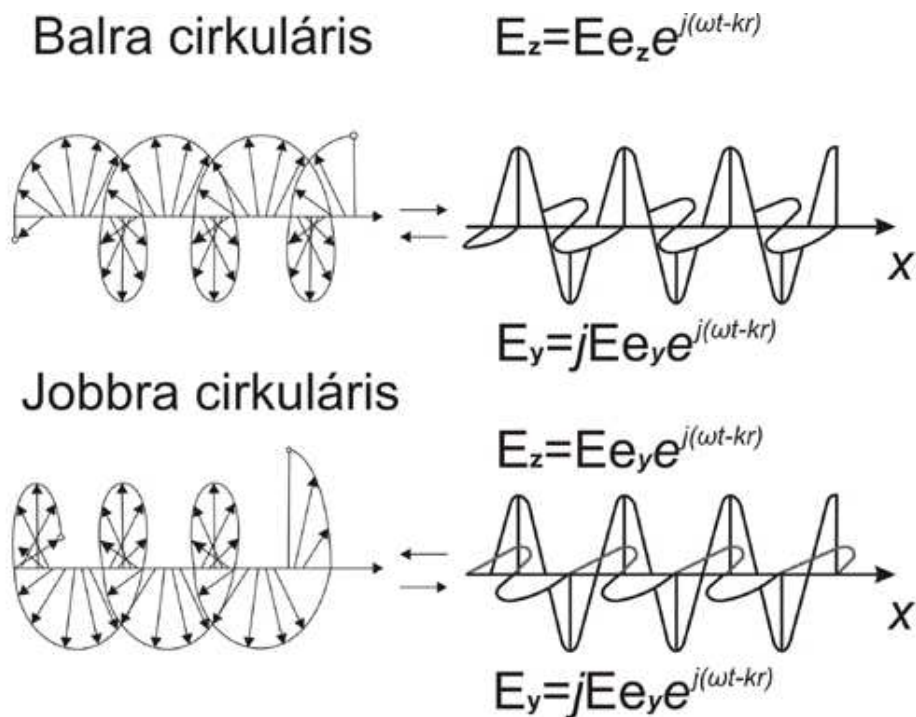
szuperpozíciója is síkhullám. Két, egymásra merőleges síkban polározott és egymáshoz képest fázisban eltoltt azonos irányban haladó szinuszos síkhullám eredője olyan hullám, amelyben \mathbf{E} forog és hossza is változik: végpontja egy elliptikus csavarvonalat ír le (9.2a ábra).



9.2a ábra. Elliptikusan polározott hullám

Ez a hullámforma az *elliptikusan polározott* hullám. Figyeljük meg: a TEM tulajdonság most sem változik!

Speciális esetben a forgó elektromos vektor a hosszát nem változtatja. Ekkor végpontja a terjedés során állandó sugarú (cirkuláris) csavarvonalat ír le. Ez a *cirkulárisan (körösen) polározott* hullám esete (9.2b ábra).



9.2b ábra. A cirkulárisan polározott hullámok különböző fázisú, de azonos amplitúdójú lineárisan polározott hullámokból tevődnek összes. Eredőjük ismét lineárisan polározott hullám

Összefoglalva: sík, elliptikus és cirkuláris polarizációt különböztetünk meg. A két utóbbi előállítható sík polarizációjú hullámok szuperpozíciójaként. A síkban polározott fénycsillag előállítására, illetve detektálására jól ismert volt már Maxwell előtt is.

Kételyt az úgynevezett *Maxwell-összefüggés* okozott. A (9.4) egyenlet törésmutatója, a gyakorlatban optikailag átlátszatlan ferromágneses anyagok kivételével $\mu_r = 1$ helyettesítéssel

$$n = \sqrt{\epsilon_r}. \quad (9.16)$$

Maxwell idejében a következő adatokat ismerték, például vízre: $n = 1,33$, $\epsilon_r = 80$. Az ellentmondás okát ma már tudjuk: az ϵ_r sztatikus mérés eredményeként született, ugyanakkor a permittivitás frekvenciafüggő. Ma a (9.16) Maxwell-összefüggést a teljes spektrumban mérésrel igazolni tudjuk.

A „teljes spektrum” felveti a Maxwell-egyenletek érvényességének határait. Ezeket a határokat a növekvő frekvenciáknál a kvantumos hatások megjelenése okozza. A kvantumjelenségeket a Maxwell-egyenletek már nem írják le helyesen.

A síkhullámban terjedő energia a *Poynting-vektor* segítségével könnyen számítható. A kölcsönös merőlegességből következik, hogy a vektor abszolút értéke a térerősségvektorok abszolút értékének szorzata, és iránya a terjedési irány. Értéke:

$$|\mathbf{S}| = |\mathbf{E}||\mathbf{H}| = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H^2 \right] = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \cdot \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2). \quad (9.17)$$

A magyarázat egyszerű: a felületegységen időegység alatt áthaladó energia éppen az egységnyi felületű, v hosszúságú hasámban található energia.

Síkhullám nem létezik. A (9.17) szerint a terjedés irányára merőleges végtelen kiterjedésű síkon végtelen lenne az átáramló teljesítmény, ami fizikailag lehetetlen. A síkhullámmal foglalkozunk két ok miatt. A *gyakorlati* ok közelítőleg létezik, véges kiterjedésben. Az antennák tárgyalásánál láttuk, hogy a távoli térkomponensek tulajdonságai azonosak a síkhullám terének tulajdonságaival. Ezért különösen a fő sugárzási irány környezetében, véges felületen, elegendő távolságban a hullám közelíthető síkhullámmal. Ezért például az adótól távoli vételi tulajdonságok számításánál a hullámokat (a vevőantenna környezetében) síkhullámnak tekintjük.

A *pedagógiai ok*: a síkhullám a legegyszerűbb, a Maxwell-egyenleteknek eleget tevő elektromágneses hullám. Ezért különösen alkalmas az elektromágneses hullámok tulajdonságainak bemutatására. Maxwell már 1865-ben leírta az elektromágneses hullám tulajdonságait, húsz évvel később 1886-ban *Heinrich Hertz* mesterségesen elő tudta állítani. Maxwell és az elmélet háttérét képező megfontolások nem adtak útmutatást a hullámok keltésére. Hertz felkészültsége kellett az elmélet megértéséhez, amely az áramot és a töltést úgy rendelte felhasználni, hogy a gerjesztésről „leszakadó” elektromágneses hullám megszülessen.

A látható fény frekvenciáján a hullámok keltése olyan mikrofizikai folyamatok eredménye, amelyekre a *fenomenologikus*, a jelenségeket makroszkopikus szinten leíró Maxwell-elmélet nem adott közvetlen magyarázatot.

A síkhullámok távvezetékmodellje

Ha a (9.1) és (9.2) egyenletek levezetésénél az eltolási áram mellett a $\sigma \mathbf{E}$ vezetési áramot is figyelembe vesszük, az egyenletek alakja kismértékben módosul. Például az elektromos térerősségre és csak x irányú terjedésre

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (9.18)$$

Hasonlítsuk ezt össze a veszteséges távvezeték feszültségére felírt (7.13) egyenlettel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (CR + GL) \frac{\partial u}{\partial t} - LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (9.19)$$

Hasonló egyenleteknek tesz eleget \mathbf{H} és i . Az egyenletekből a következő analógia olvasható ki

$$\mathbf{E} \rightarrow u, \quad \mu \rightarrow L, \quad \varepsilon \rightarrow C, \quad \sigma \rightarrow G, \quad R \rightarrow 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{H} \rightarrow i. \quad (9.20)$$

Ez az analógia az alapegyenletekre is igaz. x irányú terjedés esetén \mathbf{E} -nek csak y irányú, \mathbf{H} -nak csak z irányú komponense van. Az I. és II. Maxwell-egyenlet és az analóg távíróegyenletek a következők

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_z}{\partial x} &= \sigma E_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}; & -\frac{\partial i}{\partial x} &= Gu + C \frac{\partial u}{\partial t}, \\ -\frac{\partial E_y}{\partial x} &= \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}; & -\frac{\partial u}{\partial x} &= Ri + L \frac{\partial i}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9.21)$$

A szinuszos váltakozású hullámokra felírt egyenletet analógiájából következik, hogy például a terjedési együttható és a hullámimpedancia a síkhullámokra is definiálható:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}, \quad (9.22)$$

$$\frac{E_y^+}{H_z^+} = Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}, \quad (9.23)$$

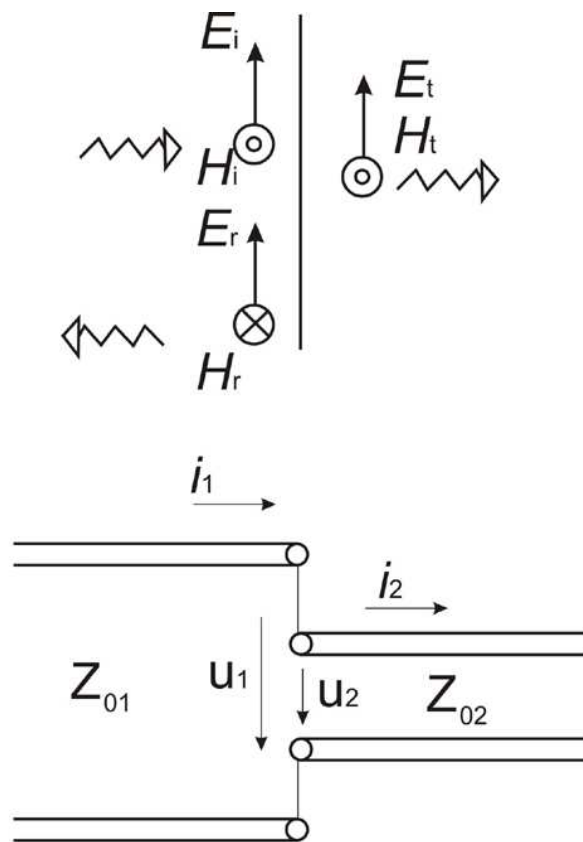
illetve veszteségmentes esetben

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}, \quad (9.24)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (9.25)$$

Az analógia akkor is alkalmazható, ha a közeg inhomogén, de inhomogenitása csak x -től függ. A különböző tulajdonságú térrészeket elválasztó felületek ilyenkor merőlegesek a terjedés irányára. Következésképpen \mathbf{E} és \mathbf{H} párhuzamosak az elválasztó síkkal. Ezért a

tangenciális komponensek folytonossága és a távvezetékmodell folytonossági feltételei megfeleltethetők egymásnak (9.3. ábra).



9.3. ábra. Merőleges beesésű távvezeték modellje

$$\begin{aligned} E_{t1} &= E_{t2}; & U_1 &= U_2, \\ H_{t1} &= H_{t2}; & I_1 &= I_2. \end{aligned} \quad (9.26)$$

A beeső hullám reflexiója az analóg távvezetékmodell alapján könnyen számítható.

A reflexió tényező

$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{01} + Z_{01}}. \quad (9.27)$$

A transzmissziós tényező

$$t = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}}. \quad (9.28)$$

A két mennyiség láthatóan nem független

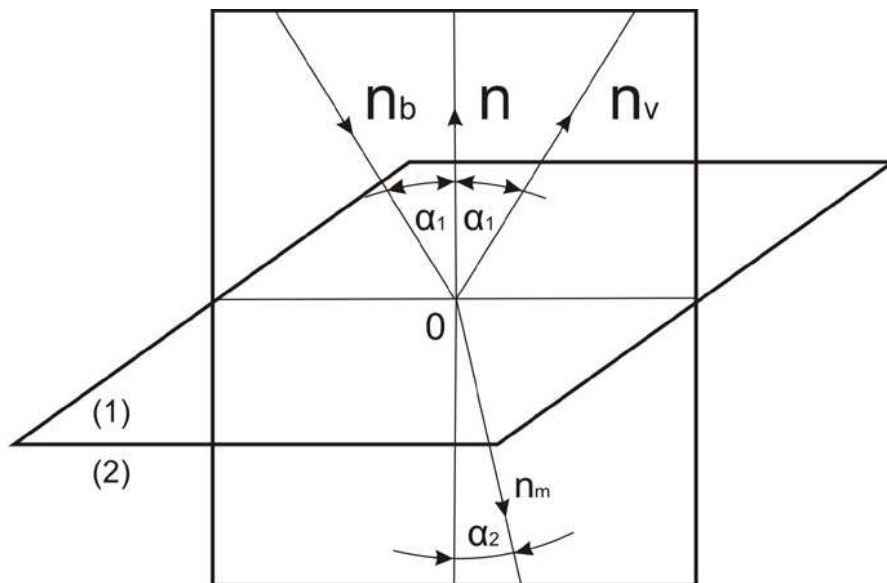
$$t = 1 + r. \quad (9.29)$$

A kifejezés fizikai tartalma éppen a tangenciális komponensek folytonosságát fejezi ki

$$E_t = E_i + E_r. \quad (9.30)$$

Merőleges beesés esetén a síkhullám visszaverődése és behatolása a távvezetékmodell és az impedancia alkalmazásával tárgyalható.

Ferde beesés esetén a hullám felbontható a határfelületre merőlegesen haladó és azzal párhuzamosan haladó hullámra. A folytonossági feltételek teljesítését is figyelembe véve a következő összefüggésekre jutunk. A 9.4. ábrán tüntetjük fel a beeső, visszaverődött és a közegbe hatoló hullámok terjedési irányát, és a beesési merőlegessel (\mathbf{n} vektor) bezárt szögét.



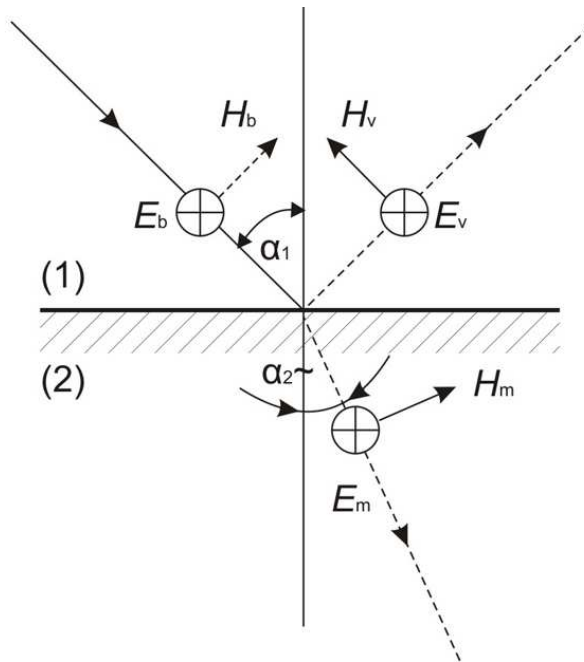
9.4. ábra. Síkhullámok töréstörvényének levezetéséhez

A folytonossági feltételek kielégítése megköveteli, hogy a felülettel párhuzamosan haladó komponens fázissebessége azonos legyen a két közegben. Ennek közvetlen következménye a *Descartes–Snell-féle törési törvény*.

