Dr. Czeglédy István főiskolai tanár
Dr. Czeglédy Istvánné vezetőtanár
Dr. Hajdu Sándor főiskolai docens
Novák Lászlóné tanár
Dr. Sümegi Lászlóné szaktanácsadó
Zankó Istvánné tanár

Matematika 7.

PROGRAM

általános iskola 7. osztály
nyolcosztályos gimnázium 3. osztály
hatosztályos gimnázium 1. osztály

Átdolgozott kiadás

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

Alkotó szerkesztő:
DR. HAJDU SÁNDOR főiskolai docens

Az 1. kiadást bírálta:
ELŐD ISTVÁNNÉ ny. felelős szerkesztő
DR. MAROSVÁRI MIKLÓSNÉ vezetőtanár

ISBN 963 16 2918 X
Azonosító szám: CAE 041U

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó
Felelős kiadó: Bérczi Sándor ügyvezető igazgató
Felelős szerkesztő: Bosznai Gábor
Műszaki vezető: Abonyi Ferenc
Borítóterv: Bogdán Hajnal
Műszaki szerkesztő: Ihász Viktória
Tördelőszerkesztés és számítógépes grafika: Köves Gabriella
Terjedelem: 8,94 (A/5) ív
3. kiadás
Nyomta és kötötte az Oláh Nyomdaipari Kft.
Felelős vezető: Oláh Miklós

Tartalom

ÁLTALÁNOS MÓDSZERTANI JAVASLATOK

Alaptanterv – Kerettanterv – program – helyi tanterv

Oktatási törvényünk a módszertani szabadság mellett biztosítja a tanszabadságot is. A törvény alapján **a tananyag kialakítása, a követelmények megfogalmazása, az osztály színvonalának megfelelő tárgyalásmód kidolgozása a tanárnak nemcsak joga, hanem kötelessége is.** A tananyagot saját értékrendünk alapján, a helyi tanterv ajánlásait figyelembe véve úgy kell megválasztanunk, hogy megfeleljen az osztály pillanatnyi tudásszintjének, és optimálisan segítse elő minden egyes tanuló fejlődését.

A törvény szerint az iskola helyi tantervét a Nemzeti alaptantervet (a továbbiakban NAT), illetve a Kerettantervet figyelembe véve kellett kidolgoznunk.

A NAT 1995-ben jelent meg, és a 7. osztályban az 1998/99-es tanévben került bevezetésre. A **Kerettanterv**, amelynek a NAT-ra kellett épülnie, **a tanszabadság elve alapján nem tekinthető kötelező dokumentumnak**, de az iskolák többsége a Kerettantervet követve dolgozta ki a helyi tantervét. Ezt a tényt a tankönyvcsalád átdolgozásakor figyelembe kellett vennünk.

A NAT és a Kerettanterv jelenlegi változata több belső ellentmondást tartalmaz, sem pedagógiailag, sem tartalmilag nem alkot egységes, hézagmentes rendszert. Elsősorban a minimumkövetelmények kidolgozása elnagyolt. A matematikában előírt követelmények és a matematikai alapozást is igénylő társtantárgyak követelményrendszere több helyen nem illeszkedik egymáshoz. Ezért sem a NAT, sem a Kerettanterv nem tekinthető „alaptantervnek”, csupán „tantervi alapnak”. Ez azonban nem jelenthet gondot, hiszen ezek a dokumentumok csupán azt a *közös magot* (deklaráltan a tananyag mintegy 70–80%-át) tartalmazzák, amelyet mindenki számára tanítanunk kell. Ezért a helyi tanterv (esetleg a tankönyvszerző), de elsősorban a szaktanár feladata, hogy kiküszöbölje a NAT-ban, illetve a Kerettantervben található hiányosságokat, és tartalmilag, pedagógiailag egységes rendszert dolgozzon ki. Végeredményben az osztály képességének figyelembevételével, a helyi tanterv alapján a szaktanár dönti el, hogy melyik tanulócsoportnak hogyan építi fel a tananyagot.

Ezért tankönyvünk és az ebben a könyvben leírt követelményrendszerünk (mint bármely más tanítási program) csak javaslatnak tekinthető.

A tananyag végső összeállításakor gondoljuk végig a következőket:

Több ismeret felszínes megtanulása semmiképpen sem jelenti azt, hogy a gyermek matematikatudása értékesebb lesz. Inkább kevesebbet tanítsunk, mint amennyit a tankönyv tartalmaz, de azt alaposan, alkalmazásra képesen.

Helyezzünk nagyobb hangsúlyt a tanultak mindennapi gyakorlati alkalmazására. Alaposan foglalkozzunk a százalékszámítással, kamatszámítással, a statisztikai számításokkal és vizsgálatokkal, a mérésekkel, a fizikában és a kémiában tanult fogalmakkal kapcsolatos anyagrészekkel (vektor, sebesség, idő–út diagram, sűrűség, keverési feladatok).

Ne a definíciók, tételek öncélú számonkérésére helyezzük a hangsúlyt. Fontosabb, hogy tanulóink képesek legyenek értelmezni a fogalmakat, követni a társak, a tanár és a tankönyv gondolatmenetét. Lássák meg a fogalmak közti összefüggéseket. Fejlődjön a problémameglátó és -megoldó képességük. Gondolkodásuk sokszínűvé és rugalmassá váljon. Legyenek igényesek a feladatok megoldásának teljes és pontos kidolgozásában.

Ugyanakkor a középiskolába készülő tanulóinknak fokozatosan fel kell készülniük a középiskolában elvárt deduktív túlsúlyú ismeretszerzési folyamatra is. Tudniuk kell, hogy mit jelent egy fogalmat definiálni, meg kell érteniük a definíciók matematikai tartalmát, látniuk kell a tapasztalatszerzésen alapuló sejtés, illetve a bizonyított tétel közti különbséget.

A taneszközökről

Matematika 1–8. Mintatanterv

A NAT, illetve a Kerettanterv követelményrendszerét alapul véve kidolgoztunk egy tantervi mintát, amely 1. osztálytól 8. osztályig egységes koncepció szerint építi fel a matematika-tananyagot. A követelményrendszer felépítésében figyelembe vettük matematikatanításunk hagyományait, a különböző körülmények között dolgozó iskolák igényeit, a korábbi országos felmérések eredményeit, a társtantárgyak matematikával kapcsolatos követelményeit, valamint több európai ország tantervét és vizsgakövetelményeit.

Ezt a mintatantervet a **Műszaki Könyvkiadó** könyv formájában, illetve lemezen egyaránt térítésmentesen biztosítja az iskolák számára.

A mintatanterv alapján a 7. osztály számára a következő taneszközöket dolgoztuk ki:

Matematika 7. A (alapszint) tankönyv

Tartalmazza azt a tananyagot, amelyet mindenkinek tanítanunk kell, és amely a matematika, illetve a társtantárgyak további tanulásához elengedhetetlen.

Látnunk kell, hogy az „alapszint” a heti 3 matematikaórára redukált óratervhez igazodik, amely nem biztosítja azokat az alapokat, és nem fejleszti ki azokat a képességeket, amelyeket majd a középiskola elvár tanulóinktól.

Matematika 7. B (bővített változat) tankönyv

Az alapszinten tárgyalt tananyag mellett olyan kiegészítő anyagrészeket, feladatsorokat tartalmaz, amelyek elsősorban színvonalukban és nem a tananyag mennyiségében haladják meg az alapszintet.

Ezeknek az anyagrészeknek a feldolgozása felkészítheti a tanulókat a középiskolai matematikatanulásra (biztosabb eszköztudás, rendszerezettebb ismeretrendszer, egzaktabb fogalomalkotás, a bizonyítási igény fejlesztése, a problémameglátó és -megoldó képesség magasabb szintje stb.).

A tankönyvben nyomdatechnikai módszerrel (szürke sáv, más feladatszámozás) választjuk el a „kiegészítő" anyagrészeket a „törzsanyagtól". A tankönyv bővített változatának önálló, folyamatos oldalszámozása van, de megadtuk az alapszintű tankönyv megfelelő oldalszámait is. Ezért a két változat, például képesség szerinti csoportbontás esetén akár egy osztályban is használható.

Matematika 7. Gyakorló

A biztos eszköztudás kialakításához tartalmaz feladatsorokat, segíti a korábban tanultak felelevenítését, a hiányosságok pótlását, az új fogalmak, összefüggések felfedeztetését, a tanultak begyakorlását.

Elegendő feladatanyagot tartalmaz a differenciálásra, a folyamatos ismétlés megszervezésére is.

Matematika 7–8. Feladatgyűjtemény

Ezzel a feladatgyűjteménnyel a tehetséggondozást és az emelt szintű képzést kívánták segíteni a szerzők.

Matematika 7. tankönyv feladatainak megoldása

A tanulók önellenőrzését segítő kiadvány.

Témazáró felmérő feladatsorok, matematika 7. osztály

A Mintatantervben, illetve a Programban megfogalmazott követelmények konkretizálása. A felmérő feladatsorok elsődleges célja, hogy segítse a szakmai munkaközösségek munkáját a viszonylag egységes követelményrendszer kidolgozásában.

A **tanulói példányok A** és **B** változatban tartalmazzák a feladatsorokat. A szerzők mindkét változatban külön feladatokat dolgoztak ki az *alapszint* és az *emelt szint* számára.

A **tanári példányokban** a feladatsorok mellett megtalálhatók a javítási útmutatók és az értékelési normák is.

Olcsóbb kivitelben, négy füzetben készül az alapszintű **C** és **D**, illetve az emelt szintű **E** és **F** változat, és külön füzetben ezek javítási útmutatója. Ezeket a változatokat csak az iskolák rendelhetik meg, a kereskedelmi forgalomban a tanulók nem vásárolhatják meg.

A **C**, **D**, **E** és **F** változatokban a témazáró feladatsorok mellett úgynevezett tájékozódó felmérő feladatsorokat is kidolgoztunk. Ezekkel (elsősorban diagnosztikus céllal) a továbbhaladáshoz nélkülözhetetlen eszköztudást mérhetjük fel.

Óraterv

A matematika heti óraszámát az iskolák a helyi tantervükben rögzítik. Az egyes tantárgyakra jutó óraszámot az oktatási törvény és a NAT nem írja elő kötelező jelleggel. A Kerettanterv minimális óraszámként heti 3, évi 111 matematikaórát írt elő.

Az iskolák többségében ezt a 3 órát legalább 1 órával kiegészítik vagy a „kötelezően tervezhető órakeretből”, amelyet az órarend is tartalmaz, vagy a „kiegészítő órakeretből”. A biztos matematikai ismeretek és képességek kulcsfontosságú szerepet játszanak a tanulók további tanulmányi sikereiben. Ezért a viszonylag bő *kiegészítő órakeretből* legalább heti 1 óra „jár” *a matematikatanulással kapcsolatos speciális feladatok* megoldására, a tehetséggondozásra, a versenyre való felkészítésre, a felzárkóztatásra, a kiegészítő anyagrészek megtanítására stb.

Ennek a korosztálynak az elmúlt 100 évben Magyarországon és Európa fejlett országaiban általában heti 4, esetleg 5 matematikaórát biztosítottak és biztosítanak a tantervek. A matematikai alapozást igénylő társtantárgyak már a felső tagozaton, később a középiskolák matematika-, fizika-, kémiaoktatása feltételezik azt a biztos alapozást, amely csak heti 4 órában valósítható meg.

A fentiek miatt a tananyag megtervezése, a tankönyv bővített változatának összeállítása, a követelményrendszer megfogalmazása során 185 napos tanítási évet és 148 matematikaórát vettünk figyelembe. Ugyanennyivel számolt a NAT matematika fejezetét kidolgozó szakmai bizottság is. (A Kerettanterv kötelezően minimum heti 3 órát írt elő, ugyanakkor növelte a korábbi tananyagot.)

Amennyiben a helyi tantervünk nem biztosít kiegészítő órát a matematikaoktatás számára, akkor nem taníthatunk annyit és olyan színvonalon, mint azok az iskolák, amelyeknek 33%-kal magasabb az órakeretük, mint a miénk.

Feldolgozási javaslat az **A**, illetve **B** változatú tankönyvhöz.

	A (3 óra/hét)	**B** (3 + 1 óra/hét)
1. Gondolkozz és számolj!	22 óra	28 óra
2. Síkidomok, testek	18 óra	24 óra
3. Hozzárendelés, függvény	13 óra	16 óra
4. Geometriai transzformációk	8 óra	12 óra
5. Algebrai kifejezések	20 óra	26 óra
6. Háromszögek, négyszögek	11 óra	14 óra
7. Összefoglaló feladatok	6 óra	10 óra
Felmérések íratása és javítása	10 óra	14 óra
Tartalék	3 óra	4 óra
Összesen	111 óra	148 óra

A heti 3 órára **redukált programban** csökkentenünk kell a tanítási anyag mennyiségét, a feldolgozás mélységét és a követelményeket. Ebben az esetben az átlagos képességű vagy az annál gyengébb tanulóink később nem fogják megállni helyüket nemcsak a középiskolákban, hanem a matematikai alapozást igénylő szakmák tanulásakor sem. Még a tehetségesebb tanulóink is reménytelen helyzetbe kerülhetnek a középiskolában, ha időhiány miatt hiányos, nem kellően begyakorolt ismeretekkel bocsátjuk el őket.

Időhiány esetén például az év végi ismétlés óraigénye úgy csökkenthető, hogy a számtan, algebra témakörhöz tartozó ismeretek jelentős részét az 5. fejezet, a geometriához kapcsolódókat a 6. fejezet összefoglalása során tekintjük át.

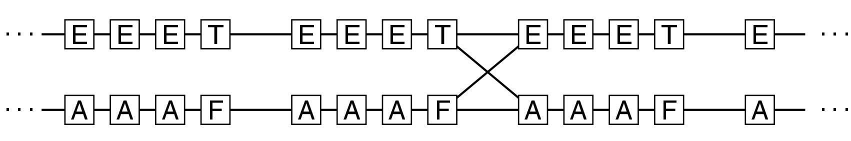
A képesség szerinti csoportbontásról

Felméréseink azt mutatják, hogy 7. osztálytól kezdve olyan nagy különbségek vannak egy-egy osztályon belül is a tanulók képességeiben és tudásában, hogy a tehetséges, illetve a lassabban tanuló (és érdektelen) gyerekeknek *nem lehet eredményesen ugyanazt a tananyagot, ugyanolyan mélységben és intenzitással, ugyanazokkal a módszerekkel tanítani.* Például nemcsak reménytelen, hanem felesleges is a nem középiskolába készülő tanulóknak bonyolult geometriai szerkesztési és bizonyítási problémákkal foglalkozniuk, hiszen nem tudnak bekapcsolódni az érdemi munkába, és később a szakiskolai képzésben (és a szakmában) sem találkoznak ilyen követelménnyel. Számukra sokkal hasznosabb a biztos eszköztudás megszerzése.

Ugyanakkor ha a tehetséges tanulókkal nem lépünk túl az eszköztudás gyakorlásán, akkor elidegenedhetnek a matematikától, és a középiskolában (de már a felvételi vizsgán is) nehezen állhatják meg a helyüket a fokozott követelményekkel szembesülve.

Ezt a polarizáltságot egy tanórán belüli differenciálással már csak nehezen oldhatjuk meg. Ezért azt javasoljuk, hogy 7. osztálytól kezdve (a szülőkkel is megbeszélve, a fenntartóval jóváhagyatva) legalább az anyanyelv, idegen nyelv és matematika esetén alakítsunk ki viszonylag homogén képességű és ambíciójú tanulócsoportokat. Ha az iskolában évfolyamonként legalább két párhuzamos osztály van, akkor ennek a csoportbontásnak nincs sem anyagi, sem szervezési akadálya. A két csoportnak egyszerre tartjuk a matematikaórát, és a tanulók nem az osztályukkal, hanem a nívócsoportjukban vesznek részt az órán.

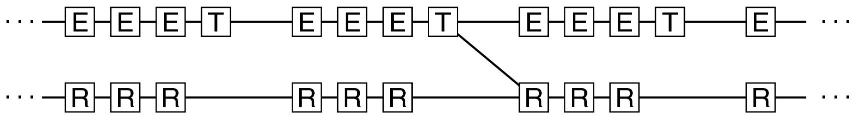
Az emelt szint minden negyedik óráját a kiegészítő anyagrészek tanítására, tehetséggondozásra (T) fenntartott „kiegészítő órakeret” terhére írhatjuk. Ugyancsak ebből az órakeretből felzárkóztatásként (F) elszámolható az alapszint minden negyedik órája is.



A csoportbontás csak akkor biztosítja a tanulók *esélyegyenlőségét*, ha átjárható. Ez úgy valósítható meg legegyszerűbben, ha az alapszintű és az emelt szintű tananyagot egymással párhuzamosan tanítjuk, és egy-egy téma lezárásakor egyes tanulók csoportot cserélhetnek az egyéni igények vagy a témazáró dolgozatok eredménye alapján.

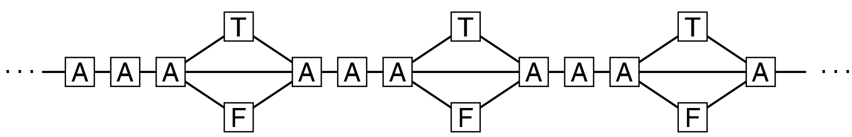
Akkor is megoldható a csoportbontás, ha a két csoportban ugyanaz a kolléga tartja az órát, például úgy, hogy az emelt szintű matematikaórát az alapszintű anyanyelvi órával párosítjuk, és viszont.

Ha az alapszintű és az emelt szintű tananyagot egymástól függetlenül építjük fel, és esetleg csak az emelt szintű csoportnak tudjuk biztosítani a heti 4 órát, akkor az átjárhatóság csak kivételes esetekben, legtöbbször csak „lefelé” oldható meg. Az eredetileg is nehezebben haladó, heti 3 órában *redukált tananyagot* tanuló diákjaink néhány hét alatt reménytelenül leszakadnak a heti 4 órában, emelt szinten tanuló társaiktól.



Nagyobb iskolában indíthatunk „gimnáziumi”, „általános” és „alapozó” tagozatot is.

A képesség szerinti csoportbontást azokban az iskolákban nehéz megoldanunk, amelyekben egy-egy évfolyamon egy kis létszámú osztály van. Itt legalább az órák egy részében, minimum heti egy órában bontsuk az osztályt. (Ennek a bontásnak az óraigénye „elszámolható” a korrepetálásra és a diákkörre biztosított kiegészítő órakeretből.) Ilyen szervezésben a törzsanyagot a teljes osztállyal tartott órákon lehet feldolgozni, míg a kiegészítő órákon az alapszinten tanulókkal a minimumkövetelményhez kapcsolódó anyagot gyakoroltatjuk, a hiányosságokat pótoljuk, az emelt szinten viszont kiegészítjük, elmélyítjük a tanultakat.



Vizsgálataink azt mutatják, hogy ha pedagógiailag kellően előkészítjük, akkor a tanulók többsége jól érzi magát az ilyen homogén csoportban, és minden szinten lényegesen eredményesebbé válik a munka.