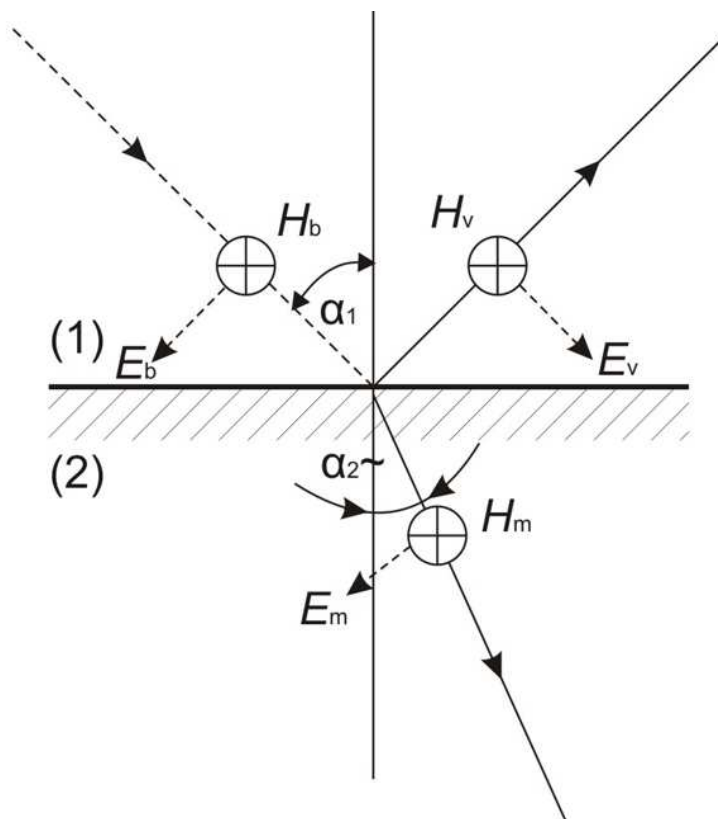
$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (9.31)$$

ahol n_1 és n_2 a közegek törésmutatója.

A folytonossági feltételek érvényesítéséhez figyelembe kell vennünk a hullám polarizációját. A polarizációt a belső hullám terjedési iránya (\mathbf{n}_b) és a beesési merőleges (\mathbf{n}) által meghatározott síkhoz viszonyítjuk. Ebben az értelemben „merőleges” (9.5. ábra) és „párhuzamos” (9.6. ábra) polarizáció van.



9.5. ábra. A villamos térerősség merőleges a beesési síkra



9.6. ábra. A villamos térerősség a beesési síkban fekszik

Merőleges polarizációnál az elektromos térre vonatkozó folytonossági feltétel

$$E_b + E_v = E_m . \quad (9.32)$$

Nem túl bonyolult számítással

$$\frac{E_v}{E_b} = \frac{\cos \alpha_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2} - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \sin^2 \alpha_1}}{\cos \alpha_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2} - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \sin^2 \alpha_1}}. \quad (9.33)$$

Párhuzamos polarizációnál a folytonossági feltétel a tangenciális komponensre

$$(E_b + E_v) \cos \alpha_1 = E_m \cos \alpha_2. \quad (9.34)$$

Ebből

$$\frac{E_v}{E_b} = \frac{\cos \alpha_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_1} - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 \sin^2 \alpha_1}}{\cos \alpha_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_1} - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 \sin^2 \alpha_1}}. \quad (9.35)$$

(9.33)–(9.35) a *Fresnel-képletek*, a visszaverődött hullám térerősségét megadó összefüggések.

Érdekes eset, ha a Fresnel-képletben a számláló eltűnik. Ilyenkor a visszavert hullám

amplitúdója zérus, nincs visszaverődés.

Fizikailag a $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ esetben ez csak párhuzamos polarizációjú beeséssel következhet be.

Ekkor

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (9.36)$$

Az így definiált szöget *Brewster-szögnek* nevezzük.

Különleges eset állhat elő, ha $n_2 < n_1$, azaz $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, és a beesési szög nagyobb, mint a következő egyenlet által definiált határszög:

$$\sin \alpha_1 > \sin \alpha_h = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (9.37)$$

A (9.31) egyenletből következik, hogy

$$\sin \alpha_2 = \sin \alpha_1 \frac{n_1}{n_2} > \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{n_1}{n_2} = 1. \quad (9.38)$$

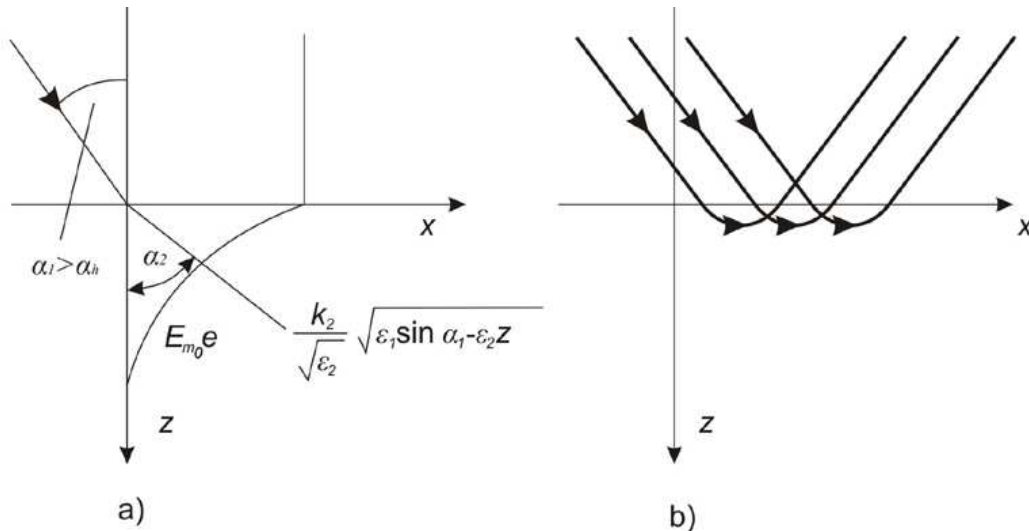
Ez az összefüggés valós α_2 szöggel nem elégíthető ki. A (9.38)-ból

$$\cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_1 \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)} = -j \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} \sqrt{\epsilon_1 \sin^2 \alpha_1 - \epsilon_2}. \quad (9.39)$$

A megtört hullámot

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_{m0} e^{j(\omega t - \beta \mathbf{n}_m \mathbf{r})} \quad (9.40)$$

alakban keressük, ahol \mathbf{n}_m a megtört hullám terjedési irányába mutató egységvektor, \mathbf{r} a helyvektor a beesési síkban.



9.7. ábra. Teljes visszaverődés

- a) Az E_{m0} amplitúdó a 2. közegben exponenciálisan eltűnik, z irányban nincs hullámterjedés
b) A sugarak útjának ábrázolása

Figyelembe véve, hogy a 9.7. ábra koordináta-rendszerében

$$\beta_2 \mathbf{n}_m \mathbf{r} = \beta_2 (x \sin \alpha_2 + z \cos \alpha_2), \quad (9.41)$$

az elektromos térerősség a következő alakba írható:

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_{m0} e^{j\omega t} e^{-j\beta_2 \left(x \sin \alpha_2 - \frac{j}{\sqrt{\epsilon_2}} \sqrt{\epsilon_1 \sin^2 \alpha_1 - \epsilon_2} \cdot z \right)} = \mathbf{E}_{m0} e^{j(\omega t - \beta_2 x \sin \alpha_2)} e^{-\frac{\beta_2}{\sqrt{\epsilon_2}} \sqrt{\epsilon_1 \sin^2 \alpha_1 - \epsilon_2} \cdot z}. \quad (9.42)$$

A „megtört” hullám azonos fázisú és azonos amplitúdójú síkjai nem esnek egybe. Utóbbiak párhuzamosak a határoló síkkal. A határoló síkra merőleges irányban nincs terjedés a közegben, az amplitúdó exponenciálisan eltűnik. Az ilyen típusú hullámot *inhomogén* síkhullámnak nevezzük.

A jelenséget a *teljes visszaverődés* (totálreflexió). Érdekes eredményünk, hogy a hullám teljes visszaverődésénél is behatol a ritkább közegbe, csak a felülettől távolabb gyakorlatilag megszűnik.

A síkhullámok vezető közegben

A véges vezetőképességű közegben a hullámeqyenlet tartalmazni fogja a veszteséget reprezentáló, σ vezetőképességgel felírt tagot. A távvezetékmodell alapján a terjedési együttható és a közeg hullámimpedanciája

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta, \quad (9.43)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}. \quad (9.44)$$

A hullám amplitúdója a terjedés irányában exponenciálisan csillapodik. Pozitív irányban terjedő hullámra:

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}, \quad (9.45)$$

ahol (9.43) alapján

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} - 1 \right)}; \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} + 1 \right)}. \quad (9.46)$$

A $\sigma/\omega\varepsilon$ viszonytól függ, hogy a közeg mennyire tekinthető vezetónak. Ez a vezetési áram-sűrűség és az eltolási áramsűrűség hányadosa. A frekvencia növekedésével a közegek viselkedése egyre inkább szigetelő jellegű. Igen nagy frekvencián a hullámparaméterek a kis veszteségű távvezeték tulajdonságával rendelkeznek:

$$\alpha = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \beta = \omega \sqrt{\varepsilon\mu \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2 \right]}, \quad (9.47)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon} \right)}. \quad (9.48)$$

A fázissebesség

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2 \right]} \quad (9.49)$$

mindig kisebb a veszteségmentes közegben mértnél. Fémek esetében $\sigma \gg \omega\varepsilon$. Ekkor jó közelítéssel

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} = \frac{1}{\delta}, \quad (9.50)$$

ahol δ a behatolási mélység. A térerősségek amplitúdója exponenciálisan csökken és δ távolságban a felületen mért e része.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j\omega\left(t - \frac{x}{\delta\omega}\right)}. \quad (9.51)$$

A fázissebesség, $v_f = \delta\omega$ általában jóval kisebb a fénysebességnél.

A hullámhossz

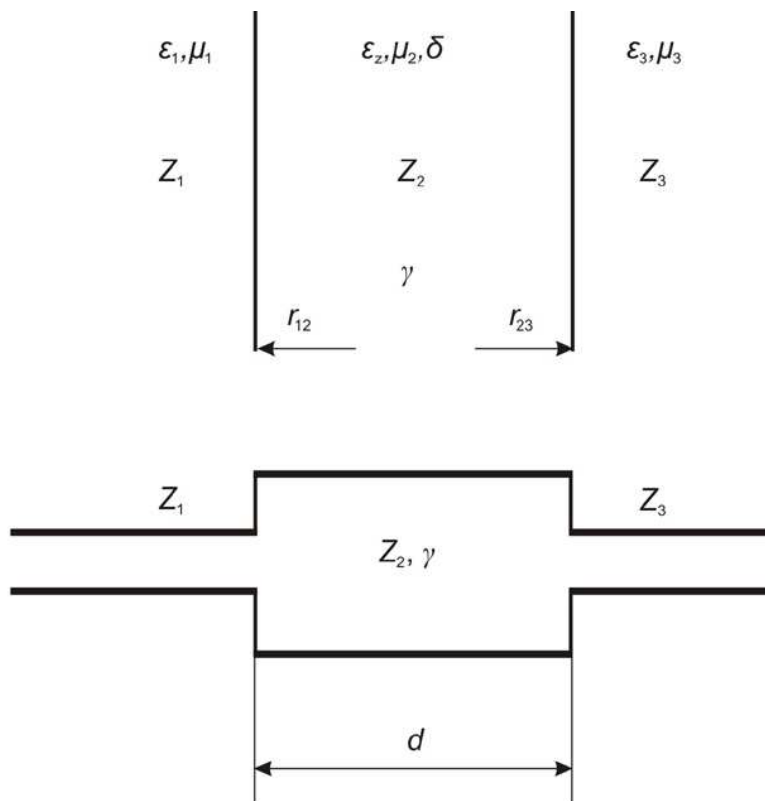
$$\lambda = 2\pi\delta. \quad (9.52)$$

Ez azt jelenti, hogy egy hullámhossznyi távolságban a felülettől a hullám amplitúdója $e^{-2\pi} = 0,002$ -ed részére csökken, gyakorlatilag eltűnik.

A hullámimpedancia:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sigma\delta}. \quad (9.53)$$

A jól vezető anyagok, fémek azon tulajdonságát, hogy bennük az elektromágneses hullám intenzitása igen gyorsan csökken, felhasználjuk árnyékolásra. Az árnyékolás egy térrész elszigetelése az elektromágneses hatásoktól. Ennek lehetséges megoldása az árnyékolandó térfogat körülvétele jól vezető fémlemezzel. Az árnyékolás hatásfokát síkhullám csillapításával modellezzük (9.8. ábra).



9.8. ábra. Árnyékolós távvezeték modellje

A távvezetékmodell segítségével a d vastagságú réteg eredő transzmissziós tényezője

$$T = \frac{E_{ki}}{E_{be}} = \frac{t_{12}t_{23}e^{-\gamma d}}{1 - r_{21}r_{23}e^{-2\gamma d}}, \quad (9.54)$$

ahol

$$t_{12} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1},$$

$$t_{23} = \frac{2Z_3}{Z_3 + Z_2},$$

$$r_{21} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2},$$

$$r_{23} = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2}.$$

Az árnyékolás hatásosságát T abszolút reciprokának logaritmusos egységben kifejezett számértéke adja

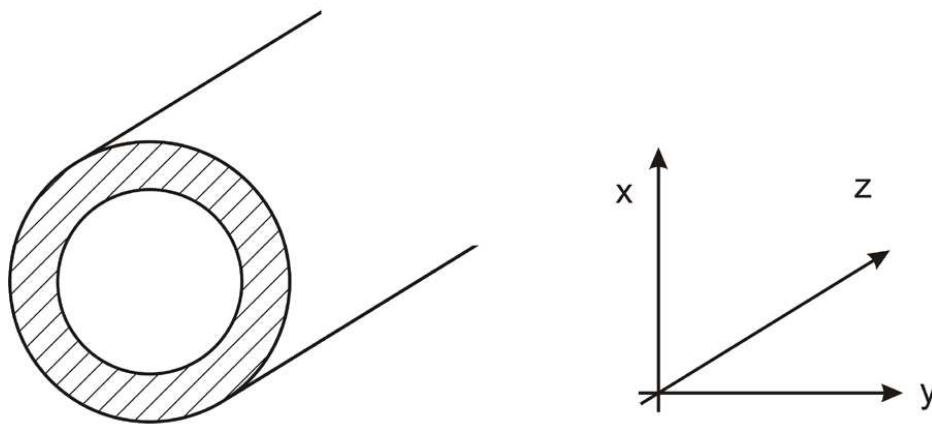
$$\eta = 20 \lg \frac{1}{|T|} \text{ dB}. \quad (9.55)$$

10. CSŐTÁPVONALAK, ÜREGREZONÁTOROK

A nagyfrekvenciás energia átvitele szabadon terjedő elektromágneses hullámmal nagy teljesítmények esetén akár rövid távolságra is rossz hatásfokú. A terjedő energiát szívesen „bezárnánk.”

Erre szolgál a *csőtápvonal*. A csőtápvonal igen jó (elvben végtelen nagy) vezetőképességű anyagból készült, zárt egyenes henger. A körülfogott térrészben a cső keresztmetszete alakjától és méretétől függően nagyfrekvenciás elektromágneses hullámok terjedhetnek a tengely irányába.

Válasszuk a henger tengelyével párhuzamosan a z koordinátát, amely a longitudinális irány (10.1. ábra). Az erre merőleges x - y sík a transzverzális sík.



10.1. ábra. Csőtápvonal

A cső belsejében az elektromágneses tér forrásmentes. Ezért a vektorpotenciálra vonatkozó tér vákuumban

$$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (10.1)$$

Homogén kitöltés esetén az $\varepsilon_0 \mu_0$ -t $\varepsilon \mu$ -vel helyettesíthetjük.

$\rho = 0$ következtében a $\varphi = 0$ választás megengedett, a skalár potenciál eltűnik. Ez a (8.13) összefüggés lehetséges megoldása. A (8.6) Lorenz-feltételből következik, hogy

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (10.2)$$

Így \mathbf{A} független vektorkomponenseinek száma kettőre csökken, a harmadik egy konstans erejéig (10.2)-ből kifejezhető. Általános felismerésre jutottunk: forrásmentes elektromágneses tér két alkalmasan választott skalár függvény segítségével előállítható.

A térerősségek (8.1) és (8.3) felhasználásával

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (10.3)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (10.4)$$

alakban számíthatók.

Tiszta szinuszos időfüggés $\left(\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega\right)$ esetén (10.3) és (10.4) alakja a komplex amplitúdókra

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A}, \quad (10.5)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (10.6)$$

A vektorpotenciál komplex amplitúdója a

$$\Delta \mathbf{A} + k_0^2 \mathbf{A} = 0 \quad (10.7)$$

vektorális Helmholtz-egyenletnek tesz eleget, ahol k_0 a *szabadtéri hullámszám*

$$k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c}. \quad (10.8)$$

Ezt a mennyiséget jelöltük eddig β -val.

A csőtápvonalban a longitudinális z irányban haladó hullám alakú megoldásokat keressük. Ezek alakja:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y) e^{j\omega t - \gamma z}, \quad (10.9)$$

ahol

$$\gamma = \alpha + j\beta. \quad (10.10)$$

A továbbiakban \mathbf{A} mindig a transzverzális koordinátáktól függő amplitúdót jelöli. A vektorpotenciál (és így a térkomponensek) z szerinti deriváltjára

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\gamma, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \gamma^2. \quad (10.11a, b)$$

Bontsuk fel a Laplace-operátort transzverzális és longitudinális koordinátáktól függő operátorra a (10.11) összefüggés figyelembevételével

$$\Delta = \Delta_t + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta_t + \gamma^2, \quad (10.12)$$

ahol $\Delta_t = \text{div}_t$, grad_t ,

A (10.7) egyenlet ezzel a jelöléssel

$$\Delta_t \mathbf{A} + (k_0^2 + \gamma^2) \mathbf{A} = 0 \quad (10.13)$$

alakba írható, azaz

$$\Delta_t \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0 \quad (10.14)$$

alakú transzverzális síkbeli Helmholtz-egyenletre jutottunk, ahol

$$k^2 = k_0^2 + \gamma^2 \quad (10.15)$$

A vektorpotenciált két részre bontjuk oly módon, hogy \mathbf{A} transzverzális komponense az x - y síkban rotációmentes, illetve divergenciamentes legyen. Ebből a két vektorból a transzverzális komponens a *Helmholtz-tétel* értelmében mindig előállítható. A transzverzális komponens ismeretében a longitudinális komponens (10.2) segítségével egy állandó erejéig előállítható.

1. \mathbf{A} transzverzális komponense *rotációmentes*. Ebben az esetben

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0. \quad (10.16)$$

(10.16) egyenértékű állítás a rotáció longitudinális komponensének eltűnésével

$$(\text{rot} \mathbf{A})_z = 0, \quad (10.17)$$

azaz (10.6) alapján $H_z = 0$, a mágneses tér longitudinális komponense zérus. Más szóval a mágneses térnek csak transzverzális komponense van, ezért *transzverzális mágneses* (TM) típusú térnek nevezzük.

A (10.16) összefüggés alapján létezik olyan, a transzverzális síkban értelmezett skaláris függvény, amellyel

$$A_x = \frac{\gamma}{j\omega} \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial x}; \quad A_y = \frac{\gamma}{j\omega} \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial y}, \quad (10.18a, b)$$

ahol az e indexet a TM hullámok megkülönböztetésére használjuk.

A vektorpotenciál transzverzális komponense

$$\mathbf{A}_t = \frac{\gamma}{j\omega} \text{grad}_t \varphi_e. \quad (10.19)$$

A $\gamma/j\omega$ szorzót a későbbi formulák egyszerű alakja indokolja.

A (10.2) feltételből

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0, \quad (10.20)$$

ahonnan $\text{div}_t \text{grad}_t = \Delta_t$ és $\frac{\partial A_z}{\partial z} = -\gamma A_z$ felhasználásával

$$A_z = \frac{1}{j\omega} \Delta_t \varphi_e. \quad (10.21)$$

A φ_e függvény (10.14) alapján eleget tesz a síkbeli Helmholtz-egyenletnek

$$\Delta_t \varphi_e + k_e^2 \varphi_e = 0. \quad (10.22)$$

Ennek belátására (10.19)-ből helyettesítünk (10.14)-be.

$$\Delta_t \text{grad}_t \varphi_e + k^2 \text{grad}_t \varphi_e = 0$$

A vektor Laplace-kifejezésre

$$\Delta_t = \text{grad}_t \text{div}_t - \text{rot}_t \text{rot}_t$$

behelyettesítésével

$$\text{grad}_t \text{div}_t \text{grad}_t \varphi_e - \text{rot}_t \text{rot}_t \text{grad}_t \varphi_e + k^2 \text{grad}_t \varphi_e = 0.$$

A bal oldal második tagja azonosan zérus ($\text{rot grad} = 0$). Az első és a harmadik tag összevonásával

$$\text{grad}_t (\Delta_t \varphi_e + k^2 \varphi_e) = 0,$$

ahonnan a zárójelben álló kifejezés konstans. A konstans tetszőlegesen választva \mathbf{A}_t értéke ugyanaz lesz. Válasszuk a legegyszerűbb megoldást, a (10.22) összefüggést.

A differenciálegyenlet megoldásához ismernünk kell a peremfeltételeket. Mivel (10.5) értelmében \mathbf{E} és \mathbf{A} arányosak, (10.21) és (10.22) alapján E_z arányos φ_e -vel, a transzverzális keresztmetszet kontúrján (a cső falán) a

$$\varphi_e = 0 \quad (10.23)$$

feltételnek kell teljesülnie. Ekkor (10.19) értelmében \mathbf{A}_t és így \mathbf{E}_t is merőleges a kontúrra, azaz a cső falára. Az elektromos térre vonatkozó peremfeltételek tehát (10.23) fennállása esetén teljesülnek. A mágneses térnek csak transzverzális komponense van, amelyet a (10.6)-ból, (10.21) és (10.22) felhasználásával

$$\mathbf{H}_t = \frac{1}{\mu_0} \text{rot}(A_z \mathbf{e}_z) = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \left[\left(-\frac{1}{j\omega} k_e^2 \varphi_e \right) \mathbf{e}_z \right] \quad (10.24)$$

összefüggésből kapunk a $\text{rot}(u\mathbf{v}) = u\text{rot}\mathbf{v} + \text{grad}u \times \mathbf{v}$ azonosság felhasználásával

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{e}_z \times \frac{k_e^2}{j\omega\mu_0} \text{grad}_t \varphi_e. \quad (10.25)$$

Az előzőekben beláttuk, hogy $\text{grad}_t \varphi_e$ merőleges a kontúrra, \mathbf{H}_t tehát párhuzamos a kontúrral. Valamennyi peremfeltétel teljesül.

Nagyon fontos részhez érkeztünk. A (10.22) egyenlet a (10.23) peremfeltétellel csak k_e^2 meghatározott értékei mellett oldható meg. Ezek az értékek a *sajátértékek*. Az egyenlet úgynevezett sajátérték-feladatra vezet. A sajátértékhez tartozó megoldásfüggvények a *sajátfüggvények*. Az adott feladatnak megszámlálhatóan végtelen sok, monoton sorba rendezhető pozitív sajátértéke van.

A sajátértékhez tartozó sajátfüggvényekből származtatott terek a *módusok*. Esetükben TM módusokról van szó. (Miután az elektromos tér longitudinális komponense arányos φ_e -vel, amelyből az egész tér származtatható, régebben ezeket a módusokat E típusú módusoknak is nevezték.)

2. Az \mathbf{A} transzverzális komponens *divergenciamentes*, más szóval

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0. \quad (10.26)$$

Ekkor (10.2) és (10.11a) értelmében

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = -\gamma A_z = 0, \quad (10.27)$$

azaz \mathbf{A} és így (10.5) alapján E longitudinális komponense is zérus.

$$E_t = E_z = 0 \quad (10.28)$$

Ezt a teret *transzverzális elektromos (TE) típusú térnek* nevezzük.

Könnyű belátni, hogy létezik olyan $\varphi_m(x, y)$ függvény, amelyre

$$A_x = \mu_0 \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}; \quad A_y = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}, \quad (10.29a, b)$$

azaz

$$\mathbf{A}_t(x, y) = -\mu_0 \mathbf{e}_z \times \text{grad}_t \varphi_m, \quad (10.30)$$

ahol az m index a TE térre utal, és ezzel a választással (10.28) is teljesül.

A keresett skalár függvény most is eleget tesz a

$$\Delta_t \varphi_m + k_m^2 \varphi_m = 0. \quad (10.31)$$

egyenletnek.

Mivel (10.28)-nak megfelelően csak a transzverzális elektromos tér létezik, az pedig \mathbf{A}_t -vel arányos, a peremen a tér tangenciális komponense (10.30) alapján akkor tűnik el, ha ott

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial n} = 0. \quad (10.32)$$

(10.30) alapján (itt nem részletezett számítással) belátható, hogy

$$\mathbf{H}_t = -\gamma \text{grad}_t \varphi_m, \quad (10.33)$$

azaz (10.32) teljesítése esetén a peremen \mathbf{H} -nak csak tangenciális komponense lehet, beleértve a longitudinális komponensét is.

A longitudinális komponens a $\text{div} \mathbf{H} = 0$ feltételből számítható a (10.33) és a (10.31) egyenletek felhasználásával

$$H_l = H_z = k_m^2 \varphi_m. \quad (10.34)$$

A longitudinális komponens φ_m -mel arányos, ezért ezt a teret H térnek nevezik.

Érdekes elfajuló eset, ha a sajátérték zérus. A Green-tétel értelmében

$$\int_A \left[\varphi \Delta_t \varphi + (\text{grad}_t \varphi)^2 \right] dA = \oint_C \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl, \quad (10.35)$$

ami zérus sajátérték esetén $\Delta_t \varphi = 0$ helyettesítéssel

$$\int_A (\text{grad}_t \varphi)^2 dA = \oint_C \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl \quad (10.36)$$

alakra egyszerűsödik.

Könnyen belátható, hogy egyszerűen összefüggő tartományban a (10.23) vagy a (10.32) homogén peremfeltételek esetén csak

$$(\text{grad}_t \varphi)^2 = 0 \quad (10.37)$$

lehet az egész tartományban. Ez TM hullámnál $\varphi = 0$ megoldásra, TE hullámnál $\varphi \equiv \text{konstans}$ megoldásra vezet. Terjedő hullám egyik esetben sem létezik.

Többszörösen összefüggő tartományban, TE módusok esetén φ értéke a különböző kontúrokon eltérő lehet. (10.34) értelmében a zérus sajátérték következtében a mágneses térnek nem lesz longitudinális komponense. Ezért ezt a teret transzverzális elektromos-

mágneses (TEM) térnek nevezzük. Ilyen tér alakulhat ki például koaxiális kábelben vagy mikroszalagvonalon.

A fentiek szemléletesen elektrosztatikai analógiával is magyarázhatók. A $\Delta\varphi = 0$ egyenlet elektrosztatikai potenciálra érvényes. A peremfeltételek ilyenkor azt jelentik, hogy egy zárt, egyszeresen összefüggő térrész felületén az elektrosztatikus térre vonatkozó peremfeltételek: első esetben 0 potenciál, második esetben pedig 0 normális irányú térkomponens. Az első esetben az elektrosztatikus tér potenciálfüggvénye azonosan zérus a térrész belsejében, a második esetben pedig az egész térrészben konstans a potenciál. Kétszeresen vagy többszörösen összefüggő térrész esetén az elektródák potenciálja eltérő lehet, ilyenkor létezik 0-tól különböző megoldás. Mindebből következik, hogy többszörösen összefüggő keresztmetszetű csőtápvonalban terjedő TEM módus elektromos tere minden keresztmetszetben olyan, mint egy kétdimenziós, elektrosztatikus tér. Ennek megfelelően a feszültség minden keresztmetszetben definiálható.

Hasonlóan a mágneses tér minden keresztmetszetben kétdimenziós, stacionárius mágneses térnek megfelelő struktúrájú. Ez onnan látszik, hogy az áramtól mentes térben a teret skalár potenciálból állítjuk elő. Ezért a gerjesztési törvény alkalmazható, és a vezetékekben folyó áram meghatározható.

Ezért a távvezetékek alaplómódusaként terjedő TEM hullám leírására a sztatikus és stacionárius térből származtatott távvezetékmodell korrekt eredményre vezet. Erre rövidesen még visszatérünk.

Fázissebesség, diszperzió, határfrekvencia

Valamennyi módus terjedési együtthatóját a (10.15) összefüggésből határozhatjuk meg

$$\gamma^2 = k_{e,m}^2 - k_0^2, \quad (10.38)$$

ahonnan

$$\gamma = \sqrt{k_{e,m}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (10.39)$$

Az e, m indexek jelzik, hogy mindkét módusfajta érvényes az összefüggés.

A fenti kifejezésben szembeötlő, hogy csak meghatározott frekvenciánál nagyobb frekvencián létezik terjedő hullám. Ez a frekvencia a *határfrekvencia* (levágási frekvencia)

$$\omega_h = c \cdot k_{e,m}; \quad f_h = \frac{c \cdot k_{e,m}}{2\pi}. \quad (10.40)$$

A határfrekvencia tehát a sajátérték függvénye. E felett a frekvencia felett a terjedési együttható tiszta képzetes

$$\gamma = j\beta = j\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{e,m}^2}. \quad (10.41)$$

A fázistényező

$$\beta = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_h^2}}{c}; \quad \omega > \omega_h = k_{e,m} \cdot c. \quad (10.42)$$

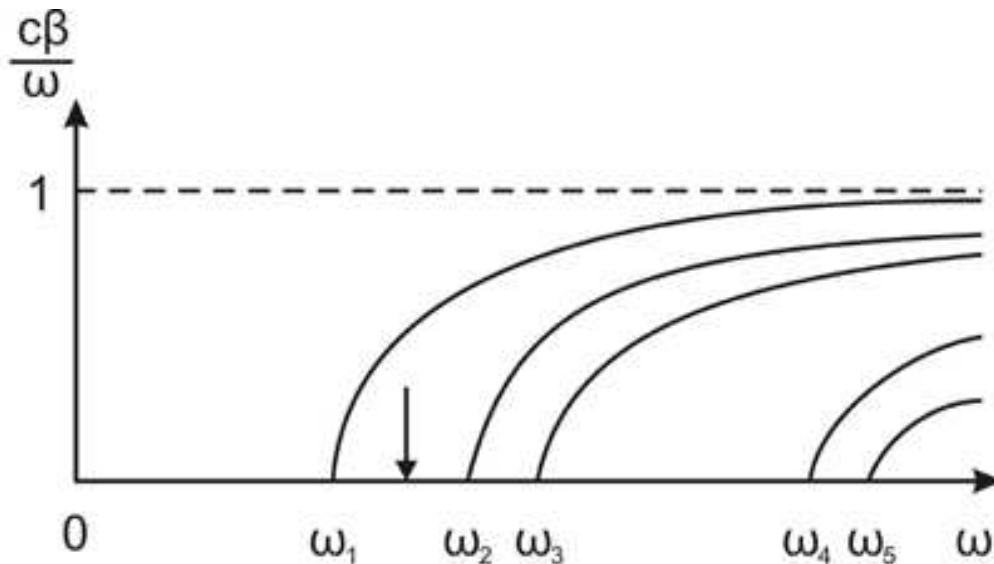
Egyszeresen összefüggő keresztmetszetű csőtápvonalban a legkisebb határfrekvencia és a következő határfrekvencia közötti frekvenciasávban csak egyetlen módus terjed, ez az adott keresztmetszetű csőtápvonal *alapládusa*. Bizonyítható, hogy a legkisebb sajátérték, így a legkisebb határfrekvencia is TE módushoz tartozik, ezért az alapmódus mindig TE módus. Többszörösen összefüggő keresztmetszetű csőtápvonalban terjedő TEM módus határfrekvenciája zérus, tehát az alapmódus TEM módus. (Ez nem mond ellent az előző állításnak, hiszen a TEM módus elfajul TE módus.) Ilyen csőtápvonalon tetszőleges frekvenciájú hullám terjedhet.