Mi lehet a különbség az alapszint és az emelt szint tananyaga és követelményrendszere között?

Emelt szinten a tananyag tartalmában minimálisan lépjük túl az alapszintet. Elsősorban mélyebben és magasabb alkalmazási szinten várjuk el a teljesítést. Ugyanazt több oldalról járjuk körül, több szempontból vizsgáljuk meg (például a trapéz területének kiszámítását).

Alapszinten sokszor megelégszünk azzal, hogy a tanuló – a szemléletre támaszkodva – minél teljesebben sorolja fel a fogalom tartalmi jegyeit (például a paralelogramma tulajdonságait), minél több összefüggést „fedez fel”.

Az *emelt szinten* tanulóknak fokozatosan el kell jutniuk oda, hogy megértsék, mi a definíció és mi a tétel. Legyenek képesek kiválasztani a fogalom definiáló tulajdonságait, majd ennek alapján megfogalmazni a definíciót. Tudják megkülönböztetni a szükséges és elégséges feltételeket. Ismerjék fel a különbséget a sejtés és a bizonyítás között. Jussanak el a tételek bizonyításához.

Alapszinten elegendő lehet a begyakorolt ismeretek közvetlen alkalmazása típusfeladatokban.

Emelt szinten olyan feladatokkal is foglalkozhatunk, amelyekre alapszinten már nem föltétlenül kerül sor (például algebrai törtek értelmezési tartományának vizsgálata, geometriai bizonyítások). Ezen a szinten a tanulóknak az újszerű, összetettebb feladatokban is meg kell találniuk a megoldás kulcsát.

Ha az iskola nem biztosítja a heti 4 matematikaórát (3 kötelező óra, 1 kiegészítő óra), akkor az alapszintű tananyag szelekciójával kialakítunk egy az alapszintnél alacsonyabb *redukált szintet*. A redukált szinten nemcsak kevesebbet tanítunk, mint az alapszinten, hanem a tanultak begyakorlására is kevesebb időt szánunk.

A tankönyv két változatát úgy szerkesztettük meg, és a programot (lásd később) úgy állítottuk össze, hogy egy osztályon belül is, egymással összhangban és egymással párhuzamosan megszervezhető legyen az alapszintű (esetleg redukált) és az emelt szintű képzés. A fentiek miatt a tankönyv nagyon „széles sávban” tárgyalja a tananyagot. Ami azt jelenti, hogy egy-egy osztályban a tananyag, a mintapéldák és a feladatok mintegy 60–80%-a dolgozható fel. Hogy melyik 60–80%-a, az a csoport teherbírásától, a helyi tanterv ajánlásaitól és a szaktanár saját értékrendjétől függ.

Az így megszervezett *emelt szintű* képzéshez kívánnak segítséget nyújtani a tankönyv bővített változatának kiegészítő fejezetei és a **Matematika 7–8. Feladatgyűjtemény**, míg az *alapszintű képzést* a **Matematika 7. Gyakorló** feladatsorai támogatják.

A tananyag és a követelmények értelmezéséről

Ebben a részben a NAT, illetve a Kerettanterv fejezeteit követve tekintjük át a tananyagot és a követelményeket. A tananyag feldolgozása című fejezetben szükség esetén konkrétabban is megfogalmazzuk, hogy az adott anyagrész tárgyalása során mit kell elérnünk.

Halmazok, logika, kombinatorika

A tankönyvben, tanmenetjavaslatban a halmaz, logika témakör nem alkot önálló fejezetet, a *Feladatgyűjteményben* azonban igen. Ennek oka, hogy a Feladatgyűjtemény elsődleges célja a jobb képességű tanulók felkészítése a középiskolára.

Ezen az évfolyamon is igaz az, hogy nem halmazelméletet tanítunk, hanem *halmazszemléletet* fejlesztünk. Tanulóink ismerjék az „alaphalmaz”, „igazsághalmaz” fogalmát. Legyenek képesek halmazokat tulajdonsággal megadni, állításhoz igazsághalmazt keresni (adott alaphalmazok esetén). Legyenek képesek vizsgálni adott (ismert) halmazok egymáshoz való viszonyát. Tudják képezni a halmaz kiegészítő halmazát (komplementerét) adott alaphalmaz esetén, alkalmazzák helyesen a halmaz komplementere és az állítás tagadása közti kapcsolatot. Adott szempontok szerint tudják képezni a véges vagy jól ismert végtelen halmazok részhalmazait (kapcsolat a kombinatorikával is). Legyenek képesek két vagy három halmaz közös részét és egyesítettjét képezni. Ismerjék a metszet, a logikai „és", valamint az unió és a logikai „vagy" kapcsolatát. Tudják ezt alkotó módon alkalmazni az új fogalmak, összefüggések vizsgálatában.

Javasoljuk, hogy 7., 8. osztályban *a középiskolába készülő tanulók ismerkedjenek* a halmazokkal, halmazműveletekkel kapcsolatos fogalmakkal, jelölésekkel. Így ez a középiskolában nem lesz túlságosan új, túlságosan idegen. Ugyanakkor azt is javasoljuk, hogy ezeknek a definícióknak és jelöléseknek a *megtanulását* 7. osztályban csak emelt szintű képzés keretében követeljük meg.

A matematikai logikának is csak néhány elemét tárgyaljuk. A szemléletfejlesztés más témakörök konkrét feladatainak megoldásával történik. A tanulók az újonnan tanult ismeretekkel kapcsolatosan is fogalmazzanak meg igaz és hamis állításokat, legyenek képesek állítások igazságát eldönteni. Értsék meg, és az új anyagrészek elsajátításában alkotó módon alkalmazzák az „és", „vagy" kifejezéseket. Tudják a „ha…, akkor…", „pontosan akkor…, ha…" típusú állítások igazságát eldönteni. Használják (helyesen) ezeket a kifejezéseket. Az újonnan tanult ismeretekkel kapcsolatban is értsék meg, és ismert (konkrét) halmazok esetén helyesen használják a „minden", „van olyan" kifejezéseket. Tudják ezeket tagadni. Tudjanak „minden…" és „van olyan…" típusú állításokat átfogalmazni, igazolni vagy cáfolni. Az elsődleges cél ilyenkor az éppen tárgyalt ismeret, összefüggés megértése, az eddigi ismeretekbe való beépítése, a többi témakörrel való összeszövése.

A logikával kapcsolatos feladatok szóhasználata, a mondatok szerkezete sokszor eltér a mindennapi nyelvtől. Például ha azt az állítást (kijelentő mondatot), hogy „Lacinak van két nővére" egy társaságban halljuk, akkor ezt nem érezzük pontatlan közlésnek. Úgy értjük, hogy Lacinak nem egy, nem három, hanem *pontosan* két nővére van. A matematikában ezt a „pontosant" általában meg is kell fogalmaznunk. Például: A prímszámot az jellemzi, hogy *pontosan* két osztója van a természetes számok körében. Az összetett számokra is igaz, hogy van két osztójuk, csakhogy annál több is.

Leginkább az „és" és a „vagy" kötőszók többféle jelentésére kell ügyelnünk. Matematikaórán is használhatjuk különböző jelentéssel ezeket a kötőszókat. Például:

A 10-nél kisebb természetes számok között öt kettővel osztható *és* négy hárommal osztható szám van.

A 10-nél kisebb természetes számok között két olyan szám van (0 és 6), amely kettővel *és* hárommal osztható.

Míg az első mondatban az „és" növelő hatású, addig a második mondatban „logikai és" tulajdonságokat kapcsol össze, ilyenkor csökkentő hatású.

A Feladatgyűjtemény 1.2. fejezetében vannak olyan logikai feladatok (**1.2.01., 1.2.12–16.**), amelyek „nem illenek" egyik témakör tárgyalásába sem. Ezekkel bármikor „színezhető", érdekessé tehető a tanítási óra. Feladhatjuk ezeket szorgalmi házi feladatnak, kiírhatunk pontversenyt. Az érdeklődő, kreatív gyermekek szívesen foglalkoznak az ilyen jellegű problémákkal.

Konkrét példákon vizsgálhatjuk, hogy az állítás és a megfordítottja közül melyik igaz, melyik hamis (**Tk. B6.25.** (bővített változat, Négyszögek vizsgálata); **Fgy. 1.2.11.**). Ezekkel a feladatokkal csak az ismerkedés igényével foglalkozzunk. 7. osztályban legfeljebb az emelt szinten javasoljuk, hogy ezen a téren követelményeket írjunk elő.

A számtan, algebra és a geometria témakörök igen sok lehetőséget nyújtanak a *kombinatorikus szemlélet* fejlesztésére és a megfogalmazott követelmények elérésére. Az erre alkalmas feladatok megoldásakor sor kerül az összes eset megkeresésére valamilyen rend szerint. A rendezési séma lehet fadiagram vagy táblázat. A táblázat számpárjai közti összefüggés megállapítása nem követelmény. Ugyanakkor a tehetségesebb, illetve a középiskolába készülő tanulóinktól elvárható, hogy képesek legyenek a kombinatorikai módszereket alkotó módon alkalmazni a matematika különböző témaköreiben (számelmélet, sokszögek vizsgálata stb.).

Az *elnevezések és képletek megtanítását* legfeljebb csak az emelt szintű oktatásban részt vevők számára ajánljuk. A Feladatgyűjteményben található feladatok (**Fgy. 5.1.01–5.1.41.**) is megoldhatók logikai úton, az elnevezések és képletek ismerete nélkül, bár ezek a feladatok elvezethetnek az általános összefüggések felismeréséhez.

Ha heti 3 órában *redukált program* szerint tanítunk, akkor is adjunk fel feladatokat ezekből a témakörökből, még akkor is, ha minimumkövetelmény nincsen belőle.

Számtan, algebra

7. osztályban e témakörben zömmel az előző években tanultakat fejlesztjük tovább és szilárdítjuk meg. Ezért a tanítás módját, a továbblépés (normálalak, algebrai kifejezés, azonosságok) mértékét és mélységét erősen befolyásolja, hogy

hatodik osztályban mennyit, milyen szinten sajátítottak el a tanulók,

egy-egy osztályon belül (esetleg képességcsoportok szerinti bontásban) mennyire különbözik a tudásuk, képességük, igyekezetük.

A tankönyv, a Gyakorló és a Feladatgyűjtemény együttes használata lehetőséget biztosít mind a hiányok pótlására, mind a jobbak, a középiskolába igyekvők fejlesztésére.

Év elején mérjük föl, hogy kellően biztos-e tanulóink **számfogalma**:

ismerik-e megbízhatóan a tízes számrendszert, képesek-e a számokat a mindennapi életben (más tantárgyakban is) helyesen alkalmazni, tudják-e a számokat különböző alakban felírni: tört- (esetleg vegyesszám), tizedestört, összeg-, különbség-, szorzat-, hányadosalak;

a különböző alakú számok közül ki tudják-e választani az egyenlőket, tudják-e a számokat nagyság szerint rendezni, meg tudják-e adni racionális számok hozzávetőleges helyét a számegyenesen, képesek-e ezt alkalmazni egyenlőtlenségek megoldásának keresésében és ellenőrzésében.

Fontos a racionális számokkal kapcsolatos fogalomrendszer tudatosítása: természetes szám, egész szám, törtszám; pozitív, negatív szám, nempozitív, nemnegatív szám, ellentett, abszolútérték, reciprok.

Középiskolába készülő tanulóink tanulják meg, hogy két egész szám hányadosa racionális szám, és minden racionális szám felírható két egész szám hányadosaként. Ismerjék fel, hogy vannak nem racionális számok is. Tudják megadni törtalakban adott racionális számok tizedestört alakját, véges tizedestört alakban adott számok törtalakját. Ismerjék a végtelen szakaszos tizedestört fogalmát.

Legkésőbb a korábbi anyagrészek átismétlése után a tanulók legyenek tisztában a tört fogalmával: a tört mint az egység törtrésze, mint két szám hányadosa és mint két szám aránya. Tudják adott mennyiség törtrészét és adott törtrészből az egységnyi mennyiséget kiszámítani. Legyenek képesek a törtek egyszerűsítésére, bővítésére.

A korábban tanultakat kiegészítve, tudatosabbá téve (legalább a középiskolába készülő tanulók) sajátítsák el a **számelmélet** elemeit, tudják alkalmazni az osztóról, a többszörösről, a számok törzstényezőkre bontásáról, az oszthatósági szabályokról, a legnagyobb közös osztóról, a legkisebb közös többszörösről tanultakat.

Biztos aritmetikai tudás nélkül bizonytalan lesz a ráépülő algebrai, függvénytani, geometriai ismeretrendszer is. Ezért a **műveletfogalom** és a **műveletvégzés** fejlesztésére 7. osztályban is oda kell figyelnünk, hiszen a korábban megszerzett (esetleg hézagos) tudást csak tervszerű gyakorlással tudjuk megszilárdítani és a tanulók életkorának megfelelő begyakorlottsági szintre emelni. Mérjük fel, hogy tanulóink

tudják-e értelmezni és elvégezni a négy alapműveletet bármilyen alakú racionális számok körében;

ismerik-e a műveleti azonosságokat, képesek-e azokat alkalmazni a számítások ésszerűsítésében, konkrét feladat megoldásakor a többféle kiszámítási mód közül ki tudják-e választani az egyszerűbbet;

értik-e a pozitív egész kitevőjű hatvány fogalmát, kiszámítási módját;

több műveletet tartalmazó kifejezésben meg tudják-e állapítani a helyes sorrendet;

értik-e az **arány** fogalmát, képesek-e azt alkalmazni az egyenes és a fordított arányosság, a **százalékszámítás** körében, ki tudják-e számítani a százalékértéket, az alapot, a százaléklábat a másik kettő ismeretében; tudnak-e arányos osztással kapcsolatos feladatokat megoldani, tudják-e a tanultakat alkalmazni statisztikai számításokban.

A fentiek miatt is fontos a folyamatos ismétlés megtervezése (házi feladatok megválasztása, ellenőrzése; néhány perces óra eleji „bemelegítő”, játékos feladatok a szóbeli számolás gyakorlására; a korábban tanultak rendszeres alkalmazása, összeszövése az új anyagrészekkel; stb.).

Szinte minden anyagrészben lehetőség nyílik

a számfogalom, műveletfogalom erősítésére,
a műveleti tulajdonságok alkalmazására,
egyszerű kapcsolatok aritmetikai vagy algebrai lejegyzésére,
egyszerű algebrai kifejezések számértékének kiszámítására,
az arányossági következtetésekre, százalékszámításra.

Amelyik osztályban a tanulók számfogalma és számolási képessége megbízható, fokozatosan *megtaníthatjuk* a zsebszámológép használatát a racionális számkörben. A számológép használatánál gondolnunk kell a pontos érték és a közelítő érték közti különbségre.

A tanulóknak már a korábbi ismeretekre támaszkodva tudniuk kell egész és tizedestört alakban adott számokat adott nagyságrendre kerekíteni, kerekített értékekkel számolva írásban vagy zsebszámológéppel végzett műveletek eredményét megbecsülni. Gyakran előfordul, hogy a tanulók a kerekített értékkel való számolás eredményének összes számjegyét pontosnak tekintik. A közelítő számítás szabályait nem tanítjuk, de arra figyelmeztessük őket, hogy az eredmény pontossága igazodjon a legkevésbé pontos adathoz. Például ha egy téglalap oldalai 13,4 cm és 32,2 cm, akkor a területe:

$$T = 13{,}4 \cdot 32{,}2\ \text{cm}^2 = 431{,}48\ \text{cm}^2$$

Azonban az adatok mindegyikében két értékes jegy van, ezért az eredményt is két értékes jegyre kívánatos kerekítenünk: $T \approx 430\ \text{cm}^2$

Az előbbinél pontosabb megoldást kapunk, ha kiszámítjuk a lehetséges maximális hibát.

A terület legalább: $T = 13{,}35 \cdot 32{,}15\ \text{cm}^2 = 429{,}2025\ \text{cm}^2$

legfeljebb: $T = 13{,}45 \cdot 32{,}25\ \text{cm}^2 = 433{,}7625\ \text{cm}^2$

A számítások alapján: $T = (431{,}5 \pm 2{,}3)\ \text{cm}^2$

A hatványokkal, normálalakkal való számolást a tankönyv lényegesen hangsúlyozottabban tárgyalja, mint ahogyan az az alaptanterv alapján elvárható. Így konkrét példákon (ha futja az időnkből és a tanuló erejéből), hosszú távon tudjuk előkészíteni a hatványozás műveleti azonosságait. A normálalakkal számolás lényegesen megkönnyítheti a gyakorlati jellegű feladatok (mértékegység-átváltás, kémiai, fizikai feladatok) megoldását. Tudatossá tehetjük a *zsebszámológépen* nagy (vagy kicsi) számokkal végzett műveleteket. Ezzel elsősorban a középiskolába készülőket, illetve középiskolai tagozaton tanulókat készíthetjük föl a későbbi tananyag megértésére és befogadására.

A *redukált program szerint* a normálalakkal esetleg csak 8. osztályban foglalkozzunk.

Súlyos hiányosságokat tapasztalunk a tanulók beszédkészsége, a matematikai gondolatok elmondása és leírása területén. Ezért minél több alkalmat biztosítsunk a tanulóknak a szóbeli szereplésre (definíciók, összefüggések, ötletek, megoldási tervek, bizonyítások önálló megfogalmazása, lejegyzése). A hibákat következetesen javíttassuk, javítsuk.

Az 1970-es években végzett felmérésekhez képest *lényegesen romlott a tanulók szövegértelmező képessége.* Ezért a szöveges feladatok megoldása során fokozottan figyeljünk arra, hogy tanulóink milyen szintre jutottak ezen a téren. Tudnak-e matematikai szöveget értelmezni? Képesek-e a szöveges feladatokban lévő problémát megfogalmazni, az adatok közül a szükségeseket és feleslegeseket megkülönböztetni, az adatokat lejegyezni, a köztük lévő kapcsolatot megállapítani, ezt a matematika nyelvén megfogalmazni, a megoldást megtervezni, az eredményre becslést adni, azt meghatározni, ellenőrizni és értelmezni a szöveg alapján?

Az erre alkalmas feladatok megoldása során várjuk el a tanulóktól:

a feladat pontos értelmezését, az adatok lejegyzését;

az összefüggések megfogalmazását a matematika nyelvén;

a megoldási terv elkészítését, lejegyzését;

az eredmény megfelelő becslését;

a feladat megoldását, a kivitelezés pontosságát;

az eredmény szöveg alapján történő ellenőrzését, értékelését;

a diszkussziót.

Lényegében új anyag az algebrai kifejezések tárgyalása, bár a szám-szám függvények hozzárendelési szabályát korábban is kifejezés segítségével adtuk meg, ilyen formában jegyeztük le a geometriai (és fizikai) összefüggéseket, és az egyenletek megoldása során is algebrai kifejezésekkel dolgoztunk. Ebben a témakörben – a tanár egyéni értékrendjét, a heti óraszámot, a csoport színvonalát és a helyi tantervet figyelembe véve – nagyon eltérő követelményeket fogalmazhatunk meg az egyes osztályok számára.