A fázistényező frekvenciafüggése határozza meg a különböző frekvenciájú hullámok terjedési sebességét, a *fázissebességet*

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_h}{\omega}\right)^2}}. \quad (10.43)$$

A fázissebesség függ a frekvenciától. Ez a jelenség a *diszperzió*: a különböző frekvenciájú hullámok „elszaladnak” egymástól, a sok frekvenciájú jel terjedés közben eltorzul.

A fázistényező frekvenciafüggését leíró (10.41) egyenlet, illetve általánosabban a terjedési együttható frekvenciafüggését leíró (10.39) egyenlet a *diszperziós egyenlet* (10.2. ábra). Az ábrából is látható, hogy az ω_1 és ω_2 határfrekvenciák között csak az alapmódus terjed.



10.2. ábra. A fázistényező különböző módusokra. A jelölt tartományban. ω_1 levágási tartomány a frekvencia függése. A nyíllal csak az alapmódus terjed

A (10.43) összefüggés szerint a fázissebesség minden nem elfajuló (TEM) módusra nagyobb, mint a fénysebesség. Ez nem ellentétes a speciális relativitáselmélettel. A fizikai tartalmat leíró csoportsebességnek azonban nem szabad felülmúlnia a fénysebességet. (Ez az állítás

veszteségmentes terjedésre igaz és általában teljesül kis veszteségű terjedésre is.) A csoportsebességre csőtápvonalak esetén a

$$v_g = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)^{-1} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_h}{\omega} \right)^2} \quad (10.44)$$

összefüggést kapjuk. Ez megfelel a fenti feltételnek. Csőtápvonalmódusokra

$$v_f \cdot v_g = c^2. \quad (10.45)$$

Ez az összefüggés nem általános. Más diszperzív hullámokra a csoport- és fázissebesség szorzata eltérő lehet.

A fázissebesség ismeretében kifejezhetjük a csőben mérhető hullámhosszát is. Ezt λ_g -vel jelöljük, a g index a „guided” (= vezetett) hullámformára utal.

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_h} \right)^2}}, \quad (10.46)$$

ahol λ a szabadtéri hullámhossz

$$\lambda_h = \frac{2\pi}{k_{e,m}} \quad (10.47)$$

a *határhullámhossz*, a határfrekvenciához tartozó szabadtéri hullámhossz. Határhullámhossznál *nagyobb* szabadtéri hullámhossz esetén nincsen terjedés. Egyszerűbben: a hullám nem fér be a csőbe!

A határfrekvenciánál kisebb frekvencián, illetve határhullámhossznál nagyobb hullámhosszon a terjedési együttható tiszta valós.

$$\gamma = \alpha = k_{e,m} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_h} \right)^2} = k_{e,m} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_h}{\lambda} \right)^2} \quad (10.48)$$

Valamennyi térkomponens komplex amplitúdója $e^{-\alpha z} e^{j\omega t}$ alakban változik. Nincsen tehát terjedés, hanem stacionárius állapotban a csőtápvonal mentén exponenciálisan csökkenő amplitúdójú szinuszos rezgés alakul ki (nem terjedő módusok, levágási módusok).

A módusfüggvények

Legyen $\varphi_{e1}, \varphi_{e2}, \dots, \varphi_{ei}, \dots$ illetve $\varphi_{m1}, \varphi_{m2}, \dots, \varphi_{mi}, \dots$ a (10.22) egyenlet (10.23) peremfeltételt kielégítő, illetve a (10.31) egyenlet (10.32) peremfeltételt kielégítő megoldása. Definiáljuk a

$$\mathbf{e}_{ei} = \text{grad}_t \varphi_{ei}, \quad (10.49)$$

$$\mathbf{h}_{ei} = k \times \mathbf{e}_{ei}, \quad (10.50)$$

$$\mathbf{e}_{mi} = -\mathbf{k} \times \text{grad}_t \varphi_{mi} = -\mathbf{k} \times \mathbf{h}_{mi}, \quad (10.51)$$

$$\mathbf{h}_{mi} = \text{grad}_t \varphi_{mi} = \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{mi} \quad (10.52)$$

módusfüggvényeket. Itt \mathbf{k} a z irányú egységvektor.

Ekkor a TM módusok térkomponenseinek komplex amplitúdói az előzőek alapjai.

$$\mathbf{E}_{t,ei} = -\gamma C_{ei} \mathbf{e}_{ei} e^{-\gamma z}, \quad (10.53)$$

$$E_{l,ei} = C_{ei} k_{ei}^2 \varphi_{ei} e^{-\gamma z}, \quad (10.54)$$

$$\mathbf{H}_{t,ei} = -C_{ei} j \omega \varepsilon_0 \mathbf{h}_{ei} e^{-\gamma z}, \quad (10.55)$$

$$H_{l,ei} = 0 \quad (10.56)$$

alakba írhatók.

Míg ugyanezek TE módusokra

$$\mathbf{E}_{t,mi} = -j \omega \mu_0 C_{mi} \mathbf{e}_{mi} e^{-\gamma z}, \quad (10.57)$$

$$E_{l,mi} = 0, \quad (10.58)$$

$$\mathbf{H}_{t,mi} = -\gamma C_{mi} \mathbf{e}_{mi} e^{-\gamma z}, \quad (10.59)$$

$$\mathbf{H}_{l,mi} = C_{mi} k_{mi}^2 \varphi_{mi} e^{-\gamma z}. \quad (10.60)$$

A módusfüggvényekről bizonyítható, hogy ortogonálisak. Például

$$\int_A \mathbf{e}_{ei} \cdot \mathbf{e}_{ej} \, dA = 0, \quad \text{ha } i \neq j \quad (10.61)$$

és hasonló összefüggés igaz bármely móduspárra. Belátható az is, hogy teljes rendszert alkotnak a transzverzális síkban. Más szóval tetszés szerinti tér, amelynek a transzverzális síkon áthaladó teljesítménye véges, sorbafejthető a módusfüggvények szerint.

A módusfüggvények az alábbi módon normálhatók

$$\int_A |\mathbf{e}_{ei}|^2 \, dA = \int_A |\mathbf{e}_{mi}|^2 \, dA = \int_A |\mathbf{h}_{ei}|^2 \, dA = \int_A |\mathbf{h}_{mi}|^2 \, dA = 1. \quad (10.62)$$

Az így normált függvényekkel előállíthatjuk a transzverzális teret az U_{ei} , U_{mi} módusfeszültségek és I_{ei} , I_{mi} módusáramok segítségével

$$\mathbf{E}_t = \sum_i U_{ei} \mathbf{e}_{ei} + \sum_i U_{mi} \mathbf{e}_{mi}, \quad (10.63a)$$

$$\mathbf{H}_t = \sum_i I_{ei} \mathbf{h}_{ei} + \sum_i I_{mi} \mathbf{h}_{mi}. \quad (10.63b)$$

A fenti egyenleteket összevetve a (10.53)–(10.60) komponens egyenletekkel, a következő összefüggésekre jutunk

$$U_{ei} = -\gamma C_{ei} e^{-\gamma z}, \quad (10.64)$$

$$I_{ei} = -j\omega \varepsilon_0 C_{ei} e^{-\gamma z}, \quad (10.65)$$

$$U_{mi} = -j\omega \mu_0 C_{mi} e^{-\gamma z}, \quad (10.66)$$

$$I_{mi} = -\gamma C_{mi} e^{-\gamma z}. \quad (10.67)$$

Az összefüggések a következő egyenleteknek tesznek eleget

$$-\frac{\partial U_{ei}}{\partial z} = \frac{\gamma^2}{j\omega \varepsilon_0} I_{ei}, \quad (10.68)$$

$$-\frac{\partial I_{ei}}{\partial z} = j\omega \varepsilon_0 U_{ei}, \quad (10.69)$$

$$-\frac{\partial U_{mi}}{\partial z} = j\omega \mu_0 I_{mi}, \quad (10.70)$$

$$-\frac{\partial I_{mi}}{\partial z} = \frac{\gamma^2}{j\omega \mu_0} U_{mi}. \quad (10.71)$$

Ezek az egyenletek távíróegyenletek, amelyekben a soros impedanciák, illetve párhuzamos admittanciák a következők:

$$Z_{ei} = \frac{\gamma_{ei}^2}{j\omega \varepsilon_0}, \quad (10.72)$$

$$Y_{ei} = j\omega \varepsilon_0, \quad (10.73)$$

$$Z_{mi} = j\omega \mu_0, \quad (10.74)$$

$$Y_{mi} = \frac{\gamma_{mi}^2}{j\omega \mu_0}. \quad (10.75)$$

(10.38)-ből tudjuk, hogy

$$\gamma_{m,n}^2 = k_{m,n}^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0. \quad (10.76)$$

Ezt a fenti egyenletekbe helyettesítve

$$Z_{ei} = j\omega\mu_0 + \frac{1}{j\omega\frac{\varepsilon}{k_{ei}^2}}, \quad (10.77a)$$

$$Y_{ei} = j\omega\varepsilon_0, \quad (10.77b)$$

$$Z_{mi} = j\omega\mu_0, \quad (10.78a)$$

$$Y_{mi} = j\omega\varepsilon_0 + \frac{1}{j\omega\frac{\mu_0}{k_{mi}^2}}. \quad (10.78b)$$

TEM módusra

$$k = 0. \quad (10.79)$$

Ezért

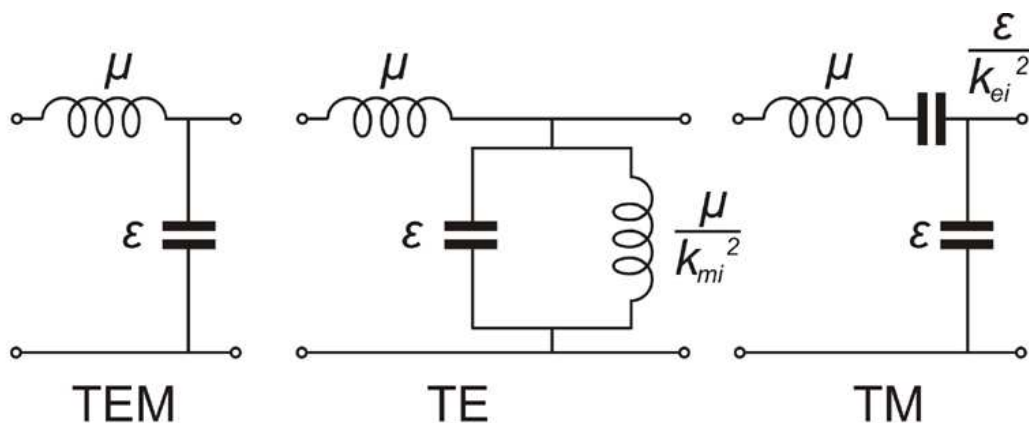
$$Z_s = j\omega\mu_0, \quad (10.80a)$$

$$Y_p = j\omega\varepsilon_0. \quad (10.80b)$$

A TEM módus terjedési tulajdonságai tehát a szabad tér terjedési tulajdonságaival megegyeznek.

Az összefüggések homogén dielektrikumban $\mu_0 \rightarrow \mu$, $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon$ helyettesítéssel minden további nélkül érvényesek.

Ezzel az analógiával minden módus távvezetékkel helyettesíthető, amelyek struktúrája a 10.3. ábrán látható.



10.3. ábra. Az egyes módusok helyettesítő távvezetékei

A helyettesítő kép a következőt mutatja: valamennyi módus egymástól független, csatolatlan távvezetéken történő terjedéssel írható le. A határfrekvencia a helyettesítő

képekben lévő rezgőkörök rezonanciájával magyarázható. A transzverzális térben tárolt energiát az ε , μ reaktanciák reprezentálják, a longitudinális térben tárolt energiát a $k_{m,n}$ sajátértékeket tartalmazó reaktanciák.

A távvezeték-analógia a dielektrikum és a fal veszteségének leírására ellenállásokkal kiegészíthető. Ekkor a módusok már nem csatolatlanok. Hasonlóan csatolást okoznak a csőtápvonal keresztmetszetének alakváltozásai, az ún. *diszkontinuitások*. Ezeket már nem tárgyaljuk. Ugyancsak túlmutat tárgyalásunk keretén a csőtápvonal terének gerjesztése.

A csőtápvonalban haladó teljesítmény

A tér longitudinális komponensei a Poynting-vektor transzverzális, a csőtápvonal tengelyére merőleges komponensét határozzák meg. Ez a komponens a falak között ide-oda reflektálódó, a teljesítmény szállítása szempontjából meddő energiát reprezentál.

A csőtápvonalak csatolatlansága (azaz a módusfüggvények ortogonalitása) rendkívül egyszerűvé teszi a csőtápvonalon haladó hatásos teljesítmény számítását. Mivel a Poynting-vektor hosszirányú (longitudinális) komponensét a transzverzális térkomponensek határozzák meg, egyedül ezeket kell figyelembe venni a teljesítmény számításánál. A módusfüggvények ortonormáltóságát figyelembe véve, a hatásos teljesítmény

$$P = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*) = \frac{1}{2} \sum_i \Re(U_{ei} I_{ei}^*) + \frac{1}{2} \sum_i \Re(U_{mi} I_{mi}^*) = \frac{1}{2} \sum_i \Re U_i I_i^* \quad (10.81)$$

A jobb oldali utolsó kifejezésben már nem különböztetjük meg a más-más típusú módusok módusfeszültségét és -áramát. Ez az eredmény teljesen megegyezik a hálózatelméletből jól ismerttel. Egyebek között ez indokolja a (10.64)–(10.67) definíciók célszerűségét.