A redukált program minimumszintjén is el kell érnünk, hogy a tanulók képesek legyenek értelmezni az egyenletekben, a lineáris függvényekben és a geometriai összefüggésekben előforduló kifejezéseket, tudják ezeket egyszerűbb alakra hozni, és biztosan ki tudják számolni a helyettesítési értéküket. Ismerjék az algebrai kifejezésekkel kapcsolatban az „együttható", a „változó", az „egynemű", a „különnemű" elnevezéseket, ismerjék fel az egynemű kifejezéseket.

Jobb képességű, középiskolába készülő tanulóinknak, természetesen, meg kell haladniuk ezt a minimális eszköztudást. Tudniuk kell alkalmazni a racionális számokra tanult azonosságokat egyszerű algebrai kifejezések körében is. A tanult azonosságok:

az összeg tagjainak és a szorzat tényezőinek felcserélhetősége (kommutativitása), társíthatósága (asszociativitása);

összeg és különbség szorzása (disztributivitás) egytagú kifejezéssel;

összeg és különbség hozzáadása, kivonása.

A *redukált program* szerint a szorzattá alakítás nem követelmény.

Követelmény a lineáris egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása a mérlegelv alkalmazásával (négy-öt lépésben is). 7. osztályban egyszerűbb esetekben az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásában és a megoldás ellenőrzésében elvárjuk a műveleti azonosságok alkalmazását, például zárójelek felbontását, törtek közös nevezőre hozását.

A *redukált program* szerint a nehezebben haladó tanulókkal csak két-három lépésben megoldható egyszerű egyenleteket oldassunk meg.

A *középiskolába készülő tanulók* legyenek képesek a szöveges feladatok megoldási tervét egyenlettel, egyenlőtlenséggel is felírni, az eredményre becslést adni, a megoldást megkeresni, a szövegben megfogalmazott probléma tükrében ellenőrizni, értelmezni.

A *redukált programban* csak a legjobbaktól várható el az egyenlőtlenségre vezető egyszerű szöveges feladatok tervének felírása.

Relációk, függvények, sorozatok

A függvényszemlélet fejlesztése, a kapcsolatok és a változások megfigyelése, szabályok megfogalmazása, leírása nemcsak ebben a témakörben történik, hanem behálózza a többit is. A halmazok, logika ismeretrendszerhez hasonlóan összeszövi az egyes matematikai témákat. Ebből az is következik, hogy 7. osztályban, *alapszinten* a függvényekkel kapcsolatos biztos eszköztudás igen fontos követelmény, fontosabb, mint az egzakt fogalmak kialakítása és a definíciók megtanítása.

Fordítsunk gondot a tapasztalati függvények ábrázolására, értelmezésére, elemzésére, grafikonok, táblázatok készítésére, olvasására. Jegyeztessük le a szöveggel megadott egyszerű függvényeket képlettel, utasítással, grafikusan is. (Kapcsolat a geometriával, fizikával, kémiával.) Az itt szerzett ismereteket nemcsak a mindennapi életben és a társtantárgyak tanulása során hasznosíthatja a tanuló (bár ez önmagában is fontossá teszi ezt a témakört), hanem az igen absztrakt fogalmak kialakulásához is biztos szemléleti alapot szolgáltathat. Szemléletes szinten előkészítheti az elemi függvényvizsgálat tanítását.

A tapasztalat alapján nagyobb gondot kell fordítanunk a szöveggel megadott függvényekre, az adatok lejegyzésére, a változók kifejezésére, ezzel segítve a szöveges feladatok egyenlettel történő megoldását is.

Konkrét példák elemzésével készítjük elő a függvény fogalmát. Képlettel, utasítással megadott hozzárendelésekhez táblázatot készítenek a tanulók, felírják a táblázattal megadott hozzárendelések szabályát. Megvizsgálják, hogy az alaphalmaz elemei közül melyeknek nem lehet képe a hozzárendelésben. Megkülönböztetik az egyértelmű és a többértelmű hozzárendeléseket, kiválasztják a függvényeket. Azonban a függvénnyel kapcsolatos fogalomrendszer felmérésekor ilyen előkészítés után sem törekedhetünk a teljességre.

A témakör gerince *a lineáris függvény.* Az általunk javasolt tárgyalásmód szerint 6. osztályban előkészítjük az *egyenes arányosság mint függvény* fogalmát, felismertetjük, hogy az egyenes arányosság grafikonja az origón átmenő egyenes. Szemléletre támaszkodva felfedeztetjük a grafikon meredeksége és az arányossági tényező közti kapcsolatot. Ha ez az alapozás (időhiány miatt) 6. osztályban nem történt meg, akkor most kell erre sort kerítenünk. 7. osztályban a tanulók ismerjék a lineáris függvény fogalmát. Tudják, hogy az egyenes arányosság és a konstansfüggvény speciális lineáris függvény. Képlettel, formulával adott lineáris függvényhez tudjanak táblázatot készíteni, tudják azt grafikusan ábrázolni (minimumszinten az összetartozó értékpárok által meghatározott pontok segítségével). Értsék (konkrét példákkal kapcsolatosan), hogy $x \mapsto ax + b$ esetén az a függvény grafikonjának meredekségét, b az y tengellyel való metszéspontját határozza meg. Grafikonnal megadott lineáris függvény összetartozó értékpárjait tudják táblázatban felírni. Legyenek képesek a táblázattal, grafikonnal adott lineáris függvény hozzárendelési szabályát (képletét) felírni.

A lineáris egyenletek grafikus megoldását a Kerettanterv előírja. Ha jut is rá idő, *alapszinten* csak 8. osztályban követeljük meg ezt tanulóinktól.

A feladatokban előforduló egyéb függvények célja, hogy a lineáris függvény fogalmát erősítsék, ezért ezek ne jelenjenek meg a dolgozatokban.

Az *alaptanterv* szerint néhány érdekes sorozat megismerésével, vizsgálatával kell foglalkoznunk. A tanulók legyenek képesek megkezdett sorozatokat folytatni adott, illetve felismert szabály szerint. Ismerjék fel többféle szabály megfogalmazásának lehetőségét. A tanultakat legyenek képesek alkotó módon alkalmazni számelméleti, geometriai vizsgálatokban.

Az osztály képességét és érdeklődését figyelembe véve a legkülönbözőbb színvonalon alakíthatjuk ki saját programunkat. Gyengébb csoportban eszközként alkalmazhatjuk a sorozatokról korábban tanultakat például a számolási rutin szinten tartására. *Emelt szinten* ezt az eszköztudást alkotó módon alkalmazhatják a tanulók például geometriai összefüggések feltárására. Egy-két órát szánhatunk néhány nevezetes sorozat (például a Fibonacci-sorozat) megismertetésére is.

A NAT-ban előírt követelményekhez képest a 7. osztályos tankönyv átfogóbban és mélyebben tárgyalja ezt a témakört. Ha megelégszünk az alaptanterv által előírt *minimummal*, akkor *redukálhatjuk a követelményeket.* Ebben az esetben a fogalmak tudatosításával és a tanultak begyakoroltatásával elegendő 8. osztályban foglalkoznunk. (A 8. osztályos tankönyv ismét teljes egészében áttekinti, majd kiegészíti a relációkkal, függvényekkel, sorozatokkal kapcsolatos ismeretrendszert.)

Geometria, mérések

Kívánatos lenne, hogy a geometria a szűk órakeretek ellenére is kellő súllyal szerepeljen a matematikaoktatásunkban. Ez a tananyag terjedelmére, mélységére és a követelmények igényességére egyaránt érvényes.

A 7. osztály geometria tananyagára jellemző, hogy nagy részét az előző évfolyamokon intenzíven *előkészítettük.* Néhány akkor szerzett ismeretet a gyermek életkorának megfelelő szinten, szemléletre támaszkodva „igazoltunk” is (például a háromszög belső szögeinek összegét parkettázással). Az előző években tanultakat úgy gyűjthetjük össze, hogy feldolgoztatjuk a bevezető feladatsorokat is. Ezek a tanulási módszerekre is utalnak, és olyan kapaszkodóknak tekinthetők, amelyek abban is segíthetnek, hogy a különböző tudás- és szemléletszintű tanulókat eljuttassuk legalább a továbbhaladáshoz szükséges szintre.

A követelmények megfogalmazásában is utalunk a tananyag „spirális” építkezésére, illetve a 6. és a 7. osztályos követelményrendszer között meglévő nagy „átfedésre”.

Követelmény, hogy a tanulók értsék és helyesen használják az alapvető geometriai fogalmakat, begyakorlottan hajtsák végre az elemi szerkesztéseket, tudják ezeket alkalmazni.

Ismerjék a vektor szemléletes fogalmát, tudják alkalmazni elmozdulások megrajzolásában és az eltolás értelmezésében.

Legyenek képesek egymással párhuzamos vektorok összegének és különbségének meghatározására konkrét, gyakorlati jellegű feladatokban. (A nem párhuzamos vektorok összegének és különbségének megszerkesztését csak akkor várjuk el, ha a helyi tantervben fizikából ez követelmény.)

Ismerjék a sokszögekkel kapcsolatos fogalomrendszert és elnevezéseket. Tudják kiszámítani a sokszög kerületét.

Biztosan tudják a szögről, szögmérésről, szögfajtákról tanultakat. Tudjanak szöget másolni, felezni, nevezetes szögeket szerkeszteni.
Ábrákon, alakzatokon ismerjék föl a szögpárokat: egyállású, fordított állású szögek (speciálisan csúcsszögek), társszögek (speciálisan mellékszögek).

Ismerjék a körrel kapcsolatos fogalmakat, elnevezéseket. Tudják meghatározni a kör kerületét.

Ismerjék a háromszög fogalmát, tulajdonságait (a háromszög-egyenlőtlenség, a háromszög belső és külső szögeinek összege, kapcsolat a külső és a belső szögek között, kapcsolat az oldalak és szögek között), tudják ezeket alkalmazni szerkesztési, számításos és bizonyítási feladatokban.

Tudják a háromszögeket csoportosítani oldalaik és szögeik szerint. Ismerjék a háromszög magasságának fogalmát. Ismerjék a háromszög egybevágóságának alapeseteit.
Tudjanak háromszöget szerkeszteni a tanult egybevágósági esetek alkalmazásával.

Ismerjék a négyszög, a trapéz, a húrtrapéz, a paralelogramma, a rombusz, a téglalap, a négyzet fogalmát, tulajdonságait, e fogalmak egymáshoz való viszonyát. Tudják a felsorolt négyszögeket megszerkeszteni a háromszögszerkesztésről tanultak alkalmazásával. Az egybevágósági transzformációkról és a szögpárokról tanultakat tudják alkotó módon alkalmazni a speciális négyszögek tulajdonságainak felismerésében, szerkesztési, számításos és bizonyítási feladatok megoldásában.

A szerkesztések végrehajtása nem várható el mindenkitől. Az ezzel kapcsolatos követelmények pontosítását a helyi tanterv figyelembevételével gondoljuk át. *A tananyag feldolgozása* című rész 4. fejezetének megfelelő alpontjaiban és 6. fejezetének bevezetőjében még foglalkozunk ezzel a kérdéssel.

A tanulók térszemléletének fejlesztése érdekében minden évben foglalkozzunk a térelemekkel, illetve a testekkel. Ennek a témakörnek a feldolgozására mindenképpen biztosítsunk elegendő időt. A követelményrendszer most is szerves továbbfejlesztése az előző évek követelményeinek.

A tanulók ismerjék fel a sokszöglapokkal határolt testeket, tudják értelmezni az ezzel kapcsolatos alapvető fogalmakat (él, lap, csúcs, lapátló, testátló), legyenek képesek e testek tulajdonságainak vizsgálatára.

Tudják értelmezni, megrajzolni a sokszöglapokkal határolt testek felül-, elöl- és oldalnézetét.

Ismerjék föl a hasábot, illetve az egyenes körhengert. Ismerjék a hasábbal és a hengerrel kapcsolatos fogalomrendszert, elnevezéseket, az egyenes hasáb és az egyenes körhenger tulajdonságait, a speciális hasábokat (téglatest, kocka).

Tudják megszerkeszteni az egyenes hasáb és az egyenes körhenger hálózatát.

Továbbra is fontosak azok a követelmények, amelyek szoros kapcsolatban vannak a „mindennapok” geometriájával.

A tanulók ismerjék a hosszúság, a tömeg, az űrtartalom és az idő mértékegységeit, tudják a mértékegységeket átváltani.

Ismerjék a terület fogalmát, mértékegységeit, tudják a mértékegységeket átváltani; tudják kiszámítani a téglalap, a négyzet, a deltoid, a paralelogramma, a háromszög, a trapéz és a kör területét. A tanultakat legyenek képesek alkalmazni tetszőleges négyszög, ötszög, illetve a szabályos sokszögek területének kiszámításában (a szükséges adatok szerkesztésével, megmérésével).

Tudják kiszámítani az egyenes hasáb és az egyenes körhenger felszínét.

Ismerjék a térfogat fogalmát, mértékegységeit, tudják a mértékegységeket átváltani. Ismerjék és tudják alkalmazni a térfogat- és az űrmérés mértékegységei közti kapcsolatot. Szerezzenek jártasságot az egyenes hasáb és az egyenes körhenger térfogatának kiszámításában.

Fontos, hogy a racionális számokról, a velük végzett műveletekről és az algebrai kifejezésekről tanultakat biztosan alkalmazzák a tanulók a geometriai számításokban, a kerület-, terület-, felszín- és térfogatképletek értelmezésében, használatában.

A felmérések szerint az elvárt szint alatt marad a terület-, felszín-, térfogatszámítással kapcsolatos ismeretek elsajátítása és a térszemlélet fejlettsége. Ezért (és a gyakorlati alkalmazásra nevelés miatt is) tartjuk fontosnak, hogy behatóan, a többi geometriai témakörhöz kapcsolódva foglalkozzunk ezekkel az anyagrészekkel.

A geometriai transzformációkkal való foglalkozás központi szerepet játszik a szemlélet alakítása és a képi gondolkodás fejlesztése terén. A tanulók az alsó tagozatban viszonylag sok feladatot oldottak meg ebből a témakörből. Ezt a munkát folytatjuk most 7. osztályban, de a témakör átfogóbb feldolgozása későbbi évek feladata.

Követelmények:

Különböző konkrét geometriai transzformációk közül a tanulók ismerjék föl az egybevágósági transzformációkat, a tengelyes és a középpontos tükrözést, az eltolást és az elforgatást (parkettázás, vizsgálatok a derékszögű koordináta-rendszerben). Tudják, hogy az egybevágósági transzformáció távolság- és szögtartó.

Ismerjék a tengelyes tükrözés és a középpontos tükrözés fogalmát és tulajdonságait. Tudják megszerkeszteni adott síkidom tengelyes, illetve középpontos tükörképét. Ismerjék a tengelyes szimmetria és a középpontos szimmetria fogalmát, tulajdonságait. Ismerjék föl a szimmetrikus alakzatokat.
A tanultakat legyenek képesek alkalmazni egyszerű szerkesztésekben, sokszögek tulajdonságainak vizsgálatában.

Emelt szinten elsősorban az egybevágósági transzformációkról és a sokszögekről tanultak szerkesztésekben és bizonyításokban való alkalmazásában várunk többet.

A tanulói segédletek feladatanyaga bőven ad lehetőséget arra, hogy a geometriai ismereteket a többi témakörrel összeszőhessük. A követelményekben ez a koncentráció nem jelenik meg, de nélküle a megfogalmazott követelmények kevésbé teljesíthetők. Az összeszövés lehetősége a többi témakörrel kölcsönös. Például sokszor alkalmazhatjuk a derékszögű koordináta-rendszert sokszögek előállítására, vizsgálatára, területük meghatározására, geometriai transzformációk végrehajtására. Ugyanakkor ezekkel a feladatokkal előkészíthetjük például a függvénytranszformáció tanítását.

Figyelembe kell vennünk, hogy a tanulók geometriai tudásukat tekintve a legpolarizáltabbak. A *redukált program* szerint heti 3 órában tanulók geometriában szakadnak le leginkább a heti 4 órában tanuló társaiktól, és a felmérések szerint ezen a téren vannak a legnagyobb hiányosságaik. Ez nemcsak az ismereteikre vonatkozik, hanem geometriai szemléletük fejlettségére és kifejezési készségük színvonalára is.

Valószínűség, statisztika

A tankönyv első fejezetében, a számtan, algebra ismeretek ismétléséhez, rendszerezéséhez kapcsolódva található két alfejezet ebből a témakörből. A *Matematika* 7. *Gyakorló* 8. fejezete és a *Matematika* 7–8. *Feladatgyűjtemény* 5.2. Mi a valószínűbb? című alfejezete is ennek a témakörnek a feldolgozását támogatja.

Egyik legfontosabb oktatási-nevelési feladatunk annak a képességnek a fejlesztése, hogy a tanulók a matematikaórán tanultakat a mindennapi életben is tudják alkalmazni. Ezért ebben a témakörben érjük el, hogy tanulóink aktuális statisztikai adatokat tudjanak gyűjteni, táblázatba foglalni, tudjanak velük grafikont, diagramot készíteni. A táblázattal, grafikonnal adott adatokat tudják elemezni, értelmezni.

A statisztikai vizsgálatok (táblázatok, grafikonok, diagramok elemzése, készítése) a függvények témakörhöz is kapcsolódik. Ezért a grafikonok tárgyalása során is térjünk vissza ehhez az anyagrészhez, és aktuális statisztikai adatgyűjtéssel, vizsgálatokkal egészítsük ki az ott található feladatokat.

A NAT, illetve a Kerettanterv szerint a matematikai szemlélet alakításának egyik fontos területe a valószínűségszámítás, ezért ez a témakör a korábbiakhoz képest nagyobb hangsúlyt kap a tankönyvben. A témakör feldolgozása során érjük el, hogy a tanulók tudjanak egyszerű valószínűségi kísérleteket végrehajtani, az eseményeket lejegyezni, azok valószínűségére (a nagy számok törvényének megsejtésével) becslést adni. Ismerjék a relatív gyakoriság fogalmát, tudják kiszámítani a megfigyelt esemény relatív gyakoriságát.

Legyenek képesek egyszerű esetekben az esemény valószínűségét meghatározni, azt a relatív gyakorisággal összehasonlítani.

A TANANYAG FELDOLGOZÁSA

1. Gondolkozz és számolj!

Az aritmetika fogalomrendszerének kiépítése az általános iskola első osztályában a természetes számok tanításával kezdődik, s hetedik osztályban jutunk el a racionális számkör fogalmának kialakításához. A fogalom kiépülése azt a követelményt is magában foglalja, hogy a tanulók legyenek képesek a racionális számok különböző alakjaival (természetes számok, egész számok, törtek, tizedestörtek) a négy alapműveletet a maximális begyakorlottság szintjén elvégezni. A hosszú időintervallum, a tanulók eltérő képessége, szorgalma, a szociális háttérben és a szülői igényszintben mutatkozó különbségek nagy valószínűséggel azt eredményezik, hogy 7. osztályban év elején nagy „szórás” tapasztalható mind a tanulók számolási rutinja, mind az egyéb matematikai tevékenysége területén.

Kedvezőtlenül befolyásolhatja tanulóink tudásszintjét az, ha az előző években redukált óraszámban tanítottuk a matematikát. Ha a helyi tanterv alapján a kerettantervi minimumhoz igazodtunk, akkor 6. osztály végére már több mint egy teljes évet veszíthettünk az aritmetikai, illetve algebrai ismeretek feldolgozása terén is. Ezért tanulóink többsége nem rendelkezhet azokkal az alapokkal, amelyek a hetedik osztályos tananyag elsajátításához szükségesek. A redukált óraszám miatt elsősorban a gyakorlásra jutott kevesebb idő. Ezáltal elsősorban a gyengébb képességű tanulók kerültek hátrányba, hiszen nekik a gyakorlásra lényegesen nagyobb szükségük lett volna, mint jobb képességű társaiknak.

Az is elképzelhető, hogy egyes anyagrészekben – a korábban említett okok, illetve a helyi tanterv ajánlásai miatt – egész osztályok elmaradtak attól a szinttől, amit 6. osztály végére feltételez a program. (Lásd Matematika 6. Program.) A tankönyv úgy épül fel, hogy segítségével pótolni lehessen az esetleges hiányosságokat. Például az egyes fejezetek bevezető része áttekinti azokat a korábban tanult ismereteket, amelyek nélkülözhetetlenek az új anyag feldolgozása során. Indokolt lehet egyes anyagrészek újbóli feldolgozása is, ha 6. osztályban, a tananyag zsúfoltsága miatt, kevés idő jutott rájuk, így még az sem biztos, hogy a jó képességű tanulók korábban szerzett ismeretei eléggé szilárdak és alkalmazásra képesek. Ezekkel a fejezetekkel az osztály vagy az egyes tanulók szintjétől függően különböző mélységben és részletességgel ajánlatos ismét foglalkozni, figyelembe véve azt is, hogy 6. osztályban meddig jutottak el.

Ebben a fejezetben ismételjük, rendszerezzük, gyakoroljuk, magasabb absztrakciós szintre emeljük és lényegesen kibővítjük az előző hat évben tanult aritmetika-, algebra-tananyagot. A geometria ismétlése a 2. fejezetben található. Ez az év eleji ismétlés a következő funkciókat töltheti be:

A tanulók tudásában, ismeretanyagában meglévő *hiányosságok feltérképezése.* A feltáró munkán túl azt is célszerű megvizsgálnunk, hogy mi okozta a hiányosságokat. Az okok megkeresése nagy segítség a problémák kiküszöbölésében. Ilyen okok lehetnek: felejtés, helytelen analógia, megszokás, szakszavak helytelen használata stb.

A hiányok pótlása. A tantervben előírtak terén mutatkozó hiányosságokat feltétlen pótolni kell!

Gyakorlás. A korábban tanult, de mostanra elhalványult ismeretek felelevenítése, a számolási rutin kívánt szintre hozása, a problémamegoldó képességek fejlesztése.

Az újonnan tanítandó anyagrészek *megalapozása, előkészítése* (számelmélet, egyenletek, statisztika, függvények, kombinatorika, műveleti tulajdonságok stb.).

Új ismeretek szerzése. Ez vagy úgy valósítható meg, hogy a tanulók meglévő ismereteit *más rendszerbe* illesztjük, s ezáltal *új kapcsolatokat* tárunk fel, vagy úgy, hogy a „régi" tananyagot bővítjük újabb ismeretekkel. (Például: hatványozás – normálalak.)

A *tananyag rendszerezése.* Az intenzív, viszonylag rövid idő alatt történő átismétlésnél a lényeges jegyek kiemelése, elmélyítése, új kapcsolatok feltárása.

E fejezet tárgyalásakor a tankönyv feladatain (**Tk. 1.01–1.117.**) túlmenően megoldathatjuk a Matematika 6. Gyakorló feladatai közül azokat, amelyeket az elmúlt tanévben még nem oldottak meg a tanulók, valamint a Matematika 7. Gyakorló (**Gy.**) 1., 4., 8. és 9. fejezetének, illetve a Matematika 7–8. Feladatgyűjtemény (**Fgy.**) 1.1–2.6. fejezetének feladatait.

A bő feladatanyag arra csábíthat, hogy a tanmenetben előirányzottnál sokkal több időt fordítsunk erre a fejezetre – a többi anyagrész rovására. Ez nem kívánatos. A sok feladattal az volt a szerzők célja, hogy lehetőséget adjanak a differenciálásra, az otthoni gyakorlásra, a felzárkóztatásra és a folyamatos ismétlésre, illetve különböző koncepciójú helyi tantervek kidolgozására.

Az év eleji ismétléskor meg nem oldott feladatok a későbbiek során – az éppen aktuális tananyag tanításakor – is megoldathatók, előkészítve az új ismeret elsajátítását.

Heti 4 matematikaóra esetén a fejezet feldolgozására 28–30 órát javaslunk. A **redukált programban**, heti 3 matematikaóra mellett legfeljebb 22–24 órát szánhatunk ennek az anyagrésznek a feldolgozására. A korábban leírtak miatt azonban ettől eltérhetünk. Ha úgy látjuk, hogy tanulóink a kívánt ismeretekkel rendelkeznek, akkor felesleges – sőt káros is lehet – a műveletek unalmas gyakoroltatása. Ilyenkor vagy a Gyakorló 9. fejezetéből vagy Feladatgyűjteményből oldassunk meg érdekes, nehezebb feladatokat, vagy egy-két órával fordítsunk kevesebbet az anyagrész tárgyalására. Ezt az óraszámot például az év hátralévő részében egyéb anyagrészek színvonalasabb feldolgozására használhatjuk fel.

Egyes osztályokban a 30 óra is kevés lehet az alapos ismétlésre. Ilyenkor sem ajánlatos sokkal többet fordítani erre a fejezetre. Ha úgy érezzük, hogy tanítványaink nem rendelkeznek a továbbhaladáshoz szükséges minimális tudással sem, akkor korrepetálások szervezését javasoljuk.

Csökkenthető az év eleji ismétlés óraigénye úgy is, hogy gondosan megtervezzük e témakör differenciált (akár személyre szóló), *fejlesztő értékeléssel összekapcsolt folyamatos ismétlését.* Ez azt jelenti, hogy az egyes tanulók olyan házi feladatokat kapnak, amelyek segítségével pótolhatják a hiányosságaikat, majd írásban beszámolnak az elért eredményről. Különösen fontos az egyszerű szöveges feladatok megoldásának folyamatos gyakoroltatása.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. A racionális számokkal kapcsolatos fogalomrendszerről tanultak összegzése. A racionális számok írása, olvasása, összehasonlítása, számegyenesen való ábrázolása; ezeknek az ismereteknek maximális begyakorlása.
2. Korábban megkezdtük a hatványfogalom kialakítását. Most továbbfejlesztjük ezt a fogalomrendszert. Az azonos alapú hatványok szorzását, osztását, hatvány hatványozását is tanítjuk. A szabályokat konkrét feladatokhoz kapcsolódóan felismertethetjük, de az általánosítást csak matematikából tehetségesebb tanulóinktól várhatjuk el. Konkrét esetekben, elsősorban 10 hatványaival számolva, már alapszinten is gyakoroltassuk ezeknek az ismereteknek az alkalmazását.
3. A számok normálalakja új anyagként került ebbe a fejezetbe. A 10 pozitív egész kitevős hatványainak alapos ismerete nélkülözhetetlen az anyagrész tanításához.
   Redukált óraszám mellett esetleg csak 8. osztályban tudjuk feldolgozni ezt az anyagrészt.
   10 negatív egész kitevőjű hatványainak értelmezése és így a 0 és az 1 közé eső számok normálalakja kiegészítő anyagként kapott helyet a tananyagban. Csak a jó képességű tanulóknak, illetve középiskolai tagozaton ajánljuk a feldolgozását.
4. A számelmélet elemeiről tanultak felelevenítése, kiegészítése a tanulócsoport képességeinek megfelelő szinten és mélységben.
   Fontos, hogy a középiskolába készülő, illetve a középiskolai tagozatra járó tanulók minél alaposabb tudásra tegyenek szert ezen a téren.
5. A racionális számokkal végzett műveletek gyakorlása, a hiányosságok pótlása. A becslés és a kerekített értékkel való számolás továbbra is komoly gondot jelent a tanulóknak. Átismétlését föltétlenül javasoljuk.
   Jobb csoportban a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös alkalmazása a törtekkel való számolásban.
   A négy alapművelet és a hatványozás helyes sorrendjének megállapítását is elvárjuk minden tanulótól. Új ismeretet jelent a hatványozás beillesztése a műveletsorba.
   Az arányos osztás fogalma új anyagként kapcsolódik ehhez a részhez.
6. A százalékszámítás szerepelt a 6. osztály anyagában, de fontosságára való tekintettel itt ismét foglalkoznunk kell vele. Új elemként kapcsolódik ehhez a részhez a kamatszámítás.
7. A tanultakat alkalmazzuk statisztikai számításokban (adatsorok rendezése, megoszlásának meghatározása, oszlop-, szalag-, illetve kördiagramok készítése). A való-

színűségi kísérletek eredményeinek értelmezéséhez, a relatív gyakoriság, illetve a valószínűség meghatározásához a törtrész fogalmát kell alkalmaznunk.

8. Összegezzük az egyenletekről, egyenlőtlenségekről korábban tanultakat. Ezzel nem fejezzük be ennek a témakörnek a tanítását. A 3. fejezetben az egyenletek grafikus megoldására kerül majd sor. Az 5. fejezetben magasabb követelményszinten visszatérünk e témakör tárgyalására. Ott az algebrai kifejezések átalakításáról tanultak alkalmazásával foglalkozunk. Addig, folyamatos ismétlés keretében (a geometriatananyag feldolgozása során is), a fokozatosság elvét szem előtt tartva, egyre összetettebb feladatokkal gyakoroltassuk az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldását.
9. A tanultakat folyamatosan alkalmazzuk egyszerű szöveges feladatok és egyenlettel, egyenlőtlenséggel megoldható szöveges feladatok megoldásában. Jó alkalom nyílik erre a geometriai számítások, illetve a szöveggel adott függvények tanulása során.

Kapcsolódási lehetőségek

Az év eleji ismétlés gerincét az aritmetika, az algebra alkotja, de ezzel kapcsolatban minden témakört ismételtethetünk, gyakoroltathatunk.

Halmazok, logika, kombinatorika

A halmazok, logika témakörhöz tartozó feladatokkal egyrészt színesebbé, érdekesebbé tehetjük a „száraz" műveletgyakorlást, másrészt a rendszerszemléletre (halmaz, részhalmaz, halmaz eleme) és a matematikai szakkifejezések helyes használatára (és, vagy, legalább, legfeljebb, pontosan, minden, van olyan stb.) nevelhetjük tanulóinkat.

A kombinatorika témakörhöz kapcsolódó feladatokkal elsősorban a matematika iránt érdeklődő tanulóink számára tehetjük érdekesebbé a hatványozás és a számelmélet tanulását. Főleg a rendezési elveket kell tisztáznunk.

Függvények, sorozatok

A szabállyal adott függvények táblázatának kitöltése, néhány összetartozó értékpárral adott függvényhez szabály keresése, sorozatok vizsgálata stb. hatékony eszköz a számolási rutin fejlesztésére, ugyanakkor előkészíti az algebrai kifejezések tanítását is. A számelméleti problémák tárgyalása során is adhatunk olyan feladatokat, amelyek kapcsolódnak a függvények, sorozatok anyagrészhez.

Mértékváltás, mértékegységek

A mértékváltás, a mértékegységekkel való számolás komoly problémája a matematikatanításnak. A biztos, alkalmazásképes tudás elérése céljából, az aktuális aritmetikai anyagrészekhez kapcsolódva, folyamatosan gyakoroltassuk ezeket az ismereteket.

Geometriai számítások

A műveletek gyakorlása mellett mód nyílik a geometriai ismeretek, főleg a kerület-, terület-, felszín-, térfogatszámításról tanultak felelevenítésére is. Ezzel előkészíthetjük a következő geometriai anyagrészek tanítását.

Statisztika, valószínűség

Itt főleg az adatok táblázatba rendezését, illetve adathalmazok értékelését kívánjuk meg a tanulóktól. A Matematika 7. Gyakorló 8. fejezetében is találunk megfelelő feladatsorokat e témakör gyakoroltatásához.

Tanmenetjavaslat

Ebben a „félkész” tanmenetjavaslatban – hasonlóan az 5. és 6. osztályos tanmenetjavaslatokhoz – csak áttekintést nyújtunk a felhasználható feladatokról. Javasoljuk a konkrét osztály szintjének, saját fejlesztési koncepciónknak és a helyi tanterv ajánlásainak megfelelő feladatok sorszámának beírását a tanmenetbe.

Célszerű külön-külön számontartani azokat a feladatokat, amelyek

- a minimumkövetelményekhez kapcsolódnak;
- a tehetséges tanulóink fejlesztését szolgálhatják;
- az elképzeléseinknek megfelelő koncentrációt valósítják meg;
- más fejezet tananyagához tartoznak, de a folyamatos ismétlés keretében itt foglalkozunk velük.

Az osztályok képesség szerinti csoportbontására gondolva a tanmenetekben több helyen javaslunk alternatív megoldásokat.

A bal szélső sávban jelöljük normál vastagságú számjegyekkel, hogy az adott témakör tárgyalására a redukált programban hány óra jut. Az *optimális* (heti 4 órás) *képzésben* részt vevők óraszámait **félkövér** számjegyekkel írtuk.

Óra	**Aktuális tananyag** Folyamatos ismétlés, koncentráció	**Feladatok**
1–2. **1–2.**	*Mit tanultunk a számokról? Racionális számok.* A racionális számokkal kapcsolatos fogalomrendszer áttekintése az osztály tudásszintjéhez igazodva. A racionális számok írása, olvasása, nagyság szerinti összehasonlításuk, ábrázolásuk számegyenesen. Kerekítés, pontosság. Törtek tizedestört alakja. Kijelentések logikai értéke. Halmazműveletek. Mértékegységek átváltása. A hiányosságok pótlására szervezzünk korrepetálást.	Tk. 1.01–1.11.; Gy. 1.05–1.40.; Tk. B1.01.; Fgy. 2.1.04–2.1.13.; Gy. 1.01–1.04., 1.41–1.44.

Óra	Aktuális tananyag	Feladatok
	Folyamatos ismétlés, koncentráció	
3–4. **3–4.**	*Hatvány;* hatványok szorzatalakja, szorzatok hatványalakja. Számolás 10 (esetleg 0,1) hatványaival. Mértékegységek átváltása. *Emelt szint* Azonos alapú hatványok szorzása, osztása, szorzat, hányados hatványozása konkrét számfeladatokban. Kombinatorika. Sorozatok. Egyszerű exponenciális egyenletek megoldása.	Tk. 1.12–1.15.; Gy. 1.45–1.52.; Fgy. 2.3.01–08.; Tk. 1.16.; Tk. 1.17–1.21.; Gy. 1.66–1.85.; Tk. 1.22–1.24.; Fgy. 2.3.08–14.
5. **5–6.** (+ 2 ó.)	1*-nél nagyobb számok normálalakja.* Számolás 10 hatványaival. Mértékváltás. Fizikai mennyiségek. Statisztikai táblázatok elemzése. *Redukált változatban* csak ismerkedés szintjén dolgozzuk fel ezt az anyagrészt. Műveletek normálalakban adott számokkal. A 10 negatív egész kitevőjű hatványai. 0 és 1 közé eső számok normálalakja.	Tk. 1.25–1.27.; Gy. 1.53–1.65.; Tk. B1.02–B1.11.; Gy. 1.86–1.99.; Fgy. 2.3.21–32.
6–7. **7–10.**	*Osztó, többszörös, prímszám, összetett szám.* A 6. osztályban tanult oszthatósági szabályok felelevenítése, új oszthatósági szabályok megismerése. Számok prímtényezőkre bontása. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös. *Redukált óraszám mellett* kevesebb idő jut a témakörre. Számegyenes. Sorozatok. Halmazok metszete, uniója. Kiegészítő halmaz, részhalmaz. Legalább, legfeljebb, pontosan kifejezések helyes használata.	Tk. 1.28., 1.31–1.46.; Gy. 1.102–1.125.; Tk. 1.47–1.50.; Gy. 1.125–1.137.; Tk. 1.29–1.30.; Gy. 1.100–1.101.
8–9. **11–14.**	*Racionális számok összevonása*. Szöveges feladatok. *Emelt szinten:* A számelméletben tanultak alkalmazása törtek egyszerűsítésében, összevonásában. *Szorzás és osztás a racionális számok körében*. Szöveges feladatok. Műveleti tulajdonságok. *Törtrész,* törtrészből egészrész kiszámítása. Kördiagram, szalagdiagram. Zárójelek alkalmazása. Műveletek sorrendje. Műveletek tulajdonságai. Mértékváltás, geometriai számítások. Egyenes és fordított arányosság. Kombinatorika. Egyenletek, egyenlőtlenségek. *Redukált óraszám mellett* kevesebb idő jut a témakörre. (Szükség esetén szervezzünk korrepetálást.)	Tk. 1.51–1.63.; Gy. 1.138–1.143.; Tk. B1.12–B1.13.; Tk. 1.64–1.75.; Gy. 1.144–1.150.; Tk. 1.76–1.78.; Gy. 1.151–1.155.; Tk. 1.79–1.84.; Gy. 1.156–1.174., 9.01–9.07.; Fgy. 2.2.01–21.