Csőhullámok téglalap keresztmetszetű csövekben

Téglalap keresztmetszetű cső esetén a $\varphi = \varphi_{e,m}$ függvényre vonatkozó (10.22) és (10.31) egyenlet közös alakja

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0. \quad (10.82)$$

Ezt az egyenletet a változók szétválasztásával oldjuk meg. Tételezzük fel, hogy a megoldás kereshető

$$\varphi(x, y) = X(x)Y(y) \quad (10.83)$$

alakban. Ezt (10.82)-be helyettesítve és rendezve

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} + k^2 = 0. \quad (10.84)$$

A bal oldal első tagja csak x -től függ, a második tagja csak y -től és k^2 konstans. Ez csak úgy lehetséges, ha az első két tag külön-külön állandó

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2; \quad \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2, \quad (10.85a, b)$$

ahol

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2. \quad (10.86)$$

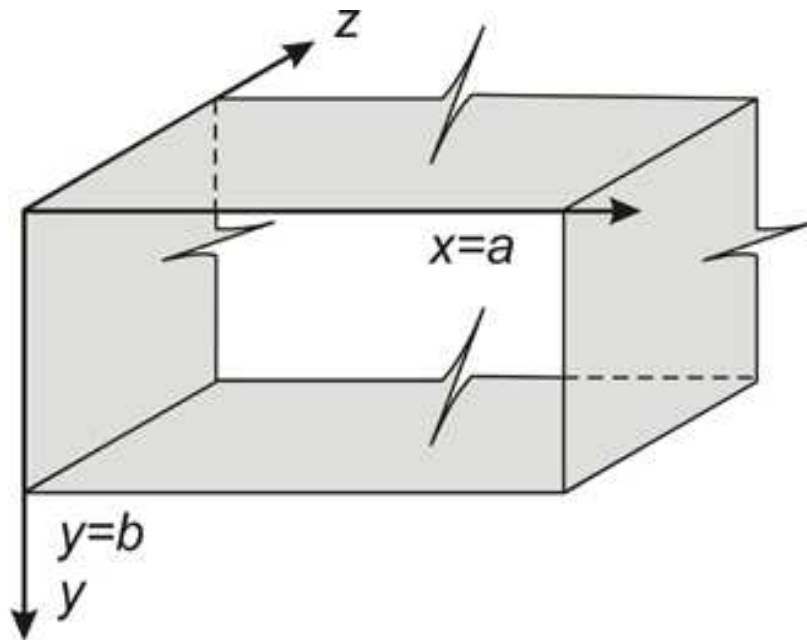
TM módusra a $\varphi_e = 0$ peremfeltételeknél eleget tevő megoldás

$$\varphi_e = C \sin k_x x \sin k_y y. \quad (10.87)$$

TE módusra a $\frac{\partial \varphi_m}{\partial n} = 0$ peremfeltételt a

$$\varphi_m = C \cos k_x x \cos k_y y \quad (10.88)$$

megoldással tudjuk kielégíteni.



10.4. ábra. Koordináta-rendszer a négyszög keresztmetszetű hullámvezető terének leírásához

Az 10.4. ábra koordináta-rendszerében a TM módusok komponensei

$$\begin{aligned} E_z &= C k^2 \sin k_x x \sin k_y y, & H_z &= 0, \\ E_x &= -C \gamma \cos k_x x \sin k_y y, & H_x &= C j \omega \epsilon k_y \sin k_x x \cos k_y y, \end{aligned} \quad (10.89)$$

$$E_y = -C\gamma k_y \sin k_x x \cos k_y y, \quad H_y = -C j\omega \epsilon k_x \cos k_x x \sin k_y y.$$

A TE hullámok komponensei

$$\begin{aligned} E_z &= 0, & H_z &= Ck^2 \cos k_x x \cos k_y y, \\ E_x &= Cj\omega \mu k_y \cos k_x x \sin k_y y, & H_x &= C\gamma k_x \sin k_x x \cos k_y y, \\ E_y &= -Cj\omega \mu \sin k_x x \cos k_y y, & H_y &= C\gamma k_y \cos k_x x \sin k_y y. \end{aligned} \quad (10.90)$$

Határfeltételek

$$\begin{aligned} E_z &= 0, & E_y &= 0, & \text{ha } x &= 0, & x &= a. \\ E_z &= 0, & E_x &= 0, & \text{ha } y &= 0, & y &= b. \end{aligned} \quad (10.91)$$

Ez a komponensekben

$$\sin k_x a = 0, \quad \sin k_y b = 0 \quad (10.92a, b)$$

teljesülését kívánja, aminek feltétele, hogy

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (10.93a, b)$$

legyen. A mennyiségek (10.87) és (10.88) összefüggésből meghatározhatók.

(10.86) alapján

$$k^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad (10.94)$$

ahonnan

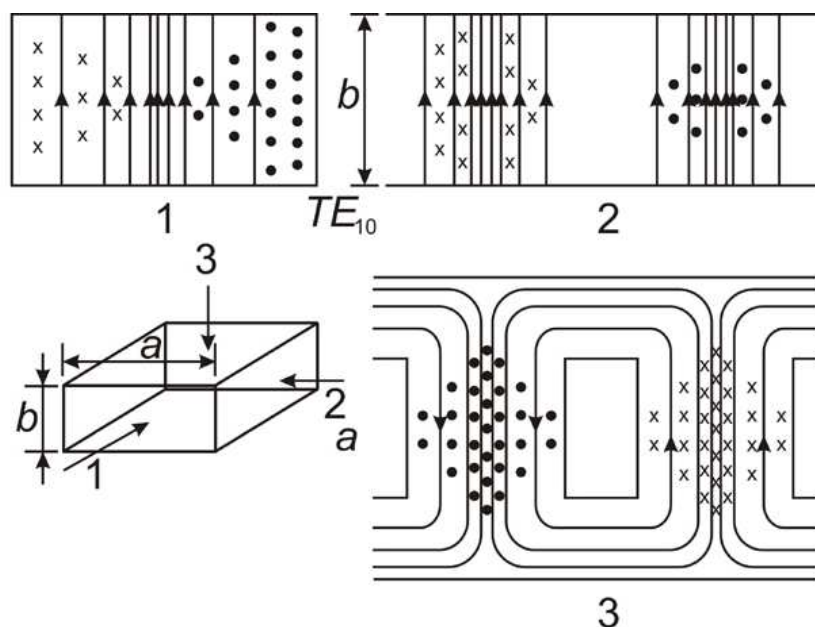
$$\omega_h = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad (10.95)$$

$$\lambda_h = \frac{2\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}}. \quad (10.96)$$

A módusok két egész számmal jellemezhetők, TM_{mn} és TE_{mn} kétméretű sokaságot alkotnak. TM hullámoknál egyik módusindex sem lehet zérus, míg TE-nél az egyik igen. Ezért az alaplómódus a TE_{10} módus (10.5. ábra), amelynek határfrekvenciája

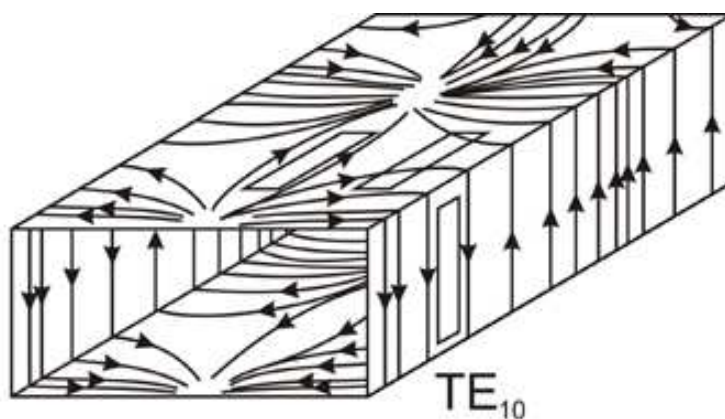
$$\omega_h = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}} \cdot \frac{1}{a}, \quad (10.97)$$

$$\lambda_h = 2a\sqrt{\epsilon_r\mu_r}. \quad (10.98)$$



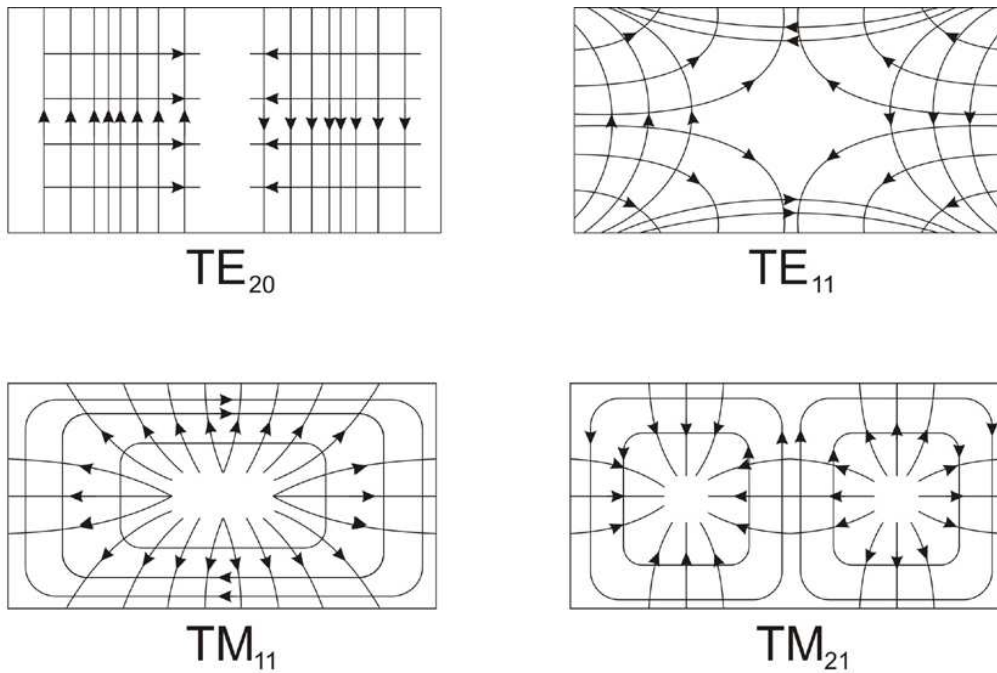
10.5. ábra. A leggyakoribb használt csőhullám erővonalképe. A perspektivikus ábrán látható nyilak azt az irányt jelölik, amerre az egyes erővonalképek rajzolásánál néztük. A folytonos vonalak a villamos, a szaggatott vonalak a mágneses térerősséget jelentik

A fállal párhuzamos mágneses térerősség-komponens hatására a falban áram folyik. Ennek áramvonalai TE_{10} módusnál a 10.6. ábrán láthatók.



10.6. ábra. A cső falában folyó áramok a leggyakoribb hullámformánál. A szaggatott vonalak a falon vágott réseket jelzik. Ha a rés párhuzamos az áramsűrűség vektorával, a rés befolyása elhanyagolható

Néhány másféle módus keresztmetszeti erővonalképe látható a 10.7. ábrán.



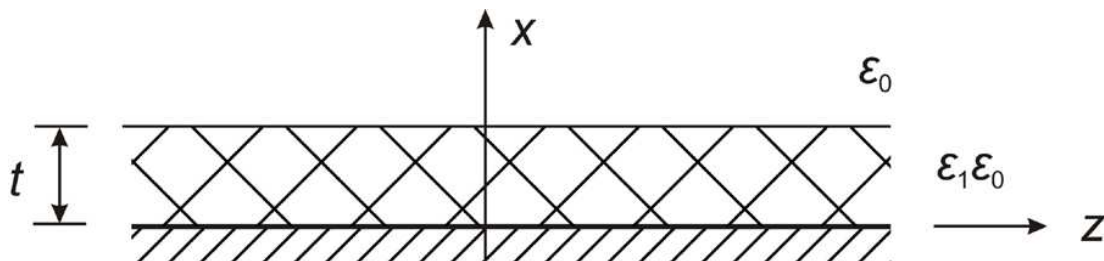
10.7. ábra. Módusok keresztmetszeti erővonalképei

Nyitott hullámvezetők

Kiemelkedő jelentősége van a szigetelőhenger mentén terjedő hullámnak. Ilyen struktúrák az optikai szálak.

A tárgyalást egyszerűsítendő a hullámterjedést dielektromos réteg mentén vizsgáljuk. Ebben az esetben is azt várjuk a hullámvezetőtől, hogy longitudinális irányba csillapítatlan hullám terjedjen, miközben a transzverzális síkon áthaladó teljesítmény véges.

Helyezkedjen el a dielektromos bevonat ideális végtelen sík felületen a 10.8. ábra szerinti módon.



10.8. ábra. Felületi hullámvezető

A magában álló réteg ennek az elrendezésnek a tükrözésével tárgyalható. Mi TM hullámformát keresünk. Kimutatható, hogy TE és TM hullámok csak $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ esetén léteznek. Ekkor $H_z = 0$. A csőtápvonalhoz hasonlóan az \mathbf{E} longitudinális E_z komponensét határozzuk meg először. (Emlékezzünk vissza, $\varphi_e \approx E_z$). Ekkor

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\gamma}{k_i^2} \text{grad}_t E_z, \quad (10.99)$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{j\omega\epsilon}{\gamma} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t. \quad (10.100)$$

A számítás annyiban tér el a homogén kitöltésű csőtápvonal számításától, hogy a két, különböző permittivitású térrészben a tér más-más Helmholtz-egyenletet elégíti ki (és a perem-, illetve folytonossági feltételeket).

$$\Delta_t E_z + k_i^2 E_z = 0, \quad (10.101)$$

ahol

$$k_i^2 = \omega^2 \epsilon \mu + \gamma^2 = \epsilon_r k_0^2 + \gamma^2. \quad (10.102)$$

Ekkor

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + k_d^2 E_z = 0 \quad 0 < x < t, \quad (10.103a)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - h^2 E_z = 0 \quad t < x, \quad (10.103b)$$

mivel a $x \rightarrow \infty$ esetén eltűnő megoldást keresünk.

$x = 0$ esetén a fémen a tangenciális komponens eltűnik, ezért $E_z = 0$.

A peremfeltételeket kielégítő megoldások:

$$E_z = \begin{cases} A \sin k_d x & 0 < x < t \\ B e^{-hx} & t < x \end{cases} \quad (10.104)$$

$x = t$ -nél E_t és H_t tangenciális komponensek folytonosak, tehát γ azonos a két térrészben

$$\gamma^2 = k_d^2 - \epsilon_r k_0^2 = -h^2 - k_0^2 = (\alpha + j\beta)^2, \quad (10.105)$$

ahonnan

$$k_d^2 + h^2 = (\varepsilon_r - 1)k_0^2. \quad (10.106)$$

E_z folytonosságától

$$A \sin k_d t = B e^{-ht}. \quad (10.107)$$

H_y folytonosságából

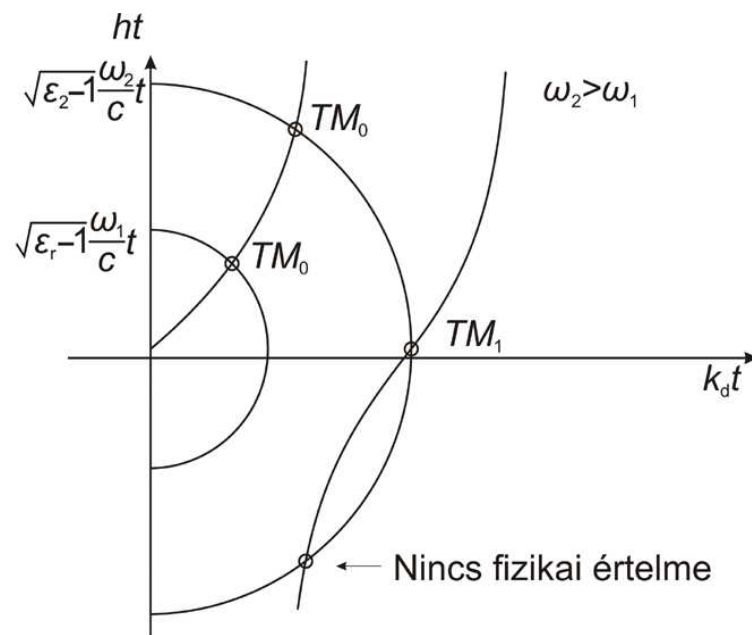
$$\frac{\varepsilon_r A}{k_d} \cos k_d t = \frac{1}{h} B e^{-ht}. \quad (10.108)$$

A két előző egyenletből

$$\varepsilon_r h t = k_d t \operatorname{tg} k_d t. \quad (10.109)$$

(10.106) és (10.109) szimultán megoldása valós h -val a kívánt feltételeknek megfelelő teret biztosít.