Óra	Aktuális tananyag	Feladatok
	Folyamatos ismétlés, koncentráció	
10. **15.** (+ 2 ó.)	*Két szám aránya, arányos osztás.* Tört, hányados, arány, törtrész kapcsolata. **1. témazáró felmérés** megíratása, kijavítása. *Redukált óraszám mellett* nem biztos, hogy jut rá idő. Szöveges feladatok.	Tk. 1.85–1.86.; Gy. 1.175–1.178.; Fgy. 2.4.01–11.
11–12. **16–17.**	*Százalékszámítás. Százalékláb, százalékérték, alap* kiszámítása a másik két adat ismeretében. A százalék és a törtrész kapcsolata. Következtetési sémák. Ismerkedés a kamatszámítással. Műveletek a racionális számok körében. Törtrész. Geometriai számítások.	Tk. 1.87–1.95.; Gy. 1.179–1.192.; Fgy. 2.5.01–22.; Tk. 1.96–1.97.; Gy. 1.193–1.196., 9.32–9.33.
13–14. **18–19.**	*Statisztikai számítások.* Eloszlások, számtani átlag, a szóródás terjedelme, táblázatok, diagramok, grafikonok készítése, elemzése. Műveletek a racionális számok körében. Törtrész. Százalékszámítás gyakorlati alkalmazása.	Tk. 1.98–1.102.; Gy. 8.01–8.20., 9.25–9.26.
15–16. **20–21.**	*Valószínűségi kísérletek.* Gyakoriság, relatív gyakoriság. A nagy számok törvényének és a valószínűség fogalmának megsejtése. Törtrész. Százalékszámítás gyakorlati alkalmazása. Kombinatorika.	Tk. 1.103–1.105.; Gy. 8.21–8.30.
17–18. **22–24.**	*Egyenlet, egyenlőtlenség.* Alaphalmaz, igazsághalmaz, azonosság, azonos egyenlőtlenség. *A mérlegelv* alkalmazása egyenletek megoldásában. *A mérlegelv* alkalmazása egyenlőtlenségek megoldásában. Műveletek a racionális számok halmazán, összevonás, zárójelbontás, műveleti tulajdonságok, műveletek sorrendje. Ellentett, abszolútérték. Halmaz, részhalmaz. *A jobb képességűeknek:* törtegyütthatós egyenletek megoldása.	Tk. 1.106–1.107., 1.108–1.111., 1.112–1.113.; Gy. 4.01–4.13.; Fgy. 2.8.01–03., 2.8.11–13., 2.8.23.
19–20. **25–26.**	*Egyszerűbb szöveges feladatok* megoldása egyenlettel, egyenlőtlenséggel, illetve egyenlet nélkül – következtetéssel, „okoskodással”. Műveletek a racionális számok halmazán. Geometriai, fizikai, kémiai számítások. Arányosság, arány. Százalékszámítás. *Emelt szint* Összetettebb szöveges feladatok megoldása egyenlettel, egyenlőtlenséggel.	Tk. 1.114–1.117.; Gy. 2.01–2.02., 4.22–4.23.; Fgy. 2.8.25–30., 2.9.01–14.

Óra	Aktuális tananyag Folyamatos ismétlés, koncentráció	Feladatok
21–22. **27–28.** (+ 2 ó.)	*Fejlesztő értékelés.* Gyakorlás, rendszerezés, ismétlés, a hiányok pótlásának megszervezése. Vegyes feladatok. **2. témazáró felmérés** megíratása, kijavítása.	Tk. 1.118.; B1.14–B1.38.; Gy. 4.24–4.34.

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Mit tanultunk a számokról?

Felelevenítjük a törtalakban, illetve tizedestört alakban adott racionális számok nagyság szerinti rendezését, ábrázolását számegyenesen, a „reciprok”, az „ellentett”, az „abszolútérték” fogalmát, illetve a számok kerekítéséről tanultakat.

Ha a korábbi években biztosan elsajátították ezeket az ismereteket a tanulók, akkor nem kell külön órát fordítanunk ezeknek a feladatoknak a megoldására. Folyamatos ismétlésként, otthoni munkára támaszkodva eleveníthetjük fel a korábban tanultakat. Az így felszabaduló időt a normálalak alapos begyakorlására fordíthatjuk.

A Gyakorló bőséges feladatanyagot (**1.01–1.44.**) biztosít a hiányosságok pótlására, a képesség szerint differenciált egyéni munka és a hosszú távú folyamatos ismétlés megszervezésére.

Racionális számok

A tankönyv bővített változatában található fejezet.

Jobb csoportban a fejezet feldolgozása során tudatosíthatjuk a racionális számokkal kapcsolatos fogalomrendszert, ezen belül a különböző számhalmazok egymáshoz való viszonyát.

Redukált óraszám mellett, gyengébb képességű osztályban differenciált egyéni munkában, a jobb képességű tanulóknak az előző fejezet gyakorlófeladatainak megoldása után olvasmányként adhatjuk fel ezt a fejezetet.

A korábbi években az egész számok (mint két természetes szám különbségeként felírt számok) fogalmát nem definiáltuk. Az ellentétes mennyiségek vizsgálata során, intuitív szinten alakítottuk ki ezt a fogalmat. A racionális számok fogalmát már 6. osztályban is definiáltuk (két egész szám hányadosaként felírható számok – a nevező nem nulla).

Az apró betűvel írt közbeszúrások megbeszélése során – jobb csoportban – indokolhatjuk a számkörbővítés szükségességét és azt, hogy miért éppen így definiáljuk az egész és a racionális számokat.

Tisztázni kell, hogy ha egy szám felírható két egész szám hányadosaként, akkor az vagy egész szám, vagy véges tizedestört, vagy végtelen szakaszos tizedestört alakban írható. A törtek bővítéséhez, egyszerűsítéséhez kapcsolódva már 6. osztályban „felfedeztethetjük", hogy egy törtszám mikor írható fel véges és mikor végtelen szakaszos tizedestörtként.

A véges tizedestört alakból törtalakba való felírást minden tanulótól megköveteljük, de a végtelen szakaszos tizedestört visszaírását törtalakba csak 8. osztályban, emelt szinten, a jó képességű tanulóktól várjuk el.

Jobb képességű tanulóinktól elvárhatjuk, hogy az *ellentett* és a *reciprok* értelmezésekor is túllépjenek a mechanikus megnevezésen, és fogalomrendszerhez kapcsolódva *definiálják* ezeket a fogalmakat.

Az értelmezések megbeszélése jó alkalmat ad a „definíció" fogalmának tisztázására is.

Hatványozás

Az 5. és a 6. osztályban foglalkoztunk ezzel a témakörrel. Az értelmezést és az elnevezések ismeretét is megköveteltük a tanulóktól.

A hatványozás azonosságait konkrét kitevők esetében a jobb képességű tanulóink önállóan „felfedezhetik" (a kitevők mindig természetes számok). 8., majd 9. osztályban visszatérünk a hatványokkal végzett műveletekhez, *alapszinten* ekkor is elég megkövetelnünk az összefüggések ismeretét és alkalmazását. Ugyanakkor a 10 hatványaival való számolást alapszinten is gyakoroltatnunk kell, hogy majd a normálalakkal tudjanak bánni a tanulók. *Átlagosnál jobb csoportban* viszont érdemes begyakoroltatnunk a felismert azonosságok alkalmazását (lásd **Tk. 1.17–1.23., Gy. 1.66–1.85.; Fgy. 2.3.12–14.**).

Emelt szinten foglalkozhatunk egyszerű exponenciális egyenletek megoldásával is (**Tk. 1.24., Fgy 2.3.11.**).

A számok normálalakja

A zsebszámológépek elterjedésével a korábbinál fontosabb a normálalak biztos ismerete és használata. Ezért az 1-nél nagyobb számok normálalakját *alapszinten* célszerű már 7. osztályban is tanítanunk, így 8. osztályban alkalmazásképes tudást érhetünk el ezen a téren. *Redukált szinten*, ha heti 3 matematikaóra van, akkor erre kevés lehetőségünk van.

Mivel nagyon sok ismeret szintézisét feltételezi ez a fogalom (hatványok, műveleti tulajdonságok, helyiérték, szorzás, osztás 10 hatványaival), ezért még akkor is nehéz, ha a tanulók minden szükséges előismerettel rendelkeznek. Fontos a normálalakkal való számolás gyakorlati hasznának megmutatása (lásd kidolgozott mintapéldák), így kézzelfoghatóbbá válik a tanulóknak, mert a régi ismeretekhez tudják kapcsolni az újat.

A normálalakkal való számolást – főleg, ha a számok között nagyságrendi eltérés van – csak a jobb képességű tanulóknak célszerű tanítani, ha a 10 hatványaival már biztosan számolnak.

Emelt szinten tárgyalhatjuk a 0 és 1 közé eső számok normálalakját is (lásd a tankönyv bővített változatát). Ehhez értelmeznünk kell (legalább) a 10 negatív egész kitevőjű hatványait.

A hatványozás azonosságainak alkalmazásához, illetve a normálalak teljesebb megismeréséhez és a normálalakkal való számolás gyakorlásához (jobb csoportban is) mintegy 2–4 órával többre van szükség, mint amit a tanmenetjavaslat ajánl. Ezt az óraszámot a racionális számokkal végzett műveletek ismétlésénél „kaphatjuk vissza”, ha tanulóink az átlagosnál jobban számolnak, illetve ha úgy látjuk, hogy a számolási rutin a folyamatos ismétlés során, otthoni önálló munkával is kellő szintre hozható.

Osztó, többszörös, oszthatósági szabályok
Törzsszámok, összetett számok
Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

A korábbi években a tanulók megismerkedhettek a számelmélet elemeivel, a legfontosabb fogalmakkal, néhány oszthatósági szabállyal, esetleg a számok prímtényezős felbontásával is. Ugyanakkor látnunk kell, hogy a tanulók többségénél – időhiány miatt – nem szilárdulhattak meg ezek a fogalmak. Úgy foghatjuk fel, hogy az osztályok többségében 6. osztályban csak előkészítettük ezeket az ismereteket. Ezért a 7. osztályos tankönyv is újra részletesen foglalkozik a számelmélettel.

Fontos, hogy a középiskolába készülő tanulóink az oszthatósági szabályokat ne receptszerűen sajátítsák el, hanem konkrét számokhoz kapcsolódva „fedezzék fel” és „bizonyítsák” is azokat. Ezzel kialakíthatjuk a bizonyítási igényt, fejleszthetjük tanulóink problémamegoldó képességét, és megtehetjük az első lépéseket a középiskolában elvárt absztrakciós szint elérése felé.

Ugyanakkor a tételek (például az oszthatósági szabályok, végtelen sok prímszám van, a számelmélet alaptétele) *általános bizonyítását* 7. osztályban sem javasoljuk, még középiskolai tagozaton is korainak tartjuk.

A számok prímtényezőkre bontását főképpen a középiskolába készülő tanulóinkkal gyakoroltassuk be. Tudják ezt alkalmazni a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös megadására is. A következőkben példát mutatunk arra, hogy hogyan lehet egyszerűen meghatározni több szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét.

7500	7200	4500	2
3750	3600	2250	2
1875	1800	1125	3
625	600	375	5
125	120	75	5
25	24	15	2
-	12	-	2
-	6	-	2
-	3	-	3
-	1	5	5
5	-	1	5
1	-	-	

$(7500;\ 7200;\ 4500) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. $[7500;\ 7200;\ 4500] = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^4$.

Így egyértelműen látszik, melyek a közös prímtényezők, s hogy például miért kell a legkisebb hatványuk szorzatát venni a legnagyobb közös osztó meghatározásakor.

Az összevonás gyakorlása a racionális számkörben
Közös osztó és közös többszörös alkalmazása
A szorzás és az osztás gyakorlása a racionális számkörben

E fejezettel egyrészt a *műveletek gyakorlása,* másrészt az *algebrai kifejezések* és az *egyenletek* tanításának az előkészítése a célunk. Könnyebb lesz az **5.** fejezetben a kifejezések összevonása, szorzattá alakítása, illetve a zárójelbontás, ha itt konkrét számokkal alaposan begyakorolhatjuk azt.

A racionális számok bármely alakjával való műveletvégzés (a négy alapművelet) minimumkövetelmény 7. osztályban, de a tanulók előképzettsége nagy szóródást mutathat. Valószínű, hogy az átlagos osztályokban nagyon sok tanuló nem rendelkezik a szükséges számolási ismeretekkel, rutinnal, képességekkel. A felmérések azt is megmutatták, hogy tanulóinknak mintegy 20%-a még a 8. osztály végén is funkcionális analfabéta, vagyis a legegyszerűbb szövegek információtartalmát sem képes felfogni. Ezért a műveletek gyakorlásával párhuzamosan 7. osztályban is sokat kell foglalkoznunk az egyszerű szöveges feladatok megoldásával.

Ha a fejezetek feldolgozására szánt néhány óra nem elegendő, akkor a tankönyv és a Matematika 7. Gyakorló bő feladatanyaga lehetőséget ad, hogy folyamatos ismétlés keretében pótoljuk a hiányosságokat.

Emelt szinten is meg kell győződnünk arról, hogy a tanulók már a korábbi években eljutottak-e a megfelelő szintre. Ha igen, akkor a műveletek gyakorlására legfeljebb 1–2 órát kell biztosítanunk. Új ismeretként jelenhet meg a számelméletben és a hatványozásról tanultak alkalmazása a törtek egyszerűsítése, illetve összevonása során (Lásd a tankönyv bővített változatát). Ezzel komplex módon gyakoroltathatjuk és a tudatosítás magasabb szintjén „összeszőhetjük" a korábban tanultakat.

A számolási képességek további fejlesztését a tanulók önálló otthoni munkájára támaszkodva (esetleg több héten át is tartó) folyamatos ismétlés keretében célszerű megoldanunk úgy, hogy egy-egy alkalommal ne terheljük meg túlságosan a tanulókat. Az így felszabadult óraszámot (mint korábban már leírtuk) a hatványozás, a normálalak és a számelmélet alaposabb megtanítására fordíthatjuk.

Mennyiségek törtrésze

Új fogalmakat nem tartalmaz ez a fejezet, de – főleg a szöveges feladatokban – sok olyan ismeretet elevenít fel, amely a százalékszámítás, az egyenletek, a függvények témakörének tanulása során nélkülözhetetlen. Ezért a 6. osztályban tanultak gyakorlása mellett e fejezetek tanítását is előkészíthetjük az ismétlés során.

Ehhez az anyagrészhez kapcsolódva adjunk feladatot kördiagramok, illetve szalagdiagramok (**Tk. 1.77., Gy. 1.154.**) értelmezésére, készítésére is.

Zárójelek használata. A műveletek sorrendje

A hatványozás beillesztése a műveletsorba és a különböző előjelű számok szorzásának, osztásának kapcsolata jelent újat az eddigiekhez képest.

A zárójelek használata, a műveletek helyes sorrendjének megállapítása minimumkövetelmény. Az ezzel kapcsolatos ismeretek hiányában elképzelhetetlen az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása, az algebrai kifejezések átalakítása, helyettesítési értékük kiszámítása. Ezért alap- és emelt szinten egyaránt különös gondot kell fordítanunk ezeknek az ismereteknek a felelevenítésére, begyakorlására.

A tankönyvben, a Matematika 7. Gyakorlóban és a Feladatgyűjteményben található bő feladatanyag lehetővé teszi, hogy a tanulók pillanatnyi tudásszintjének megfelelő nehézségű feladatokat oldassunk meg.

A bő feladatanyag lehetővé teszi a felzárkóztatást, illetve az otthoni differenciált egyéni munkában megvalósuló folyamatos ismétlés megszervezését is.

Arány, arányos osztás

Az arány 6. osztályban a százalékláb tanításakor került előtérbe, de a tanítására fordított idő kevés volt arra, hogy a tanulók maradéktalanul elsajátítsák azt. Így szükségesnek érezzük, hogy 7. osztályban – az arányos osztással mint új anyaggal kapcsolva – ismét tanítsuk.

Az arányos osztásnál törekednünk kell arra, hogy a tanulók tudják indokolni: miért osztjuk a mennyiséget az arányszámok összegével.

Például: 90 Ft-ot 2 : 3 : 4 arányban szétosztani annyit jelent, hogy az egészet – azaz a 90 Ft-ot – annyi egyenlő részre kell osztani, hogy az első 2 részt, a második 3 részt, a harmadik 4 részt kaphasson belőle. Ez pedig 9 egyenlő részre való osztást jelent. A törtrészek rendre: $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{9}$. Ezek összege valóban kiadja az egészet, a $\frac{9}{9}$-et. A 90 Ft $\frac{1}{9}$ része 10 Ft. Így 20 Ft-ot, 30 Ft-ot, 40 Ft-ot kapnak az egyes személyek.

Ha befér az időkeretbe, akkor célszerű itt megíratni az **1. témazáró dolgozatot**. (Heti 3 matematikaóra esetén nehezen tudunk erre időt szakítani.)

Százalékszámítás
Kamatos kamat

Már 6. osztályban foglalkoztunk a százalékszámítással, ennek ellenére sok hiányosságot észlelünk tanulóinknál ezen a téren. Ezért *alapszinten* sok osztályban indokolt lehet, hogy 1–2 órával többet fordítsunk erre az anyagrészre, mint amennyit a tanmenetjavaslat előír, illetve otthoni munkában ismételten adjunk fel e témakörhöz tartozó, gyakorlati jellegű (a mindennapi élettel, a kémiával stb. kapcsolatos) feladatokat. Tanulóinktól követeljük meg a számítások menetének indoklását.

Fontos, hogy ne képleteket magoltassunk be, hanem a gondolkodási tervet, vagyis a következtetési sémát ismerjék fel a tanulók. Ugyanakkor (jobb képességű osztályban) a következtetési séma tudatosítása és alkalmazása mellett tovább is léphetünk. A százalékértéket mint az egészrészből a törtrészt, az alapot mint a törtrészből az egészrészt határozzuk meg. A százalékláb kiszámítása a százalékérték és az alap arányának kiszámításához kapcsolódik.

A százalékszámítás fontos gyakorlati alkalmazásaként foglalkozzunk a kamatszámítás elemeivel. A tankönyv feladatai mellett dolgoztassuk fel a gyakorló megfelelő feladatait is (**Gy. 1.193–1.196., 9.08., 9.28–9.33.**).

Statisztikai számítások

Követelmény, hogy tanulóink tudjanak statisztikai adatokat gyűjteni, rendszerezni, kategorizálni, táblázatba foglalni. Tudjanak ezekből az adatokból grafikont, oszlop-, kör- és szalagdiagramot készíteni. Tudják meghatározni az adatok számtani átlagát, szóródásának terjedelmét.

Bár ehhez a munkához a tankönyv és a gyakorló bőséges feladatanyagot szolgáltat (**Gy. 8.01–8.20., 9.25–9.26.**), mindenképpen gyűjtsenek tanulóink friss statisztikai adatokat, elemzéseket.

Valószínűségi kísérletek

Követelmény, hogy tanulóink tudjanak valószínűségi kísérleteket végrehajtani, eseményeket lejegyezni, azok valószínűségére becslést adni. Ismerjék a gyakoriság és a relatív gyakoriság fogalmát. Tudják kiszámítani a megfigyelt esemény relatív gyakoriságát. Legyenek képesek a legegyszerűbb esetekben az esemény valószínűségét kiszámítani, azt a relatív gyakorisággal összehasonlítani.

A tankönyv 2. példájában az események valószínűségét nem határozhatjuk meg a kombinatorika alkalmazásával. Kísérleti úton (a nagy számok törvényét alkalmazva) tudjuk azt megbecsülni. A mindennapi élet valószínűséggel kapcsolatos problémái általában ilyenek. Ezért az ilyen jellegű kísérletek tényleges végrehajtása nemcsak a fogalmak tudatosítását szolgálja, hanem képessé teszik tanulóinkat a tanultak gyakorlati alkalmazására is.

Egyenlet, egyenlőtlenség, azonosság, azonos egyenlőtlenség
Egyenletek megoldása a két oldal egyenlő változtatásával
Egyenlőtlenségek megoldása a két oldal egyenlő változtatásával
Szöveges feladatok megoldása egyenlettel, egyenlőtlenséggel

Az első szakaszban az 5. és a 6. osztályban tanultak ismétlése, a fogalomrendszer tudatosítása és áttekintése a feladatunk.

A mérlegelvet 6. osztályban két-három lépésben megoldható egyenletek esetében alkalmazták a tanulók. Most a következő területeken lépünk tovább:

> Az egyenletekben szereplő kifejezésekben előfordulhat az ismeretlenek, illetve a számok *összevonása*. Ezzel mintegy előkészítjük az *egynemű kifejezések összevonásának* tanítását.
>
> A kifejezések összevonása során alkalmazzuk a zárójelbontást.
>
> Alkalmazzuk a törtekkel végzett műveletekről tanultakat.

> Felismertetjük és tudatosítjuk, hogy ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanazzal a negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk, akkor az egyenlőtlenség iránya megváltozik.

Gondosan mérlegeljük, hogy az egyes csoportokban meddig juthatunk el. Az átlagosnál gyengébb, illetve a *redukált program* szerint tanuló csoportokban hatékonyabb lehet, ha alaposan gyakoroltatjuk a legegyszerűbb egyenletek, egyenlőtlenségek megoldását, és csak az **5.** fejezet tárgyalása során, esetleg majd 8. osztályban lépünk tovább.

Alapszinten az egyenlettel, egyenlőtlenséggel megoldható szöveges feladatokkal most csak ismerkednek a tanulók. Ilyen szöveges feladatokat később, a geometriai számításokkal, majd az algebrai kifejezések alkalmazásával kapcsolatosan is adhatunk fel.

Emelt szinten nagyobb súlyt kell helyeznünk az egyenlettel, egyenlőtlenséggel megoldható szöveges feladatok megoldására is. A kidolgozott 2. példa egy százalékszámítással kapcsolatos szöveges feladat egyenlettel történő megoldását mutatja be.

Tudáspróba
Gyakorló- és fejtörő feladatok

A tankönyv bővített változata további feladatsorokat biztosít a tanulók tudásának elmélyítésére.

A tudáspróba két feladatsora – akár otthoni munkában, akár gyakorlóórán dolgoztatjuk fel – fejlesztő értékelésre alkalmas. Segítségével „feltérképezhetjük” az egyes tanulók tudásszintjét, az esetleges hiányosságokat. Ilyen felmérés nélkül nem szervezhető céltudatos folyamatos ismétlés.

Heti 4 matematikaóra esetén most esedékes a **2. témazáró dolgozat** megíratása. Heti 3 matematikaóra mellett az 1. dolgozat megíratására kerülhet sor.

2. Síkidomok, testek

Ez a fejezet a korábbi évfolyamokon tanult geometriai ismeretek, fogalmak, összefüggések és szerkesztési eljárások felelevenítése és kibővítése mellett a paralelogramma, a háromszög és a kör területének, illetve az egyenes hasáb és az egyenes körhenger felszínének és térfogatának a kiszámításával foglalkozik. A témakör jellegének megfelelően, a tananyag felépítése során komplex módon alkalmazhatjuk szinte az egész korábban tanult ismeretrendszert.

A 6. osztályos programban is hangsúlyoztuk, hogy a térszemlélet és a képi gondolkozás képességének fejlesztését nem oldhatjuk meg csupán 8. osztályban (sőt abban az életkorban tanulóink mintegy felénél már nagyon nehezen érhetnénk el nevelési céljainkat). Ezt a koncepciót követve 7. osztályban is javasoljuk a térgeometriai vizsgálatokat. A sík- és a térgeometria egy fejezetbe foglalásával jól kiaknázhatjuk a lehetséges általánosításokat (például szögtartomány – lapszögtartomány), illetve a kézenfekvő analógiákat (síkidomok átdarabolása – hasábok átdarabolása). A térgeometriai feladatok megoldása alkalmat ad a korábban tanult síkgeometriai ismeretek elmélyítésére, gyakorlására is.

Az év eleji feldolgozást az indokolja, hogy később, a **4.** és a **6.** fejezet ismeretanyagához kapcsolódva (differenciálva) gyakorolhatjuk ezt az anyagrészt is. A nehezen tanuló gyermekekkel gyakoroltathatjuk a legalapvetőbb ismereteket, míg a jobb képességű tanulók tudását komplexebb feladatok megoldatásával tehetjük szilárdabbá. Így ebben a fejezetben időt nyerhetünk, nem kell föltétlenül „készre tanítanunk” az anyagot.

A *térszemlélet fejlesztése* nem valósítható meg tényleges térbeli tevékenység (testek építése és szétbontása, élvázmodellek vizsgálata, térelemek modellezése) nélkül. A 8. osztályban és a középiskolában nehéz helyzetbe kerülnek tanítványaink, ha tapasztalati szinten nem alapozzuk meg későbbi térgeometriai tanulmányaikat.

Javasoljuk, hogy a számításokhoz a tanulók használhassák a *zsebszámológépet.* Így több feladattal foglalkozhatunk, és *több idő jut a geometriai összefüggések megláttatására.* Ha a tanulók egy része még most is bizonytalanul számol, akkor a zsebszámológép használata előtt föltétlenül becsültessük meg a végeredményt, és minden órán iktassunk be egy-egy olyan feladatot, amelyet írásban oldatunk meg.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. A korábban tanult ismeretek és szerkesztési eljárások felelevenítése az osztály felkészültségének megfelelő szinten. Testek, sokszögek és a kör (korábban tanult) tulajdonságainak vizsgálata, felidézése. Sokszögek, testek csoportosítása különböző szempontok szerint. *A sokszög kerülete.* A hosszúság mértékegységei.

2. A vektor fogalma, a fizikai vektorfogalom megalapozása.
Jobb csoportban: párhuzamos vektorok összeadása, kivonása.

3. A szög fogalma, mértékegységei, *szögmérés,* szögfelezés, szögmásolás. Szögfajták. Sokszögek belső és külső szögei.
Emelt szinten, illetve *jobb csoportban:* az elfordulások mérése *irányított szöggel.*

4. *A terület fogalma, mértékegységei.* A téglalap, *a paralelogramma,* a *deltoid,* a *trapéz* és a *háromszög területe.* Tetszőleges sokszög területének meghatározása a sokszög háromszögekre bontásával.
5. *Sokszöglapokkal határolt testek* (poliéderek) építése, tulajdonságaik vizsgálata, *felszínszámítás.*
6. A hasáb mint speciális poliéder származtatása, tulajdonságainak vizsgálata, testhálója, felszíne.
7. A *térfogat* fogalma, mértékegységei. Az egyenes hasáb térfogata.
8. A *kör* kerülete, területe. *Az egyenes körhenger* felszíne, térfogata.

Differenciálás

A tananyag jellegéből az is következik, hogy a különböző színvonalon álló osztályok (tanulók) számára igen eltérő módon választhatjuk meg a feldolgozás módszerét, ütemét és absztrakciós szintjét.

A differenciálás nem a tananyag mennyiségében és tartalmában, hanem a feldolgozás mélységében és a feladatok összetettségében valósítható meg.

Minimumszinten elégedjünk meg azzal, hogy az alapvető összefüggéseket a tanuló önállóan alkalmazni tudja egyszerű feladatok megoldásában. (A szakiskolákban általában nem várnak többet az általános iskolától.)

A *középiskolába készülő*, illetve *középiskolai tagozatra járó* tanulóinktól elvárhatjuk, hogy az összefüggéseket önállóan felismerjék, a definíciókat pontosan (értelmesen és alkalmazásképesen) megtanulják, az egyszerű bizonyítások gondolatmenetét elsajátítsák, a tanultakat összetett feladatokban is képesek legyenek alkalmazni.

A fentiek miatt az alapszint és az emelt szint számára nem dolgoztunk ki külön tanmenetjavaslatot. A különbözőséget a helyi tanterv ajánlásainak figyelembevételével és a konkrét osztály számára kiválogatott feladatokkal biztosítjuk.

Heti 4 matematikaóra esetén 24–26 órát szánjunk a témakör feldolgozására.

Heti 3 órában 18–20 óra jut erre az anyagrészre. Kevesebb idő jut a korábban tanultak felelevenítésére, a szemléleti alapozásra, az elvontabb kérdések megbeszélésére, az összefüggések „felfedeztetésére” és a tanultak begyakorlására.

Kapcsolódási lehetőségek

Halmazok, logika

A fogalmak tisztázásához, az összefüggések felkutatása, az alakzatok vizsgálata és rendszerezése során jól alkalmazhatjuk a halmazokról, illetve logikából tanultakat. Ilyen típusú feladat például: *állítások igazságának eldöntése, tulajdonsággal megadott halmaz elemeinek kiválasztása* (**Tk. 2.24–2.27., 2.58.**).

Számtan, algebra

A geometriai számítások különösen alkalmasak a számtan témakörhöz tartozó teljes ismeretanyag gyakorlására. Az általános összefüggések megfogalmazása, különböző alakban való felírása, a képletek alkalmazása előkészíti az *algebrai kifejezések* összevonásáról, szorzásáról, szorzatra bontásáról, a helyettesítési érték kiszámításáról később, az **5.** fejezetben tanulandókat.

Külön kiemeljük a következő témakörökhöz kapcsolódó feladatokat:

Egész számok összevonása (**Tk. B2.04–B2.07.**), műveletek törtekkel, törtrész, százalékszámítás, arány (**Tk. 2.19., B2.10., 2.29–2.34., B2.19., 2.53., 2.60., 2.64–2.65.**), egyenlettel megoldható szöveges feladatok (**B2.09., 2.22.**).

Relációk, függvények, sorozatok

Derékszögű koordináta-rendszer: **Tk. B2.12., 2.43., 2.45., B2.18.** feladat. Tetszőleges oldalhosszúságú téglalap területének, illetve tetszőleges élhosszúságú téglatest térfogatának meghatározása során egyenes arányossági következtetéssel igazoljuk az általános összefüggést. A mértékegység átváltásakor felhívhatjuk a figyelmet a mérőszám és a mértékegység közti fordított arányosságra.

A **Tk. B2.11.** feladatban vizsgáljuk, hogyan függ a sokszög csúcsainak számától az átlók száma, az egy csúcsból kiinduló átlók által meghatározott háromszögek száma stb.

A **Tk. B2.30.** feladatban, hasábok vizsgálata során összefüggést keresünk az alaplap (háromszög, négyszög, ötszög, …) csúcsainak száma, valamint a hasáb csúcsainak, éleinek, lapjainak száma között.

A kerület-, terület-, felszín-, térfogatképleteket is hozzárendelési szabályoknak tekinthetjük, amelyek a különböző alakzatokhoz egyértelműen hozzárendelik a kérdéses mennyiség értékét.

A geometria egyéb témakörei

Egyszerű szerkesztések: **Tk. 2.38–2.41., 2.47.** feladat.

Kombinatorika

Például a térelemek közti kapcsolatok vizsgálatában alkalmazhatunk kombinatorikai módszereket (**Tk. 2.01–2.04., 2.06–2.07., B2.14.**).

Kapcsolat a fizikában tanultakkal

Az elmozdulás, a sebesség, a gyorsulás, az erő vektormennyiségek. A térfogatszámításhoz kapcsolódva kiszámíthatjuk adott testek tömegét. *Például:* **Tk. 2.74., 2.99., B2.31.** feladat.

Tanmenetjavaslat

Óra	Aktuális tananyag	Feladatok
	Folyamatos ismétlés, koncentráció	
1. **1–2.**	Alapfogalmak, axiómák. *Térelemek,* kölcsönös helyzetük. *Redukált szinten* nem tárgyaljuk. Kombinatorika.	Tk. 2.01–2.09.; Gy. 7.01–7.04.
2. **3–4.**	Az elmozdulás megadása irányított szakasszal, a vektor fogalma. Párhuzamos vektorok összeadása, kivonása. Kapcsolat a fizikával. *Redukált szinten* a vektorműveleteket nem tárgyaljuk.	Tk. 2.10–2.13.; Gy. 7.05–7.09.; Tk. B2.01–B2.03.; Gy. 7.10–7.11.
3. **5–6.**	Szögmérés, szögfelezés, szögmásolás, szögek fajtái. *Az elfordulás mérése irányított szöggel.* Törtek. Egész számok összevonása. *Redukált szinten* az irányított szögekkel nem foglalkozunk.	Tk. 2.14–2.20.; Gy. 7.12–7.18.; Tk. B2.04–B2.07.; Gy. 7.19–7.24.
4. **7–8.**	*Sokszögek tulajdonságainak vizsgálata,* sokszögek csoportosítása; a korábban tanult ismeretek és szerkesztési eljárások felelevenítése. *Hosszúságmérés,* a sokszög *kerülete.* Halmazok, logika; valószínűség. Műveletek törtekkel, százalékszámítás, arány. Egyenlet, egyenlőtlenség. Derékszögű koordináta-rendszer. A háromszög belső és külső szögei (előkészítés). *Redukált szinten* folyamatos ismétlésként gyakoroltatjuk be a tanultakat. Szükség esetén szervezzünk korrepetálást.	Tk. 2.21–2.27.; Gy. 7.25–7.32.; Tk. B2.08–B2.14.; Fgy. 2.8.30., 3.4.02., 4.1.01–07., 4.1.17–20.
5–8. **9–12.**	*A területszámításról tanultak ismétlése:* A terület fogalma, mértékegységei; a téglalap és a négyzet területe. *A paralelogramma, deltoid és a trapéz területe.* *A háromszög magasságvonala, területe.* *Jobb csoportban:* Tetszőleges sokszög területének meghatározása háromszögekre bontással. Műveletek törtekkel. Arány, arányosság. Derékszögű koordináta-rendszer. Függvények, egyenes és fordított arányosság. Háromszögek szerkesztése.	Tk. 2.28–2.48.; Gy. 5.08–5.33., 7.26–7.33.; Tk. B2.16–B2.19.; Gy. 5.34–5.42.; Fgy. 2.4.06–08., 2.5.17., 2.8.29., 4.1.28–30.

Óra	Aktuális tananyag	Feladatok
	Folyamatos ismétlés, koncentráció	
9–10. **13–15.**	*Sokszöglapokkal határolt testek* építése, tulajdonságaik vizsgálata. A téglatestről korábban tanultak folyamatos ismétlése: a téglatest és a kocka felszíne, térfogata. *Redukált szinten* nem foglalkozunk külön a sokszöglapokkal határolt testekkel. A téglatestről tanultak ismétlésekor tekintjük át a testekkel kapcsolatos legfontosabb ismereteket. *Az egyenes hasáb származtatása, felszíne.* Számok normálalakja. Számolás törtekkel. Halmazok, logika.	Tk. 2.49–2.52.; Gy. 5.49–5.67.; Fgy. 4.3.01–04.; Tk. 2.53–2.58.; Gy. 5.68–5.71.
11–13. **16–18.**	A térfogatszámítás ismétlése. A térfogat és az űrtartalom mértékegységei; a téglatest és a kocka térfogata. *Az egyenes hasáb térfogata.* Számok normálalakja. Műveletek törtekkel. Százalékszámítás; arány, arányosság. Kombinatorika. Függvények, egyenes és fordított arányosság. Sokszögek területe. Fizika: Sűrűség, tömeg.	Tk. 2.59–2.65.; Gy. 5.49–5.67.; Tk. 2.66–2.74.; Gy. 5.72–5.83.; Fgy. 4.3.06–09.
14–17. **19–22.**	*A kör kerülete, területe.* *Az egyenes körhenger származtatása, felszíne, térfogata.* *Emelt szinten,* illetve *jobb csoportban:* Adott középponti szöghöz tartozó körív hossza, a körgyűrű és a körcikk területe. A terület-, felszín- és térfogatszámítás folyamatos ismétlése. Szögek mérése. Függvények, egyenes arányosság. Fizika: Sűrűség, tömeg.	Tk. 2.75–2.90.; Gy. 5.43–5.48.; Tk. 2.91–2.99.; Gy. 5.84–5.92.; Fgy. 4.2.10.
18. **23–24.** (+ 2 ó.)	Diagnosztikus mérés, a hiányosságok pótlásának megszervezése. Gyakorló- és fejtörő feladatok megoldása. Százalékszámítás. Arány. Egyenletek. Reláció, függvény. *Redukált szinten* a legfontosabb ismereteket tekintjük át. **3. témazáró felmérés** megíratása, kijavítása.	Tk. 2.100.; Tk. B2.20–B2.35.; Gy. 5.01–5.92.

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Alapfogalmak, alaptételek

Jobb képességű, érdeklődő tanulókkal, beszélgetés keretében javasoljuk a feldolgozást (ha jut rá idő). Ne kérjük számon ezeket a fogalmakat.

Tudatosítsuk, hogy 7. osztálytól kezdve egyre inkább törekednünk kell a fogalmak pontos értelmezésére, definiálására és a felismert összefüggések bizonyítására.

A beszélgetésben arra is kitérhetünk, hogy mi a „definíció" és mi a „tétel", mi köztük a különbség. Hogyan kell egy fogalmat definiálni. A későbbi fejezetek anyagának feldolgozásakor, a fogalmak felelevenítése során példákat kereshetünk helyes definíciókra, elemezhetjük a hibásakat.

Térelemek
Szögek
Az elfordulás mérése

A geometriai fogalmak felelevenítését, tudatosabbá tételét, az ismeretek kibővítését (tartalmilag és módszertanilag) sokféleképpen oldhatjuk meg. A tanulócsoport színvonalának megfelelően kell kidolgoznunk az ismétlés tervét. (Itt a tankönyv csak másodlagos segédeszközként jöhet számításba.) A modellezéshez javasoljuk a csoportos foglalkozások és a frontális munka (tanári demonstráció) kombinálását.

Gondoljuk végig (esetleg mérjük fel), hogy mennyire sikerült megtanítanunk a következő ismereteket, mit tudnak biztosan tanulóink, és mi az, ami megerősítésre, gyakorlásra szorul.

1. Térelemek kölcsönös helyzete; térelemek távolsága.
2. *Párhuzamos egyenesek* fogalma (az egyenest saját magával is párhuzamosnak tekintjük), jelölése; szakaszok párhuzamossága; párhuzamos egyenesek előállítása háromszögvonalzó „elcsúsztatásával" (a párhuzamos eltolás előkészítése); párhuzamos egyenesek szerkesztése.
   Egyenes és sík párhuzamossága; két sík párhuzamossága.
   Testmodellek párhuzamos éleinek, lapjainak megkeresése, lapok és élek párhuzamossága.
3. *Merőleges egyenesek* fogalma, jelölése; merőleges egyenesek előállítása háromszögvonalzóval; merőleges egyenesek szerkesztése.
   Egyenes és sík merőlegessége; két sík merőlegessége.
   Testmodellek merőleges éleinek, lapjainak megkeresése, lapok és élek merőlegessége.
4. A *szög,* a szög mértékegységei, szögmérés, a tájoló használata; szögmásolás, szögfelezés; nevezetes szögek (60°, 30°, 45°, 75° stb.) szerkesztése; a szögek fajtái (nullszög, hegyesszög, …; konvex és nemkonvex szögek).

Új anyag a *pozitív és negatív elfordulás* és a *forgásszög* értelmezése. Ennek tanítását csak jobb csoportban javasoljuk, azért hogy a forgatás egzaktabb értelmezése és vizsgálata során már ez ne okozzon gondot a tanulóknak.