Az egyenletrendszer megoldását grafikusán szemléltethetjük az 10.9. ábra szerinti módon.



10.9. ábra. A $k_d t \operatorname{tg} k_d t$ görbék metszése körökkel

Ezek a hullámok úgynevezett *lassú hullámok*, mivel a fázissebesség a szabadtéri fénysebességnél kisebb

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{k_0 c}{\beta} = \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 + h^2}}, \quad c > c, \quad (10.110)$$

ahol felhasználtuk a (10.105) összefüggést.

Fizikailag az állítás nyilvánvaló: a fázissebesség a szabad térben és a dielektrikumban kialakuló $c/\sqrt{\varepsilon_r}$ fénysebesség között kell legyen. Ez teljesül, hiszen

$$k_0 < \beta = \sqrt{\varepsilon_r k_0^2 - k_d^2} < \sqrt{\varepsilon_r} k_0. \quad (10.111)$$

A grafikus megoldás azzal a meglepetéssel szolgál, hogy bármely véges frekvencián csak véges számú módus létezik. Ezek a módusok az úgynevezett kötött hullámok. Geometria optikai megfontolással az itt terjedő sugarak a felszínen teljes visszaverődést szenvednek és ezért a dielektrikumon kívül a tér exponenciálisan „lecseng”.

Amint látjuk, a tér elvben tetszés szerint kis frekvencián is létezik. Kérdés, mekkora a tér kiterjedése. (10.106)-ból következik, hogy kis frekvencián k_d és h is zérushoz tartanak, (10.109) tehát jól közelíthető.

$$\varepsilon_r h t = (k_d t)^2$$

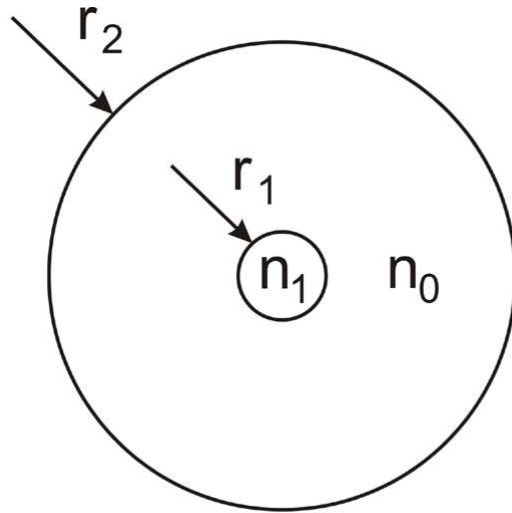
összefüggéssel. Ezt (10.106)-ba helyettesítve és h mellett a h^2 -t tartalmazó tagot elhagyva kapjuk, hogy

$$h \cong \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) t \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Az 10.9. ábrából is látható, hogy $\omega \rightarrow 0$ esetén a kör az origóra zsugorodik, tehát $h \rightarrow 0$. Egyszerű számítás kimutatja, hogy $1/h$, tehát a távolság, ahol a tér a határfelület térerősségének e -ad részére csökken, kis frekvencián nagy távolságra nőhet. A síkfelületi hullámvezető ezért kis frekvencián nem használható, jóllehet határfrekvenciája tetszőlegesen kicsi lehet.

A módusok nem alkotnak teljes függvényrendszert, tehát a tetszés szerinti gerjesztés tere nem írható le csak módusfüggvényekkel. A további hullámformákat beeső és visszaverődő síkhullámok alakjában kereshetjük. Ezek a hullámok tehát nem TE és TM típusú módusokat alkotnak. A síkhullámokból más hullámformák is előállíthatók. Ezekhez a hullámokhoz folytonos spektrum rendelhető.

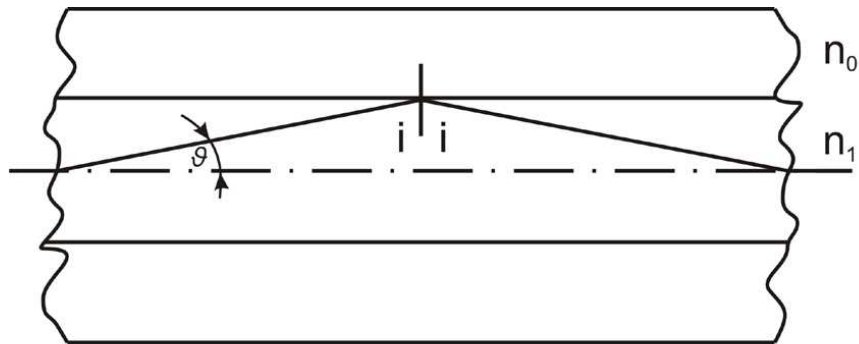
A gyakorlat dielektromos hullámvezetői hengeres kivitelűek. Kiemelt szerepük van az optikai tartományban. Legegyszerűbb formájuk egy homogén, dielektromos henger. Sokkal elterjedtebb az a megoldás, hogy a dielektromos hengert egy belső magtól alig különböző, kicsit kisebb törésmutatójú koncentrikus köpeny veszi körül (10.10. ábra).



10.10. ábra. Optikai hullámvezető keresztmetszete

Az elrendezés a Maxwell-egyenletek alapján tárgyalható, de bonyolult feladat. Mi az egyszerű geometriai optikai megfontolásokat ismertetjük.

A fény hullámhossza jóval kisebb a szál magjának átmérőjénél, ezért a mag felülete geometriai optikai szempontból lokálisan síknak tekinthető (10.11. ábra).



10.11. ábra. Optikai hullámvezető hosszmetzete

A fénysugár akkor marad a mag belsejében, ha i beesési szöge nagyobb, mint a teljes visszaverődés határszöge $i_0 = \arcsin(n_0/n_1)$. Ekkor a nyaláb végig a magban terjed. Az irodalom általában i kiegészítő szögét, ϑ -t használja. A jel akkor terjed a magon belül, ha $\vartheta < \vartheta_{\max} = \arccos\left(\frac{n_0}{n_1}\right)$. Egyszerűsíti a számítást, ha bevezetjük a

$$\Delta = 1 - \frac{n_0}{n_1}$$

paramétert. Ezzel, tekintettel $n_0 \ll n_1$ relációra, $\cos \vartheta_{\max} \approx 1 - \frac{1}{2} \vartheta_{\max}^2$ közelítéssel, $\vartheta_{\max} \approx \sqrt{2\Delta}$, mivel $\vartheta_{\max} \ll 1$.

A gyakorlatban használt szálakra $\Delta \leq 1\%$, tehát $\vartheta_{\max} = 0,14\text{rad} (\cong 8^\circ)$.

Elterjedt még a törésmutató fokozatos csökkentése a mag közepétől a széle felé. Ezek a változó törésmutatójú szálak.

Üregrezonátorok

Az elektromágneses üregrezonátor bármilyen alakú zárt fémdoboz lehet, a legfontosabbak közülük a két végén sík lappal lezárt hengeres csőtápvonalak.

Ha a csőtápvonalat transzverzális síkjában ideális vezetőfallal elzárjuk, azon teljesülnie kell a peremfeltételeknek, például az elektromos térerősségnek nem lehet tangenciális komponense.

A csőtápvonalmódusok távvezetékmodelljéből azonnal következik, hogy az analóg távvezetéseket rövidre zárjuk.

Mindkét képből az látszik, hogy a csőtápvonalon haladó hullám reflektálódik, a vezeték mentén állóhullám alakul ki, amelyben a transzverzális elektromos térerősség zérus a lezáráson. Ez egyenértékű azzal az állítással, hogy a módusfeszültségnek a lezáráson csomópontja van.

Mindkét képből az látszik, hogy a csőtápvonalon haladó hullám reflektálódik, a vezeték mentén állóhullám alakul ki, amelyben a transzverzális elektromos térerősség zérus a lezáráson. Ez egyenértékű azzal az állítással, hogy a módusfeszültségnek a lezáráson csomópontja van. A térerősség-komponensek z függése $A \sin \beta z + B \cos \beta z$.

Meg kell jegyeznünk, hogy haladó hullámban a transzverzális elektromos és mágneses térerősség-maximumok a csőtápvonal azonos helyén vannak. A fenti ideális lezárás esetén a peremfeltételeket csak úgy tudjuk kielégíteni, ha a mágneses tér negyed hullámhosszal eltolódik az előző pozíciójához képest. Időben is negyed periódusnyi lesz az eltolás (lásd a távvezetékek állóhullámát).

Ha az állóhullám bármely további csomópontjához ismét egy ideálisan vezető fémlap helyezünk, azon a peremfeltételek teljesülnek és a térelrendezés változatlan marad. Zárt üreg belsejében meghatározott frekvencián rezgő elektromágneses teret nyerünk. Ez az elrendezés a hengeres *üregrezonátor*.

Az üregrezonátor rezgési frekvenciáját a kiindulási módus ismeretében tudjuk meghatározni. Állóhullámok esetén a cső L hosszára egész számú fél hullámhossznak kell esnie:

$$L = p \frac{\lambda_g}{2}, \quad (10.112a)$$

azaz

$$\beta = p \frac{\pi}{L}, \quad (10.112b)$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_h}\right)^2}}, \quad (10.113)$$

ahol

$$\lambda_h = \frac{2\pi}{k_{e,m}}. \quad (10.114)$$

Az üregben mért hullámhossz

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{2}{\lambda_h}\right)^2 + \frac{p^2}{L^2}}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{k_{e,m}}{\pi}\right)^2 + \frac{p^2}{L^2}}}, \quad (10.115)$$

innen a rezgés frekvenciája

$$\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda} = \pi c \sqrt{\left(\frac{k_{e,m}}{\pi}\right)^2 + \frac{p^2}{L^2}}. \quad (10.116)$$

Négyszögletes keresztmetszetű üregben TE és TM módusra egyaránt

$$k_{e,m}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (10.117)$$

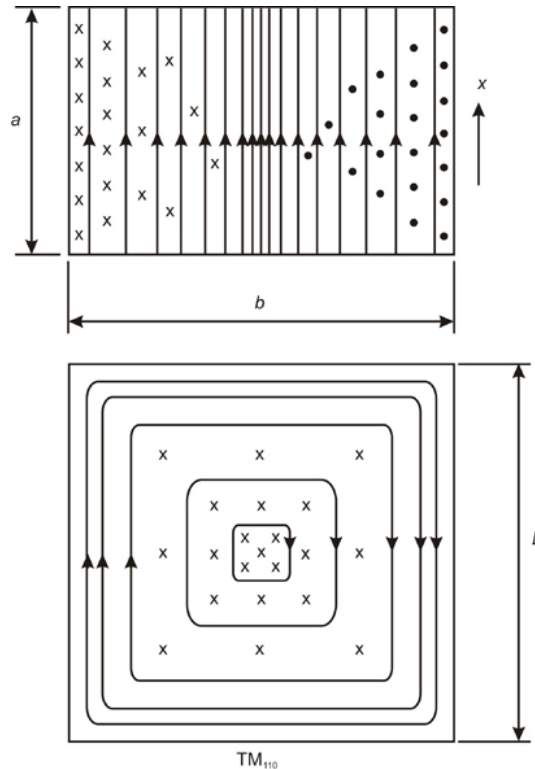
a két módusindexszel leírható sokaság. Ezt (10.115)–(10.116)-be helyettesítve

$$\lambda_{mnp} = \frac{2}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{L^2}}}, \quad (10.118)$$

$$\omega_{mnp} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{L^2}} \quad (10.119)$$

háromméretű diszkrét sokaságot kapunk. A frekvenciák végtelen sokasága grafikusán a diszperziós diagramból 10.2. ábra határozható meg, a (10.112b) által megkövetelt fázis-tényezővel.

Mindhárom módusindexet nem választhatjuk zérusnak. TE módusoknál m vagy n zérusnak választható. A 10.12. ábra a TE_{011} üregmódus erővonalképét mutatja. Más irányból szemlélve ez a TM_{110} módusnak felelne meg, ahol az eredeti terjedési irány az x tengely. A $p = 0$ index ebben az esetben azt jelenti, hogy a z irányban nincsen változás a térkomponensekben. Ez az üregmódus biztosítja a legkisebb rezonáns frekvenciát adott méretű üregben: ez az alaprezgés. Téglaltest alakú üregekben a TE és TM csőtápvonalmódusok megkülönböztetése önkényes.



10.12. ábra. A villamos vagy mágneses alaprezgés hasáb alakú üregben

A rezonátorok jósági tényezőjét a falveszteségek határozzák meg

$$Q = 2\pi \frac{\text{a rezgő rendszerben tárolt energia rezonanciafrekvencián}}{\text{a periódusidő alatt disszipált energia}} \quad (10.120)$$

Ennek jó becslése

$$Q \cong \frac{2}{\delta} \cdot \frac{\text{térfogat}}{\text{fal felülete}}, \quad (10.121)$$

ahol δ a behatolási mélység. Ez a becslés a véges vezetőképességű falba hatoló hullám síkhullámmal közelítésén alapul.

Dielektromos rezonátorok

Felismertük, hogy csőtápvonalak lezárásával üregrezonátort alakítunk ki, amely meghatározott frekvenciákon rezonáns rendszerként viselkedik. Hullámokat nemcsak zárt csőtápvonalakkal, hanem dielektromos hullámvezetőkkel is tudunk irányítani. Felvetődik a kérdés: lehet-e dielektromos hullámvezetőből rezonáns elrendezést kialakítani? Általánosságban: alkalmasan kialakított és megfelelő anyagjellemzőjű dielektromos test tud-e rezonátorként viselkedni?

A kérdést különösen időszerűvé teszi az a tény, hogy nagy permittivitású, kis veszteségű dielektrikumok állnak rendelkezésünkre. A miniaturizálás további igényt jelent kisméretű, könnyű, stabil, nagy jósági tényezőjű rezgő rendszerek iránt.

A dielektromos rezonátor akkor felel meg e követelménynek, ha permittivitása (a rezonanciafrekvencián is) nagy ($\varepsilon_r \geq 30$). Ilyen permittivásnál a dielektrikumot és a szabad teret elválasztó felület közel ideális nyitott áramkört jelent.

Kellően nagy permittivítás esetén ugyanis még merőleges beesésnél is közel teljes reflexió következik be. A

$$r = \frac{Z_0 - Z_w}{Z_0 + Z_w} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} - \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_r} - 1}{\sqrt{\varepsilon_r} + 1} \Bigg|_{\varepsilon_r \rightarrow \infty} = 1 \quad (10.122)$$

reflexiótényező nagy ε_r esetén megközelíti az egységet. Ezért az elsőrendű közelítés során a dielektrikum-levegő határfelületet ideális mágneses falnak tekintjük. Az ideális mágneses fal az ideális vezetőfelület duálja: az elektromos térnek csak párhuzamos komponense létezik a felületen, a mágneses tér tangenciális komponense zérus. Energia a falon nem tud átáramlani, mert a Poynting-vektornak ilyen feltételek mellett nincsen a falra merőleges komponense.