Alapszinten, különösen a *redukált változatban* a tanulók többségénél a felsorolt fogalmak felelevenítését, megszilárdítását, a hiányosságok pótlását nem oldhatjuk meg egy-két óra alatt. A geometriai anyag tárgyalása során, a feladatok alkalmas megválasztásával újra és újra vissza kell térnünk az alapvető ismeretek gyakorlására.

Emelt szinten a jó képességű tanulókat untathatja, ha az általuk már jól begyakorolt ismereteket ismételten sulykoltatjuk. Számukra a tankönyvből és a feladatgyűjteményből vagy szakköri füzetekből válogassunk érdekes, összetettebb feladatokat.

Az elmozdulás megadása irányított szakasszal. A vektor

Az előző két ismétlő fejezet közé ékelődik be ez az anyagrész.

A vektor fogalmát elsősorban a fizikában tanult vektormennyiségek értelmezése céljából vezetjük be. Ugyanakkor majd az eltolást – mint transzformációt – is a vektor segítségével tudjuk jellemezni. A deduktív bevezetési módot el akartuk kerülni, ezért gyakorlati életből vett példákkal mutatunk rá a vektor *természetes* voltára.

Ebből a szempontból a tankönyvi ábrák, valamint az ábrák értelmezéséhez szükséges szöveg feldolgozása a legfontosabb. A feldolgozás során váljék nyilvánvalóvá, hogy a vektor abban különbözik a szakasztól, hogy nemcsak *hossza,* hanem *iránya* is van.

Egymással párhuzamos vektorok összeadásával csak a bővített változatban foglalkozunk. A mintapélda megoldása során az első megállapításunk ne az legyen, hogy két vektor összege is vektor, hanem az, hogy *kezdőpontból végpontba* jutottunk: a „kezdő”, illetve „vég” jelzők nemcsak hosszúságot, hanem irányt is jeleznek, tehát vektort határoznak meg.

A **Tk. B2.21.** feladatsor feldolgoztatásával felismertethetjük, hogy hogyan lehet összegezni a nem párhuzamos vektorokat. Az egymással derékszöget bezáró vektorok összegzésére 8. osztályban visszatérünk.

Nem kívántuk az ismeretanyagot a síkvektor, illetve a térvektor kifejezésekkel bővíteni, bonyolítani. E kifejezések használata nélkül is megoldhatók mindazok a tankönyvi feladatok, amelyek térvektorral kapcsolatosak.

Síkidomok, sokszögek

A síkidomokról korábban tanultakat konkrét feladatok megoldása során célszerű felelevenítenünk.

1. *Háromszög, négyszög, ötszög, …* fogalma, tulajdonságainak vizsgálata.
2. *Konvex* és *nemkonvex* síkidomok, sokszögek.
3. *Háromszögek csoportosítása* oldalaik és szögeik szerint: **2.24–2.25.** feladat.
4. *Speciális négyszögek* tulajdonságainak vizsgálata; deltoid, trapéz, paralelogramma, rombusz, téglalap, négyzet *definíciója:* **2.26–2.27.** feladat.

5. Konkrét *sokszögek kerületének* meghatározása (méréssel is). A négyzet, rombusz kerületképlete; a téglalap, paralelogramma, deltoid kerületképletének kétféle alakja (**Tk. 2.21–2.23., B2.09–B2.10.**).
6. *Tengelyesen szimmetrikus* sokszögek, síkidomok. Egyenlő szárú háromszög, deltoid, húrtrapéz, rombusz, téglalap, négyzet szimmetriatengelyei.
7. Értelmezhetjük a *sokszögek belső szögeit.* A 6. osztályban tanultak felidézésével, parkettázással igazolhatjuk a háromszög belső szögeinek összegére vonatkozó tételt, majd felfedeztethetjük, hogyan kell meghatározni tetszőleges (konvex) sokszög belső szögeinek összegét (**Tk. B2.11.**). Ugyanakkor ezeknek az összefüggéseknek a vizsgálatát most el is hagyhatjuk, a **6.** fejezetben erre visszatér a tankönyv.
8. *Szabályos sokszögek* kerülete, belső szögei, szimmetriatengelyei.
9. A *körvonal,* körlap, körív, körszelet, körgyűrű, körcikk; sugár, szelő, érintő fogalma.

A felsorolt ismeretek rendszerezésekor támaszkodjunk a tanulók halmazelméleti, logikai, kombinatorikai ismereteire. Gyakoroltathatjuk továbbá a hosszúság mértékegységeit, a racionális számokkal való számolást, a normálalak használatát, a százalékszámítást, egyenletek megoldását, a szakaszmásolást, szakaszfelezést stb.

A különösebb elvonatkoztatást nem igénylő fogalmak definiálását, az általános összefüggések megfogalmazását, a képletek értelmezését és alkalmazását *alapszinten* is fokozatosan elvárhatjuk. A nagyon általános és elvont fogalmak definícióját – például a sokszög definíciója ilyen – esetleg csak *emelt szinten,* a középiskolába készülő, illetve középiskolai tagozatra járó tanulóktól követeljük meg.

A *redukált programban* a témakörhöz tartozó feladatoknak csak kis részét tudjuk feldolgozni a rendelkezésre álló egy óra alatt. A többi feladathoz, illetve az azokban feldolgozott ismeretekhez térjünk vissza *folyamatos ismétlés* keretében például úgy, hogy a terület-, felszín- és térfogatszámítás során a kérdéses sokszögek tulajdonságait is megbeszéljük, kerületét is kiszámítjuk. A **4.** és a **6.** fejezet feldolgozása, illetve az év végi összefoglalás során is újra és újra visszatérhetünk ezeknek az ismereteknek a felelevenítésére.

A síkidomok területe

A korábbi években foglalkoztunk a terület fogalmával, mértékegységeivel, a *téglalap, négyzet* és a *deltoid* területének kiszámításával. Ezeket az ismereteket konkrét feladatok megoldásával eleveníthetjük fel (**Tk. 2.28–2.34.** feladat). A tankönyv feladatait célszerű kiegészíteni tényleges mérési feladatokkal (udvar, szoba, asztallap területének becslése, a szükséges adatok megmérése után a számítások elvégzése). Tanulóink jelentős részének gondot okoz a terület mértékegységeinek átváltása, a hiányosságokat gondosan megtervezett folyamatos ismétléssel pótoltassuk (például **Gy. 5.08–5.09.** feladatsor ilyen célt szolgálhat).

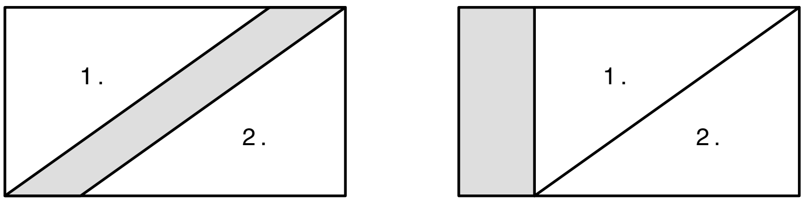
A témakörre szánt órák megtervezésénél vegyük azt is figyelembe, hogy a területszámítást a felszín- és térfogatszámítással párhuzamosan is gyakoroltatjuk, visszatérhetünk rá az algebrai kifejezések, illetve a **6.** fejezet anyagának tárgyalása során. Később, 8. osztályban, Pitagorasz tételének gyakorlása ad jó lehetőséget a területszámításról tanultak ismétlésére és rögzítésére.

A tanultak gyakorlati alkalmazásához szervezzünk terepmérést.

A tankönyvben (az emlékeztetőben) felsorolt négy alaptétel jelentésének a tisztázására és nem a szó szerinti megtanítására célszerű a hangsúlyt fektetnünk. Az utolsó (4) alaptétel nem minden tanuló számára nyilvánvaló. Föltétlenül értessük meg, hogy ezt az alaptételt kimondva megállapodunk abban, hogy *az átdarabolás során nem változik meg a sokszög területe.*

A *téglalap területképletét* minimumszinten négyzetlapokkal történő lefedéssel idéztessük fel. Az átlagos vagy az átlagosnál jobb képességű tanulókkal viszont gondoltassuk végig, hogy tetszőleges – nem csak egész mérőszámú – oldal esetén miért érvényes a tanult képlet (lásd **Tk. 2.30.** feladat, illetve a tankönyv magyarázata).

Tudatosítsuk (csuklósan összeillesztett modellel mutassuk meg), hogy a *paralelogramma területének* kiszámításához két oldal ismerete nem elegendő. Az átdarabolásokat ténylegesen végeztessük el (a felmérések eredményei azt mutatják, hogy egyszeri magyarázat alapján a tanulók többsége nem sajátítja el ezt az ismeretet). Az ábrán – a tankönyvben ismertetett több lépésből álló átdarabolás helyett – egy kevésbé szokványos megoldást mutatunk be.



A paralelogramma területszámításával párhuzamosan (esetleg differenciált egyéni munkában) megoldathatunk egyszerű szerkesztési és a *kerületszámítással* kapcsolatos feladatokat. Ez utóbbit azért is fontosnak tartjuk, mert a tanulók mintegy egyharmada még 7. osztályban is „keveri” a két fogalmat. (A feladatok többsége ezért kéri a kerület kiszámítását is.)

A *deltoid területének* kiszámításával a 6. osztály végén foglalkoztunk, ezért a tanulók többségénél nem rögzülhetett kellően a tanult gondolatmenet és összefüggés. Ezt vegyük figyelembe az ismétlés során (**Gy. 5.16–5.21.** feladat).

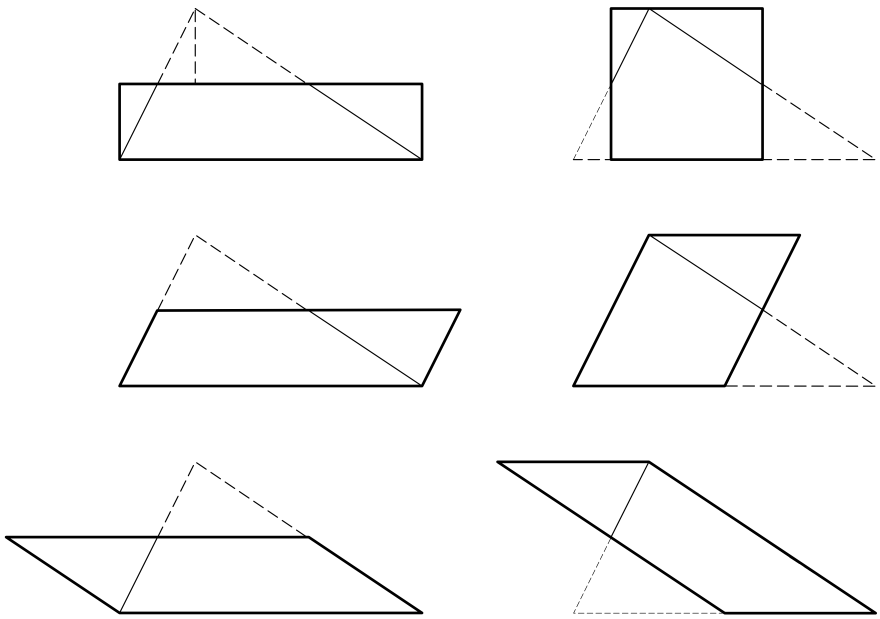
Tudatosítsuk, hogy a *rombusz* speciális paralelogramma és speciális deltoid, így a területét kétféleképpen is kiszámíthatjuk (**Gy. 5.16., 5.22–5.25.** feladat).

Célszerű ebben a fejezetben a *trapéz területével* is foglalkozni, bár teljesebb és mélyebb tárgyalásra (esetleg csak emelt szinten tanuló csoportban) a **6.** fejezetben kerülhet sor, ekkor egyúttal átismételjük a terület-, felszín- és térfogatszámításról tanultakat.

A *háromszög magasságával* már korábban is foglalkoztunk (*például* a **Tk. 2.45.** feladathoz hasonló feladatokban). Ennek ellenére a tompaszögű háromszög magasságának megrajzolása, megszerkesztése a tanulók egy részének gondot jelenthet (lásd **Gy. 5.27–5.28.** feladat). Hívjuk fel a tanulók figyelmét a tiszta, pontos szerkesztésre, ellenőrizzük a körző „üzemképességét”.

A *háromszög területének* a kiszámítását a paralelogramma területszámítására vezetjük vissza. Ennek előnye, hogy az előzőleg tanult ismeret szilárdabbá válhat. Hátránya, hogy még csak „megmutatjuk”, hogy a paralelogrammát az átlója két *egybevágó* háromszögre bontja. A bizonyításra csak a középpontos tükrözés tanításakor kerülhet sor.

Ha a tanulócsoport „elbírja” (és „befér” a tanévbe), akkor most különböző átdarabolásokkal igazolhatjuk a háromszög területére vonatkozó összefüggést (ezek is kapcsolhatók régebbi tapasztalatokhoz), s majd a középpontos tükrözés tanulásakor visszatérhetünk a tankönyvben bemutatott gondolatmenetre.



$T = a \cdot \frac{m}{2}$ $\qquad\qquad$ $T = \frac{a}{2} \cdot m$

A háromszögről tanultak alkalmazásaként (elsősorban a tankönyv bővített változatában) foglalkozunk *tetszőleges sokszögek* területének meghatározásával, az adatokat méréssel határozzák meg a tanulók (**Tk. B2.17.**; **Gy. 5.42.** feladat).

A tankönyv – tartalmilag és a feladatok színvonalában is – „széles sávban” biztosít feladatokat a tanultak gyakorlására, a korábban tanultakkal való „összeszövésre” (**Tk. 2.28–2.48.**). Ezeket a feladatsorokat kiegészíthetjük a Matematika 7. Gyakorló feladataival (**5.08–5.42.**). Így a folyamatos ismétléshez is elegendő feladat jut.

Érdemes tudatosítanunk, hogy 7. osztályban az adatokat általában (a sokszög megszerkesztése után) méréssel tudjuk csak meghatározni; 8. osztályban és középiskolában olyan tételeket is tanulunk, amelyek segítségével számítással határozhatók meg a szükséges adatok. Ekkor a szerkesztés és a mérés már nem lesz elfogadható.

A sokszögek átdarabolásával kapcsolatosan elbeszélgethetünk Bolyai Farkas munkásságáról, és megemlíthetjük a nevéhez fűződő közismert tételt:

Ha két sokszög területe egyenlő, akkor az egyik véges számú lépésben átdarabolható a másikba.

Vagyis bármilyen sokszögből bármilyen alakú, vele egyenlő területű sokszöghöz eljuthatunk úgy, hogy véges számú részre szétvágjuk, és a darabokat valahogyan összeillesztjük.

Felépíthetjük úgy is a tananyag tárgyalását, hogy a kör kerületét és területét ehhez a részhez kapcsolódva dolgoztatjuk fel. (Lásd később.)

Sokszöglapokkal határolt testek

Ennek és a következő fejezetnek a tárgyalása során ismételjük át az 5. és a 6. osztályban tanultakat, tárjuk fel és pótoltassuk az esetleges hiányosságokat. Folyamatos ismétlésként, képesség és tudásszint szerint differenciálva dolgoztassuk fel a Matematika 7. Gyakorló **5.49–5.67.** feladatsorát.

Az olyan korlátos térrészt, amelyet véges sok sokszöglap határol, poliédernek nevezzük. Az elnevezést és a definíciót általános iskolában, *alapszinten* nem tanítjuk, de azt javasoljuk, hogy a hasáb fogalmát különböző testek, ezek között poliéderek *építésével, vizsgálatával* szemléletileg alapozzuk meg (**Tk. 2.49–2.52.** feladat). A térszemlélet fejlesztése céljából a testmodelleket házi feladatként vagy csoportmunkában munkamegosztással a tanulók készítsék el. A modellezőkészlet sokszögeiből öntapadó ragasztóval minél több testet állítsanak össze és vizsgáljanak meg. (A középiskolában már nem lesz mód ilyen tapasztalatgyűjtésre, pedig egyes szakmákban feltétel a jó térszemlélet.)

A vizsgálatokban a következőket összegezhetjük:

1. Milyen felületdarabok határolják a testet, csak sokszöglapok vagy más felületdarabok is? (A „görbe lap” elnevezés használata szemléletes, de vitatható!) Kiteríthető-e a test felülete a síkban?

   Mutassunk vegyesen helyes és hibás hálózatokat! A tanulók döntsék el, hogy melyikből lehet poliédert összeállítani.

   Nagyon hasznos, ha a tanulók önállóan készítenek hálózatokat, és azokat vizsgálják. Eközben felvethetünk olyan kérdéseket, hogy mely élek lesznek párhuzamosak, metszők, kitérők, merőlegesek; mely lapok lesznek párhuzamosak, merőlegesek, melyek kerülnek egymás mellé stb.

   Megvizsgálhatjuk azt is, hogy az egyes poliédereket minimálisan hány él mentén kell „felvágni”, hogy síkban kiteríthető hálót kapjunk.

   A modellek megválasztásával ne erősítsük azt az elképzelést, hogy a geometriai vizsgálatok körébe csak olyan testek tartoznak, amelyeket meg tudunk nevezni (például: gömb, hasáb, kocka, henger). Célszerű a testmodellek közé kavicsot, csődarabot stb. is beválogatnunk.

2. Rögzítsük, hogy mit nevezünk *lapnak, élnek, csúcsnak, lapátlónak, testátlónak.* Hány éle, csúcsa, lapja van a poliédernek? Minden élt két lap tartalmaz (közönséges poliéder esetén). Egy csúcsban legalább hány él találkozik?

   A középiskolában a tanulónak és a tanárnak egyaránt gondot jelent, hogy a tanulók nem ismerik a szaknyelvet, nem tudják definiálni a fogalmakat, ezért a definíció és az elnevezések megtanulását a *középiskolába készülő* tanulóinktól követeljük meg.

Nem verbalizmusra, „magolásra” gondolunk. Ha a szaknyelvet következetesen használjuk, használatát a tanulótól is megköveteljük, akkor az „direkt tanulás” nélkül is elsajátítható.

3. A vizsgálatok aktuális célja a hasáb (mint speciális poliéder) definiáló tulajdonságainak felismertetése.

4. Felelevenítjük és tudatosítjuk a felszín fogalmát, pontosabban azt, hogy mit jelent a sokszöglapokkal határolt testek felszíne. Konkrét esetekben, a szükséges adatok megmérésével, hogyan számíthatjuk ki a felszínt. Tetszőleges poliéder felszínének meghatározása azzal az előnnyel jár, hogy a tanuló nem képletek „bemagolására” és mechanikus alkalmazására törekszik, hanem a konkrét feladatban *a területszámításról tanultakat alkalmazza.* Akkor megnyugtató a tanuló tudása, ha nem azért tudja kiszámítani a felszínt, mert tudja a képletet, hanem *azért tud önállóan megfogalmazni általános összefüggéseket, mert konkrét esetekben ki tudja számítani a sokszöglapokkal határolt testek felszínét.*

Tisztán kell látnunk, hogy a terület-, kerület-, térfogat- és felszínszámítás 7. osztályban elsősorban „fizikai” és nem „geometriai” probléma. Néhány kivételtől eltekintve nem számítással adjuk meg a hiányzó adatokat, hanem méréssel. Ezért a határok közé szorítással, az értékes jegyek meghatározásával stb. figyelembe kell vennünk a mérés pontosságát.