Az ideális mágneses fal feltételezése hasonló az ideális fémfal feltételezéséhez. A valódi fémfalak veszteségesek, ezért a csőtápvonal felületén csekély energiaáramlás van. Nagy permittivítás esetén az energiakiáramlás a dielektromos rezonátorból nem lényegesen nagyobb arányú, a dielektromos rezonátor jósági tényezője nem sokkal rosszabb, mint zárt üregeké. A dielektromos rezonátorok egyik nyilvánvaló előnye azonnal látszik: azonos rezonáns frekvenciához kisebb méretek megfelelőek. A lineáris méretek nem ferromágneses közeg esetén $\sqrt{\varepsilon_r}$ -szer kisebbek.

IRODALOMAJÁNLÁS

A jegyzet tárgyalása feltételezi a műszaki egyetemek bevezető fizika tantárgy elektromágneses anyagának ismeretét: alapfogalmak, elemi elektrosztatika és mágnesség, a Maxwell egyenletek integrális alakja. Számos ilyen tankönyv közül csak egyet idézünk:

Hudson, A. – Nelson, R: Útban a modern fizikához, 1994 Budapest, LSI Oktatóközpont

Mézői alaptantárgy egy Nobel-díjas fizikustól

– *Feynman, R. P. – Leighton, R. B. – Sands, M: Mai fizika 5. – 6. kötet, 1970 Budapest, Műszaki Könyvkiadó*

Az elektrodinamika mézői szemléletű monografikus feldolgozása:

– *Simonyi Károly: Elméleti Villamosság, 2000 Budapest, (12. átdolgozott kiadás, társszerző: Zombory László), Műszaki Könyvkiadó*

Az elektrodinamika fizikus szemléletű monografikus feldolgozásából nem hiányozhat a relativitáselmélet:

– *Jackson, J. D.: Klasszikus elektrodinamika, 2004 Budapest, Typotex*

A fizika világhírű nagyléptékű tárgyalásának, a „Landau-Lifsic” sorozatnak vonatkozó kötetei:

Landau, L. D. – Lifsic, E. M.: Elméleti fizika

– *II. Klasszikus erők, 1976 Budapest, Tankönyvkiadó*

– *VIII. Folytonos közegek elektrodinamikája, 1986 Budapest, Tankönyvkiadó*

FÜGGELÉK

Elektromágneses SI-mértékegységek

Az SI-alapegységek elektrodinamikában a méter [m], kilogramm [kg], másodperc (szekundum) [s] mechanikai egységek mellett az áram egysége: az amper [A]. Elektromos jelenségeknél könnyebb a rokon MSVA (Giorgi-)alapegységek használata. Ezek a

méter	[m]
másodperc	[s]
volt	[V]
amper	[A]

Jelölés	Fizikai mennyiség	Mértékegység neve	Jele	Származtatása
I	áramerősség	amper	A	alapegység
Q	elektromos töltés	coulomb	C	$A \cdot s$
U	potenciálkülönbség elektromos feszültség	volt	V	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
E	elektromos térerősség	volt per méter	$\frac{V}{m}$	$kg \cdot m \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
D	eltolási vektor elektromos fluxussűrűség	coulomb per négyzetméter	$\frac{C}{m^2}$	$\frac{A \cdot s}{m^2}$
R, Z, X	ellenállás impedancia reaktancia	ohm	Ω	$V/A = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
ρ	fajlagos ellenállás rezisztivitás	ohmméter	$\Omega \cdot m$	$kg \cdot m^3 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
P	elektromos teljesítmény	watt	W	$V \cdot A = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$
C	kapacitás	farad	F	$C/V = \frac{A \cdot s}{V} = kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^4 \cdot A^2$
ϵ	permittivitás	farad per méter	$\frac{F}{m}$	$\frac{A \cdot s}{V \cdot m} = kg^{-1} \cdot m^{-3} \cdot A^2 \cdot s^4$
χ_e	szuszceptivitás	(dimenzió nélküli)	–	–
G, Y, B	vezetés, admittancia szuceptencia	siemens	S	$\Omega^{-1} = kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^3 \cdot A^2$
σ	vezetőképesség (konduktivitás)	siemens per méter	$\frac{S}{m}$	$\frac{1}{\Omega m} = kg^{-1} \cdot m^{-3} \cdot s^3 \cdot A^2$
B	mágneses indukció mágneses fluxussűrűség	tesla	T	$\frac{Wb}{m^2} = \frac{V \cdot s}{m^2} = kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Φ	mágneses fluxus	weber	Wb	$V \cdot s = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
H	mágneses térerősség	amper per méter	$\frac{A}{m}$	$A m^{-1}$

A	mágneses vektorpotenciál	tesla · méter	T · m	$\frac{V \cdot s}{m} = \frac{Wb}{m} = kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
L	induktivitás	henry	H	$\frac{Wb}{A} = \frac{V \cdot s}{A} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
μ	permeabilitás	henry per méter	$\frac{H}{m}$	$\frac{V \cdot s}{A \cdot m} = kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
χ_m	mágneses szuszceptilitás	(dimenziotlan)	–	–

Alapvető állandók

Fénysebesség

$$c = 299\,792\,458 \frac{m}{s} \cong 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Vákuum permeabilitása

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$$

Vákuum permittivitása

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cong \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{F}{m}$$

Elemi töltés

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} C$$

Összetett vektoroperációk

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \varphi$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{v}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{v}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{v}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = 0$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \Delta \varphi$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}$$

Descartes-féle koordináta-rendszerben

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

$$(\Delta v)_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2} \quad i = x, y, z$$

Más koordináta-rendszerben

$$\Delta \mathbf{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}$$

Integráltételek

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \oint_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{dA} \quad \text{Gauss-tétel}$$

$$\int_A \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dA} = \oint_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{dl} \quad \text{Stokes-tétel}$$

$$\int_V \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{dV} = \oint_A \varphi \, \mathbf{dA}$$

$$\int_V \operatorname{rot} \mathbf{v} \, dV = \oint_A \mathbf{dA} \times \mathbf{v}$$

$$\int_A \mathbf{dA} \times \operatorname{grad} \varphi = \oint_L \varphi \, \mathbf{dl}$$

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) \, dV = \oint_A \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \, dA \quad \text{Green-tétel}$$

$$\int_V \left[\varphi \Delta \varphi + (\operatorname{grad} \varphi)^2 \right] \, dV = \oint_A \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dA \quad \text{Green-azonosság}$$

Hendrik Antoon LORENTZ (1853–1928), holland fizikus, Nobel-díjas

Az elektrodinamika kiemelkedő tudósa. Az elektromágneses tér jelenségeit az elektronok mozgásával és kölcsönhatásával magyarázta. Elméletében az éter még kitüntetett szerepet kapott. Nevéhez fűződik a speciális relativitáselmélet tér-idő transzformációja, amit röviddel Einstein előtt publikált. Ezt ma Lorentz-transzformációnak nevezik.

Gerjesztett mennyiségek

Az elektromágneses mezőt a töltések és áramok hozzák létre, gerjesztik. Azok a fizikai mennyiségek, amelyek a gerjesztő mennyiségekkel primer kapcsolatban vannak, a gerjesztett mennyiségek, gerjesztett vektorok: **D** és **H**. Jellemzőjük, hogy inhomogén Maxwell-egyenletekben szerepelnek.

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho.$$

Térmennyiségek

Az elektromágneses mező erőter. Minden pontban a tér által kifejtett erőhatás jellemzi. A Lorentz-erő formulájából látjuk, hogy a mező erőhatását az **E** elektromos térerősség és a **B** mágneses indukció jellemzik. Ezek a térmennyiségek vagy térvektorok. Jellemzőjük, hogy homogén Maxwell-egyenletekben szerepelnek.

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

Charles-Augustin COULOMB (1736–1806), francia fizikus

Hadmérnöként végzett. 1777-ben feltalálta a torziós mérleget. Ezzel igen precíziós méréseket végezve felfedezte és matematikailag formába öntötte az elektrosztatika inverz négyzetes erőtvényét. Eredményeit 1785 és 1789 között publikálta. Jóllehet az inverz négyzetes erőtvényt Priestley 1767-ben már javasolta, de nem részletezte és dolgozta ki, John Robison pedig 1769-ben megmérte (bár kis eltérést kapott pozitív és negatív töltésre), de nem publikálta.

Ezért a törvényt Coulomb nevéhez kötik. Tiszteletére a töltés SI-egysége a coulomb.

André-Marie AMPÈRE (1775–1836), francia fizikus és matematikus

1820 és 1825 között alapvető kísérleti és elméleti kutatásokat végzett a vezetékekben folyó áramok mágneses kölcsönhatásáról. Négy kísérletével megalapozta az egymásra ható áramelemek törvényét. Felismerte a köráram és a mágneses dipólus terének hasonlóságát, felfedezte a szolenoidot, a mágneses teret létrehozó tekercset. Egyik tanulmányának címében jelent meg először az „elektrodinamika” fogalma. Maxwell Ampère-t „az elektromosság Newton”-jának nevezte.

Tiszteletére az áram SI-egységét ampernek nevezik.

Mágneses töltés (mágneses monopólus)

Hipotetikus részecske: „mágnes egy pólussal”. Bár a modern fizikai elméletek megengedik a létezését, azt kimutatni az intenzív kutatás ellenére sem sikerült 2007-ig. Ezért élünk azzal a tapasztalatnak tekinthető feltételezéssel, hogy mágneses töltés nem létezik.

Pierre-Simon LAPLACE (1749–1827), francia matematikus és csillagász

A gravitációs erőter vizsgálatához ő vezette be a gravitációs skalár potenciál fogalmát. Megmutatta, hogy a skalár potenciál eleget tesz (a ma róla elnevezett) parciális differenciálegyenletnek (olyan térrészben, ahol nincsen gravitáló tömeg). (1785)

René DESCARTES (1596–1650), francia filozófus, matematikus

Hihetetlenül mélyen hatott kora gondolkodására, a „modern filozófia atyja” elnevezéssel illették.

Az analitikus geometria modern megteremtője, a derékszögű (Descartes) koordináta-rendszer megalkotója (1637). Bevezette a hatványok ma is használt jelölését a hatványalap felső indexeként: például x^2 .

Fénytani „elméletei” kapcsán rájött a fény törési törvényére, amelyet ma Snell–Descartes-törvénynek nevezünk.

Híres filozófiai módszere a kételkedés. Ebből ered a mindenki által ismert tétel: „Cogito, ergo sum.” (Gondolodom, tehát vagyok.) A kételkedés során ugyanis a kételkedő, gondolkodó individuum léte nem vonható kétségbe.

Siméon-Denis POISSON (1781–1840), francia matematikus, geométer és fizikus

Módosította Laplace potenciálegyenletét elektromos töltéssel kitöltött térre (1813). Ezzel új fejezetet nyitott az elméleti fizikában az elektromos és mágneses jelenségek matematikai leírásával.

George GREEN (1793–1841), brit matematikus és fizikus

Poisson kutatásait általánosította és kiterjesztette. 1828-ban megjelent fő műve: „An Essay on the Theories of Electricity and Magnetism” a potenciálméletek továbbfejlesztése, bevezetve az alapvető jelentőségű Green-függvényt a peremérték-feladatok megoldására és a Green-tételeket.

Karl Fridrich GAUSS (1777–1855), német matematikus és természettudós,
„a matematikusok fejedelme”

Szerteágazó és messze ható tudományos tevékenységéből csak az elektromos és mágneses térre vonatkozó eredményeit emeljük ki.

Az elektromos Gauss-törvény kapcsolatot teremt az elektromos tér és a töltés között. Differenciális formában az egyik Maxwell-egyenletnek felel meg, és mint ilyen, a klasszikus elektrodinamika egyik alaptörvénye, közeli rokonságban a Coulomb-törvénnyel. A törvényt Gauss 1835-ben fedezte fel, de csak 1867-ben publikálta.

A mágneses Gauss-törvényt inkább a „mágneses töltés hiánya” néven emlegetjük. Szintén az egyik Maxwell-egyenlet.

A két törvény közös matematikai alapja a matematika Gauss-tétele (Gauss–Osztrogradszkij-tétel vagy divergenciatétel). Ezt a tételt először Lagrange fedezte fel 1792-ben, azután egymástól függetlenül felfedezték: Gauss (1813), Green (1825) és Osztrogradszkij (1831).

Tiszteletére a mágneses indukció CGS mértékegysége a gauss (G). $1G = 10^{-4}T$

Félix SAVART (1791–1841), francia fizikus

J. B. Biot-tal együtt felfedezte a stacionárius áram által létrehozott mágneses tér alap-törvényét, a Biot–Savart-törvényt. Akusztikai munkássága is ismert.

Jean-Baptiste BIOT (1774–1862), francia fizikus, csillagász és matematikus

1820-ban Félix Savarttal együtt kísérletileg igazolják a Biot–Savart-törvényt, a stacionárius áram által keltett mágneses tér törvényét. A törvényt Laplace öntötte a ma ismert matematikai formába.

1804-ben Joseph Gay-Lusac-kal hőlégballonon 5 km magasságba emelkedik és az atmoszféra tulajdonságain kívül a Föld mágneses terének változását méri.

Tiszteletére az elektromos áram CGS egysége a biot. $1 \text{ biot} = 3,33 \cdot 10^{-10} \text{ A}$.

Georg Simon OHM (1789–1854), német fizikus és matematikus

1827-ben publikálta „Die galvanische Kette mathematisch bearbeitet” című tanulmányát, amelyben ismerteti az Ohm-törvényt: a vezetéken átfolyó áram és feszültség arányosak egymással. Az elmélet kidolgozásában az elektromos áram és a hővezetés analógiáját használta fel. Tiszteletére egyenáram esetén az elektromos impedancia, azaz az elektromos ellenállás egysége az ohm (Ω).

$$\Omega = V/A.$$

Gustav Robert KIRCHHOFF (1824–1887), német fizikus

1845-ben publikálta az Ohm-törvényt áramkörökre kiterjesztő Kirchhoff-törvényeket. 1848-ban Ohm lineáris vezetőkire kidolgozott elméletét háromdimenziós vezetőkire alkalmazta. Az elméletben az Ohm által sikerrel bevezetett hővezetési analógiát használta. Egyúttal kimutatta, hogy az árameloszlás mindig olyan, hogy a Joule-hő (disszipáció) minimális legyen.

Kirchhoff nevéhez fűződik a kis keresztmetszetű, hengeres távvezeték matematikailag korrekt vizsgálata és annak kimutatása, hogy a vezetéken a hullám fénysebességgel terjed (1857).

További jelentős eredménye a színeképelemzés és alkalmazása a Nap vizsgálatára.

Joseph Louis LAGRANGE (1736–1813), olasz származású, francia matematikus és fizikus

A matematika különböző területein meghatározó eredményeket ért el. A függvényanalízis és a valószínűség-számítás egyik megalapozója. A newtoni mechanikát analitikus alapokra helyezte (Lagrange-egyenletek).

William THOMSON (Lord Kelvin) (1824–1907), ír származású fizikus és mérnök

Jelentős szerepe volt a 19. század fizikájának alakulásában. Ő vezette be a „mozgási energia” kifejezést az addig használatos „eleven erő” helyett.

Elektrodinamikában 1846-ban publikálta az elektrosztatika rugalmasságtani analógián alapuló modelljét.

Thomson különböztette meg először a mágneses térerősséget és indukciót mágneses közegekben. Kifejezését a mágneses tér energiasűrűségére ma is használják. Meghatározó felismerése, hogy az energia térben elosztva helyezkedik el (1853). Ő vezette be a szuszceptibilitás és permeabilitás fogalmát és helyesen írta le az anizotrop mágneses viselkedést.

1853-ban írta fel az első időben változó jelenségre vonatkozó „Kirchhoff-egyenleteket”.

1854-ben az akkor fiatal fizikus Maxwell hozzá fordult tanácsért: hogyan kezdje el az elektromágnesség tanulmányozását. Maxwellre jelentősen hatottak Thomson eredményei.

1854-ben megalkotta a tenger alatti kábel első modelljét. Történeti érdekesség, hogy az induktivitást elhanyagolta, így mai terminológiával RC vonalat írt le. Termodinamika munkássága szerteágazó. Tiszteletére nevezték el az abszolút hőmérsékleti skála egységét Kelvinnek.

Gyakorlati érzelme is kiváló volt. Már a tenger alatti kábelből meggazdagodott, de ezen kívül számos találmányát értékesítette.

Leydeni palack, az első széles körben használt kondenzátor

A fegyverzetet egy palack külső, illetve belső felületére tett fémfólia alkotta. A belső fegyverzethez a szigetelt fedélen átvezetett fémpálcára erősített lánc vezetett, a külsőt rendszerint földelték.

1745-ben fedezte fel van Musschenbroek, aki a leydeni egyetemen tanított és 1746-ban közzétette a felfedezését. Röviddel előtte von Kleist német tudós (jogász, lelkész) is felfedezte ezt a szerkezetet, de nem publikálta. Így lett az elnevezés leydeni palack.

Herman von HELMHOLTZ (182–1894), német orvos és fizikus

1847-ben kimondta az energiamegmaradás általános elvét: a mechanikai mozgás, hő, fény, elektromosság és mágnesség mind egy közös erő megjelenési formája. Az erő szó a modern terminológiában energia. Jelentősek fiziológia felfedezései optikai és akusztikai téren (Helmholtz-rezonátor), valamint termodinamikai munkássága.

Elektromágneses eredményei kevésbé fontosak. Elmélete szabad térben is megenged longitudinális elektromágneses hullámokat, amelyek nem léteznek.

Tiszteletére nevezték el a kis térrészben homogén mágneses teret létrehozó tekercspárt Helmholtz-tekercsnek, és egy elliptikus differenciálegyenletet Helmholtz-egyenletnek.

Tanítványai kiváló eredményeket értek el az elektrodinamikában: Heinrich Hertz, A. A. Michelson, Michael Pupin.

James Clark MAXWELL (1831–1879), skót matematikus és fizikus

Már fiatalon is szerteágazó – és eredményes – érdeklődési köréből kétségtelenül a legjelentősebb eredménye a Maxwell-egyenletek megalkotása. Ezek az egyenletek az addigi, elektrodinamika tömör megformulálásán túl lényeges újdonságot is adtak hozzá: megújították az eltolási áram és az így módosított gerjesztési törvény bevezetésével. Ezzel Maxwell megalkotta az elektromágneses tér mindmáig érvényes fenomenologikus elméletét (1864: A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field).

Egyenletének következménye az elektromágneses hullám, amely szabad térben a fény sebességével terjed. Ennek alapján feltételezte, hogy a fény elektromágneses hullám.

Jelentőset alkotott termodinamikában (kinetikus gázelmélet, Maxwell–Boltzmann-statisztika), optikában (színes fényképezés) és számos más területen.

Einstein szerint Maxwell munkássága: „a legmélyebbre hatoló és leggyümölcsözőbb, amit a fizika Newton óta élvezett.”

Tiszteletére nevezték el a mágneses fluxus CGS egységét maxwellnek (Mx).

$$1 \text{ Mx} = 1 \text{ G} \cdot \text{cm}^2 = 10^{-8} \text{ Wb}$$

Távíróegyenletek

James Clark Maxwell, William Thomson (Lord Kelvin) és Oliver Heaviside munkái nyomán alakult ki a távvezetéseken terjedő hullám leírásával szolgáló parciális differenciálegyenlet.

William Thomson 1855-ben RC vezetékkel modellezte a tenger alatti kábelt. 1857-ben Kirchhoff a hengeres vezeték mentén terjedő hullám matematikai leírását adta. Először számította ki a hosszegységre eső L és C értékeket és bebizonyította, hogy a terjedési sebesség a fénysebesség.

1876-ben Oliver Heaviside publikálja a veszteséges távvezeték egyenleteit. A Maxwell-egyenletekből Henri Poincaré vezette le a távíró-egyenleteket.

Thomson-kábel

A torzításmentes kábelt William Thomson (Lord Kelvin) tiszteletére nevezték el így.

Joseph FOURIER (1768–1830), francia matematikus és fizikus

Hőáramlással kapcsolatos matematikai problémái megoldására megalkotta a függvények szinuszfüggvénysorával történő előállítását. A sorfejtést nem folytonos függvényekre is alkalmazta. Szigorú matematikai megalapozása évszázados feladat volt, ma azonban a matematika általános analitikus módszere.

Tiszteletére nevezték el a Fourier-transzformációt, amely a nemperiodikus függvényekre a Fourier-sorfejtés megfelelője.

Ludwig LORENZ (1829–1891), dán fizikus

1867-ben publikálta fényelméletét. Ennek során bevezette a retardált potenciálokat és megmutatta, hogy a retardált potenciálok eleget tesznek a (ma róla elnevezett) Lorenz-feltételeknek. Ez a feltétel az áram folytonossági egyenletének a következménye.

A feltételt gyakran – tévesen – H. A. Lorentz holland fizikusnak tulajdonítják.

Henrich HERTZ (1857–1894), német fizikus

Helmholtz tanítványa volt, aki már diákkorában ráirányította figyelmét az elektromágneses jelenségekre.

1883–84-ben Kielben magántanárként részletesen tanulmányozta a kor elektromágneses térelméleteit és állást foglalt a Maxwell-elmélet mellett. Az akkor még igen komplikált egyenleteket átformálta, lényegében egy időben az angol O. Heaviside-del az egyenletek ma használatos formájára. Ezzel jelentősen elősegítette az elmélet elterjedését a kontinentális Európában. (Einstein a Maxwell-egyenleteket mint Maxwell–Hertz-egyenleteket idézte.)

1885-ben Karlsruheban kapott professzori állást. Az erős elméleti alapozás után kísérletekbe kezdett az elektromágneses hullámok előállítására. 1887-ben sikerrel továbbított elektromágneses hullámokat néhány méter távolságra, amit 1888-ban publikált.

Közben kidolgozta a vonalszerű (lineáris) antennák elméletét. Ehhez szüksége volt a hullámhosszhoz képest igen rövid dipólus, mint elemi sugárzó terének ismeretére. Az igen rövid sugárzó dipólokat a tiszteletére nevezzük Hertz-dipólusnak.

A frekvencia SI-egysége: hertz (Hz). 1 hertz = 1 ciklus/s vagy egyszerűen s^{-1}

John Henry POYNTING (1852–1914), angol fizikus

1884-ben publikálta a később róla elnevezett Poynting-tételt, amely az elektromágneses energia mérlegegyenlete. A tételből következik, hogy az elektromágneses energiaáramlás teljesítménysűrűsége a Poynting-vektor, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. A korabeli fizikusok közül sokan osztották azt a feltevést, hogy az elektromágneses energiát az áram viszi magával (mint egy csőben áramló folyadék). A Maxwell-elméletben egyértelmű, hogy az energiaáramlás is a térben történik, és egyszerű formulával kifejezhető.

Izotrópia

Az izotrópia jelentése: *minden irányban egyforma*. A görög szó az *iso* (egyenlő) és *troposz* (irány) szavak összetétele. Elektrodinamikában a közeg izotrópiája azt jelenti, hogy tulajdonságai függetlenek a térerősség, illetve a hullámterjedés irányától.

Fénysebesség

A fénysebesség ma elfogadott értéke vákuumban $c = 299\,792\,458$ m/s. Ez az érték természeti állandó. Ezért a hossz és az idő egysége közül csak az egyiket kell definiálnunk, a másik származtatott mennyiség. Ma mikrofizikai alapon az idő egységét a másodpercet [s] definiálják, és a méter [m] az a távolság, amelyet a fény $1/299\,792\,458$ másodperc alatt megtesz.

A fénysebesség definícióját Bay Zoltán javasolta 1965-ben, amit 1983-ban fogadott el a Súlyok és Mértékegységek Nemzetközi Konferenciája Párizsban a 17. ülésen. Egyidejűleg a méter definícióját ezzel koherensen állapították meg.

Willebrord SNELL (latinosan: SNELLIUS) (1580–1626), holland csillagász és matematikus

1621-ben fedezte fel az optikai töréstörvényt, a geometriai optika egyik alaptörvényét. Életében nem publikálta. R. Descartes a törvényt tőle függetlenül ismét felfedezte és 1637-ben publikálta. Ezért a törvényt általában kettejük nevével jelölik.

David BREWSTER (1781–1868), skót tudós, feltaláló és író

Optikai eredményei közül legismertebb a polarizáció reflexióval és refrakcióval (fénytöréssel) és a kettős törésű kristályok felfedezése. A kaleidoszkóp és a lencsés sztereoszkóp felfedezője.

Augustin-Jean FRESNEL (1788–1827), francia fizikus

A hullámoptika jelentős alakja. A diffrakció matematikai elméletének megalapítója. Felfedezései közül legismertebb a Fresnel-lencse, amely kis fókusztávolsága ellenére könnyű és keskeny, ezért a világítótornyokban napjainkig használatos.

Rádiótechnikában is használják a Fresnel-zóna fogalmát. A zónán belüli objektumok reflexiója jelentősen rontja az átvitel minőségét.

Helmholtz-tétele

A vektoranalízis alaptétele. A tétel állítása: bármely elegendően sima és a peremeken (illetve a végtelenben) eltűnő vektortér felbontható egy rotációmentes és egy szolenoidális (divergenciamentes) vektortérre.

Joseph HENRY (1797–1878), amerikai fizikus

Az Albany Academy tanáraként elektromágnesekkel foglalkozott. E munka közben felfedezte az önindukció jelenségét, egy időben Faraday-jel. Munkáját azonban jóval később publikálta, így Faraday-hez kötik a felfedezést. Megengedőbb szerzők megosztják a két fizikus között az önindukció és a kölcsönös, illetve mozgási indukció felfedezéseit.

Tiszteletére az induktivitás SI-egységének elnevezése: henry

Franz Ernst NEUMANN (1798–1895), német fizikus, matematikus, mineralógus

Fizikában hőtannal, optikával és elektrodinamikával foglalkozott. 1845 és 1847 között e területtel foglalkozó publikációsorozata a Maxwell előtti elméleti elektrodinamika egyik csúcsteljesítménye. Az elektromágneses indukció vizsgálata során megalkotta a kölcsönös indukciós együttható Neumann-képletét.

Carl Gottfried NEUMANN (1832–1925), német matematikus, Franz Ernst Neumann fia

Az elméleti fizika kiemelkedő művelője. Elsősorban potenciálemeléssel foglalkozott. Ezen a területen vezette be a róla elnevezett peremfeltételt. Nevéhez fűződik a Neumann-sor, a mértani sor általánosítása operátorokra, ami az integrálegyenletek megoldásának egyik eszköze.

Johann Peter Gustav Lejeune DIRICHLET (1805–1859), német matematikus

A modern függvényfogalom egyik megalkotója. A matematika számos ágában alkotott maradandót, különösen számelméletben, valószínűségelméletben, differenciálegyenletek elméletében. Utóbbihoz fűződik a Dirichlet probléma: az egyenlet olyan megoldásának megkeresése, amely a peremeken előírt értéket vesz fel.

Konzervatív erőter

Olyan erőter, amelyben a zárt úton végzett munka zérus. A zárt utat bejáró részecske energiája nem változik, innen az elnevezés. Tipikus konzervatív erőter az elektrosztatikus tér és a gravitációs tér.

Michael FARADAY (1791–1867), angol fizikus és kémikus

Autodidakta természettudós, „a legnagyobb kísérletező”. Matematikában nem képzett, eredményeinek értelmezésében a szemléletesség jellemző. Ő vezette be az erővonal fogalmát az általa felfedezett elektromágneses indukció magyarázatára. Ez a felfedezés teremtette meg a modern elektrotechnika alapjait.

Felfedezte a Faraday-effektust: a fény polarizációs síkja mágneses térben (egyes anyagokban) elfordul.

Elektrokémikusként megalkotta az elektrolízis törvényeit. Felfedezte a benzolt és a klórt.

Nevét viseli a kapacitás SI-egysége, a farad, valamint a Faraday-állandó, egy mol elektron töltése, kb. 96500 C/mol.

Albert EINSTEIN (1879–1955), német származású elméleti fizikus

A relativitáselmélet „atyja”. A fényelektromos elmélet (fizikai Nobel-díj, 1921) kifejlesztésével bebizonyította, hogy a fény kvantumokban terjed. Az elektrodinamikára, statisztikus mechanikára, kozmológiára és kvantumfizikára gyakorolt alapvető hatása miatt sokan a 20. század legnagyobb tudósának tartják.

Diszperzió

Az a jelenség, amikor a szinuszos időfüggésű hullám terjedési tulajdonságai, elsősorban fázissebessége függ a frekvenciától. A diszperzió eredményeképpen a sok frekvenciát tartalmazó hullámcsomag torzul a terjedés során, az impulzus alakú jel általában szélesedik (időben meghosszabbodik).

Oliver HEAVISIDE (1850–1925), angol villamosmérnök, matematikus, fizikus

Bevezette a szinuszos gerjesztésű elektromos áramkörök komplex számokkal történő leírását, az operátorszámítást (ma Laplace-transzformációként ismerjük), újraformulázta a Maxwell-egyenleteket.

Először írta fel a távíró-egyenleteket.

Megjósolta a Heaviside réteg (E-réteg) létezését az ionoszférában.

Kiemelkedő szerepe volt a vektoranalízis kialakításában és felhasználásában.

Számos kifejezés megalkotója, egyebek között: impedancia, admittancia.

Leonhard EULER (1707–1783), svájci származású, Szentpéterváron és Berlinben dolgozó matematikus.

Rendkívül termékeny tudós, aki a matematika szinte valamennyi ágát magas szinten művelte. Számos felfedezés, tétel és eljárás fűződik a nevéhez. Kiváló fizikus is volt.

George Gabriel STOKES (1819-1903), ír származású matematikus és fizikus

Jelentős eredményeket ért el folyadékmechanikában, optikában és matematikai fizikában.

Nevéhez fűződik a Navier–Stokes-egyenlet, a viszkózus áramlás alapegyenlete. A nagy cambridge-i „természetfilozófus” trió (Maxwell és William Thomson <Lord Kelvin> a másik kettő) legidősebb tagja, aki különösen nagy hatással volt a fiatalabb generációra. Jelentős hatással volt Maxwell-re is az elektrodinamika hidrodinamika modellel történt megalapozásában.

Nevét őrzi a viszkozitás CGS egysége.

Róla nevezték el a matematikai-fizika egyik integrálredukciós tételét, bár az először egy W. Thomson által Stokes-nek írt levélben szerepelt. A nevét végül is úgy szerezte, hogy Stokes a tétel bizonyítását feladatnak tűzte ki egy tanulmányi versenyen. (Nincs információ, hogy sikerült-e bárkinek is a bizonyítás.)



Műszaki Kiadó

Műszaki Könyvkiadó Kft.
1033 Budapest, Szentendrei út 91–93.
e-mail: vevoszolg@muszakikiado.hu

telefon: (06-1) 437-2405
fax: (06-1) 437-2404
www.muszakikiado.hu