Például egy négyzet alakú lemez egy oldalát különböző pontossággal adhatjuk meg:

Ha $a = 0{,}4$ m, ez azt jelenti, hogy $0{,}35\ \text{m} \leqq a < 0{,}45$ m.

Így a lemez területe $0{,}35^2\ \text{m}^2$ és $0{,}45^2\ \text{m}^2$ közé esik:

$0{,}123\ \text{m}^2 \leqq T < 0{,}203\ \text{m}^2$; $T = (0{,}16 \pm 0{,}04)\ \text{m}^2$.

Ha $a = 0{,}40$ m, ez azt jelenti, hogy $0{,}395\ \text{m} \leqq a < 0{,}405$ m;

a területe: $0{,}1563\ \text{m}^2 \leqq T < 0{,}1643\ \text{m}^2$; $T = (0{,}160 \pm 0{,}004)\ \text{m}^2$.

Ha $a = 0{,}400$ m, ez azt jelenti, hogy $0{,}3995\ \text{m} \leqq a < 0{,}4005$ m;

a területe: $0{,}1596\ \text{m}^2 \leqq T < 0{,}1604\ \text{m}^2$; $T = (0{,}1600 \pm 0{,}0004)\ \text{m}^2$.

Emelt szinten tanuló csoportban vagy differenciált egyéni munkában (a megtanítás igénye nélkül) felismertethetjük tanulóinkkal az *egyszerű poliéder* lapjainak (L), éleinek ($É$) és csúcsainak száma (C) közti *Euler*-féle összefüggést: $É = L + C - 2$. Ellenpéldával rávilágíthatunk arra, hogy ez az összefüggés nem vonatkozik a nemegyszerű poliéderekre. (Az egyszerű poliéder bármely két csúcsa összeköthető élekből álló töröttvonallal.)

Emelt szinten feldolgoztathatjuk a következő feladatsort:

125 darab egységkockából felépítünk egy tömör kockát. Mekkora a kocka éle?

(1) Az így felépített kocka minden csúcsáról elveszünk egy egységkockát.

(2) Az így felépített kocka minden élének közepéről elveszünk egy egységkockát.

(3) Az így felépített kocka minden lapjának közepéről elveszünk egy egységkockát.

a) Mennyi a keletkezett test térfogata és felszíne?

b) Hány csúcsa (C), éle ($É$), lapja (L) van a keletkezett testnek?

c) Érvényes-e az *Euler*-féle összefüggés: $É = L + C - 2$?

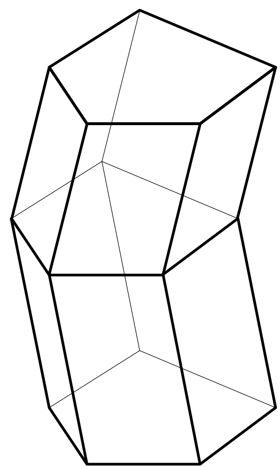
d) Eljuthatunk-e a keletkezett test egy adott csúcsából bármelyik csúcsra az élek mentén haladva?

Az Euler-tételre az általános iskolások számára is igen szemléletes bizonyítást találunk például *Hajós György Bevezetés a geometriába* (Tankönyvkiadó, 1960) című könyvének 195–196. oldalán. Hálás szakköri téma!

A *redukált változatban* ezzel a résszel nem foglalkozunk ebben a mélységben. A térgeometriai ismereteket a hasáb származtatásakor felelevenítjük.

A hasáb

A hasábot speciális poliéderként értelmezzük. Így a tanuló nem készen kapja a definíciót, hanem konkrét hasábokat vizsgálva felismeri a jellemző tulajdonságokat (lásd az előző fejezetben leírtakat). Ez a származtatás véleményünk szerint jobban megfelel az „építsük fel a matematikát" alapelvnek. Lehetőséget ad a terminológia elsajátítására és a felszín fogalmának elmélyítésére. A másik lehetséges megközelítést 8. osztályban a henger fogalmának általánosításához kapcsolódva tekintjük át.



Fontos, hogy a tanulók a hasábot akkor is felismerjék, ha nem az alaplapján áll, például egy oldallapján fekvő prizma, egy sátortető, a vasúti töltés is hasáb. Ehhez kezükbe kell adni vagy velük kell elkészíttetni a modelleket. Tisztázzuk, hogy a téglatest és a kocka is egyenes hasáb.
Hívjuk fel a figyelmet a definíció pontos megfogalmazására. Például ezt a testet két egybevágó sokszög és paralelogrammák határolják, ennek ellenére ez nem hasáb.

Az egyenes hasáb térfogata

A továbblépéshez tisztáznunk kell, hogy a tanulók értik-e a térfogat fogalmát, elsajátították-e mértékegységeit, emlékeznek-e a térfogat- és az űrtartalom-mértékegységek közti összefüggésre, ki tudják-e számítani a téglatest és a kocka térfogatát (**Tk. 2.59–2.65.** feladat).

Motiválhatja a tanulókat, ha a tankönyv feladatain túl, gyakorlati jellegű feladatokat is kapnak (például lakásuk térfogatának a kiszámítását). Felméréseink szerint a térfogatszámítással és űrméréssel kapcsolatos elemi ismereteket legfeljebb a tanulók egyharmada tudja megbízhatóan.

Az emlékeztetőt a térfogat fogalmát pontosító *alaptételek* megfogalmazásával kezdi a tankönyv. Ez és az ezt követő gondolatmenet – a téglatest térfogatának kiszámítására – elsősorban a jobb képességű tanulóknak szól, de még tőlük sem célszerű ezek megtanulását megkövetelni. Azt azonban lehetőleg minden tanulóval láttassuk be, hogy *a testek átdarabolásával nem változik meg a térfogatuk.*

A tetszőleges egyenes hasáb térfogatának kiszámításában a területszámításnál elsajátított út analógját járjuk végig:

téglatest térfogatának kiszámítása;
paralelogramma alapú hasáb átdarabolása téglatestté;
háromszög alapú hasáb mint a paralelogramma alapú hasáb fele;
sokszög alapú hasáb darabolása háromszög alapú hasábokra.

A térfogatszámítás gyakorlása során újra átismételtethetjük a területszámításról tanultakat. A tankönyv és a Matematika 7. Gyakorló elegendő feladatot tartalmaz a folyamatos ismétléshez is (**Tk. 2.66–2.74.; Gy. 5.72–5.83.** feladat). A **Tk. 2.74.; Gy. 5.81., 5.83.** feladatsorral az új ismeretek gyakorlását összekapcsolhatjuk a fizikában tanult ismeretek felelevenítésével.

Megemlítjük, hogy a poliéderekre nem érvényes Bolyai Farkas tételének térbeli analógja. Ha két poliédernek egyenlő a térfogata, akkor nem biztos, hogy az egyik átdarabolható a másikba.

A kör kerülete
A kör területe

Ezt a két fejezetet feldolgoztathatjuk a testek tárgyalása előtt is.

Elevenítsük fel az alapvető elnevezéseket és fogalmakat: *körvonal, körlap, sugár, átmérő, húr, szelő, körív, körgyűrű, körszelet, körcikk.*

A körvonal hosszának, illetve a körlap területének becslése nemcsak matematikatörténeti szempontból érdekes. Betekintést nyújt a matematikai analízis („közelítés", „határérték") eszköztárába is.

A kör kerületének és területének kiszámítását minden tanulótól elvárhatjuk. A körív hosszának, a körgyűrű, a körcikk, a körszelet területének kiszámítását csak a jobb jegyért követelhetjük meg.

Vetessük észre a tanulóinkkal, hogy adott körben, a körcikkhez tartozó középponti szög, a körív hossza és a körcikk területe *egyenesen arányos* mennyiségek.

Gyengébb csoportban, illetve *időhiány esetén* elhagyhatjuk ez utóbbi ismeretek tárgyalását.

Az egyenes henger származtatása, hálója, felszíne
Az egyenes henger térfogata

A henger fogalmának kialakítását ne definícióval, hanem modellezéssel, tapasztalatgyűjtéssel kezdjük (**Tk. 2.91.** feladat, **1.** példa). Erre támaszkodva jobb képességű tanulóink önállóan is megfogalmazhatják a definíciót.

Az **1.** példa a körhenger mint forgástest származtatását készíti elő. Korábban vizsgáltuk egy egyenestől adott távolságra lévő pontok halmazát, és végtelen hengerfelülethez jutottunk. Ez a tapasztalat is fontos a henger fogalmának kialakításához.

A **2.** példa a hengerpalást „kiterítését" szemlélteti. Itt említjük meg, hogy a hengerpalást területének kiszámítása a példában adott módon igen szemléletes, de matematikai értelemben nem tekinthetjük bizonyításnak. Ugyanis éppen a „kiterítést" nem értelmezzük, csak szemléletünkre támaszkodva elfogadjuk.

Az egyenes henger térfogatának kiszámításánál elfogadtatjuk, hogy ugyanaz az összefüggés érvényes, mint a hasáb esetében. Az összefüggés egzakt bizonyításához az általános iskolában nem rendelkezünk a megfelelő ismeretekkel, de a bizonyítás elvét megsejtethetjük (lásd az apró betűs megjegyzést).

Még a szakiskolába készülő tanulóink esetében is fontos, hogy váljanak képessé a tanultak gyakorlati alkalmazására (**Tk. 2.97–2.99., Gy. 5.85–5.92.**).

Tudáspróba
Gyakorló- és fejtörő feladatok

A tankönyvi tudáspróba diagnosztizáló, fejlesztő értékeléshez készült feladatsorozat.

A tanulók tudását ténylegesen a **3. témazáró feladatsorral** mérhetjük fel.

A tankönyv **2.100** (alapszintű) és **B2.35.** (emelt szintű) feladatsorát egészítsük ki a **Matematika 7. Gyakorló**, illetve – a jobbak számára – a **Matematika 7–8. Feladatgyűjtemény** feladataival.

3. Hozzárendelés, függvény

Matematikatanításunk egyik legfontosabb témaköre a relációk, és ezen belül a függvények. A téma fontosságát mutatja egyrészt a matematika tantárgyban elfoglalt helye, kapcsolata a matematika egyéb témaköreivel, másrészt a tananyag tanításával kapcsolatos nevelési, képzési célok megvalósításának lehetősége. Néhány lehetőség:

Az egybevágósági transzformáció a sík pontjainak a sík pontjaira való egy-egyértelmű leképezése.

Az S halmazon értelmezett *biner művelet* az S nem üres halmaz $S \times S$ Descartes-szorzatának S-be való leképezése.

Valamely H halmazon értelmezett *algebrai kifejezés* esetén a H elemeihez bizonyos elemeket rendelünk hozzá egy (H-tól nem feltétlen különböző) halmazból.

A sokszögekhez egyértelműen hozzárendelhetjük a *kerületük* vagy a *területük* mérőszámát.

A kombinatorikában véges sok elemhez hozzárendelhetjük az elemek összes lehetséges sorrendjeinek számát.

A nevelési, a képzési célok közül a következőket emeljük ki.

Kombinatív látásmód fejlesztése: Halmazok elemei közti kapcsolatok feltárásában minden lehetséges esetet számba vettünk-e, és mindegyiket csak egyszer? Ez *rendszerességre* nevel, elősegíti a *rendezési képesség* kialakulását.

A kreatív személyiségtulajdonságok közül a rugalmasságot és az ötletgazdagságot fejlesztik azok a feladatok, amelyekben néhány összetartozó elempárhoz kell keresni a leképezés szabályát. Minél több, lehetőleg minőségileg különböző szabályt kerestetünk a tanulókkal, annál inkább fejlesztjük az említett tulajdonságokat.

A *képi* dominanciájú *gondolkodásból* a *fogalmi gondolkodásba* való átmenetet a grafikus ábrázolás nagymértékben segíti.

A függvény fogalma nagyon elvont, így csak lassú érlelési folyamatban, sok-sok gyakorlati példa megoldásával, a fogalmak egymásra épülő rendszerének alapos megtervezésével alakítható ki. Ez a kialakítás *alsó tagozatban* megfigyeléssel, tapasztalatgyűjtéssel kezdődik. A tanulók adott számpárokhoz, azoknak bizonyos tulajdonságait megfigyelve kapcsolatokat, szabályokat ismernek fel, s az egyszerűbbeket meg is fogalmazzák. Később – tanári irányítással – a függvényre jellemző *néhány fogalmi jegyet is tisztáznak.* Ilyen fogalmak: halmaz, elem, összetartozó értékpár, kapcsolat, szabály stb. Ahogy nő a tanulók ismeretanyaga (egyre több művelettel, geometriai alakzattal, képlettel, oszthatósági szabállyal stb. ismerkednek meg), úgy valósítható meg a függvényfogalom *tartalmi bővítése,* amely magában foglalja az *újabb fogalmak kialakítását* (értelmezési tartomány, képelem, értékkészlet, koordináta, grafikon stb.), a *lényeges jellemző jegyek kiemelését* (egyértelmű, többértelmű stb.) és a fogalomra nem jellemző tartalmi jegyek kiszűrését, az elsődleges fogalmak közti kapcsolatok feltárását, s ezáltal a *magasabb rendű fogalmak kialakítását.* (Magasabb rendű fogalomnak más fogalmakból absztrahált fogalmakat nevezünk.) Ilyen magasabb rendű fogalom maga a függvény is, amelynek kialakulásához a következőkben felsorolt fogalmak megléte szükséges:

Halmaz, elem, eleme; részhalmaz.

Elempár, rendezett elempárok halmaza (Descartes-szorzat).

Eredeti elem, képelem; alaphalmaz, képhalmaz.

Egyértelmű, többértelmű megfeleltetés. A megfeleltetés szabálya. (A megfeleltetéseket és ezek fajtáit alapfogalomként kezeljük, nem definiáljuk, példákon keresztül mutatjuk be.)

Az eddigi fogalmakat intuitív szinten, példákon keresztül tárgyaljuk, kerüljük az általánosításokat.

Koordináták, jelzőszámok; koordináta-rendszer. Grafikonok.

Szám-szám függvények; értelmezési tartomány, értékkészlet, független változó, függvényérték.

Speciális szám-szám függvények (egyenes arányosság, lineáris függvény, fordított arányosság, az $y = |x|$ függvény).

Elemi függvényvizsgálat: növekedés, fogyás, szélsőérték, korlátosság, folytonosság. (Ezt csak konkrét feladatokban, a grafikonról leolvasva várhatjuk el.)

8. osztályban, *emelt szinten:* a függvénytranszformációk, esetleg *az összetett függvény* és az *inverz függvény* fogalma. (*Alapszinten* 8. osztályban sem tananyag.)

8. osztályban: a *sorozat* mint a pozitív egész számokon értelmezett függvény.

A felsorolásból látható, hogy a függvény fogalmát nem akkor tekintjük kialakultnak, amikor a tanulók el tudják mondani szabatosan, hogy mit értünk függvényen, hanem akkor, ha azt be tudják illeszteni ismereteik korábbi rendszerébe, tudják alkalmazni más témaköröknél, s a speciális függvények, illetve elemi függvények vizsgálatát ismerik. Ebből az is következik, hogy 7. osztályban *nem várhatunk el a tanulóktól „kész" függvényfogalmat.* Itt a függvény mint a megfeleltetések egy fajtája szerepel. Alaposabban tárgyaljuk a *lineáris függvényt*, az *egyenes arányosságot* és a *fordított arányosságot.*

A tankönyvben a *függvények jelölésére* háromféle formulát alkalmazunk. Mindhárom jelölési mód elfogadott. Azt érdemes használni, amelyik legjobban szolgálja céljainkat. Az $x \mapsto 2x + 3$ jelölés fejezi ki legjobban a függvény lényegét (az értelmezési tartomány valamely x eleméhez az értékkészlet $2x + 3$ kifejezéssel meghatározott értékét rendeljük hozzá). Az $y = 2x + 3$ és az $f(x) = 2x + 3$ jelölési mód a helyettesítési értékek meghatározásánál és a grafikus ábrázolásnál használható eredményesebben, mint az első formula.

A *szám-szám függvények ábrázolása,* illetve a grafikonok elemzése nagy gyakorlati haszonnal bíró ismeret. *A grafikon a valóságban lejátszódó folyamatot vetíti elénk, de nem azonos magával a függvénnyel.* A grafikus ábrázolással akkor érhetjük el céljainkat, ha az ábrázolás után bizonyos *elemzéseket is elvégzünk.* 7. osztályban konkrét mennyiségek közti kapcsolatokat vizsgálunk, s az egyes mennyiségek összetartozó értékpárjainak ábrázolása után következtethetünk növekedésre, fogyásra, szélsőértékre. Ezeket a *jellemzőket a grafikon geometriai tulajdonságaiból olvashatjuk le.*

Bizonyos fokú absztrakció és általánosítás is megvalósítható, amikor maguktól a mennyiségektől eltekintünk, s csak a kapcsolatra koncentrálunk.

Például az $y = 4x$ egyenlet kifejezheti egy $4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó ember által x óra alatt megtett utat éppúgy, mint a 4 Ft egységárú termék x kg-jának az árát. Tehát egy formulával többféle folyamat vagy tárgyak között lévő összefüggés leírható.

A *koordinátatengelyek* elnevezésénél ne használjuk az információt nem adó „vízszintes" és „függőleges" elnevezéseket. 7. osztályban már bevezethetjük az *abszcissza* és az *ordináta* szavakat. Az abszcissza és az ordináta, illetve a független változó és a függvényérték elnevezések használata azért is követendő, mert később, az egyenletek grafikus megoldásánál az értelmezési tartományok azon elemeit (abszcisszáit) keressük, amelyek esetén a függvényértékek (ordináták) egyenlők (illetve egyenlőtlenségeknél kisebbek vagy nagyobbak). A gyakorlati jellegű feladatokban a megfelelő mennyiségek nevét (út, idő, hőmérséklet, tömeg stb.) célszerű feltüntetni a tengelyek mellett.

A grafikon a folytonosság fogalmának előkészítéséhez is segítséget adhat. Általános iskolában ez úgy jelentkezik, hogy összeköthetők-e folytonos vonallal a koordinátáknak megfelelő pontok. Gyakorlati példáknál a szöveg értelmezéséből következtethetünk a folytonosságra. (Például az emberek száma – végzett munka kapcsolat grafikonja nem lesz folytonos vonal.)

Folytonosság szempontjából meg kell különböztetni a diszkrét pontokból álló grafikont (például: teherautók száma – elszállított anyagmennyiség) az olyan grafikontól, amelyik az értelmezési tartományán folytonos, de a számegyenes minden pontját tekintve nem folytonos (például: $y = \frac{6}{x}$ függvény grafikonja). Ennek tárgyalását csak a jobb képességű tanulóknak ajánljuk, kerülve az általánosítást. Itt jegyezzük meg, hogy ha az értelmezési tartomány a racionális számok halmaza – hiszen csak 8. osztályban jutunk el a valós számok fogalmához –, akkor is folytonos vonallal rajzoltuk meg a grafikont. Ennek oka, hogy a racionális számok „tetszőleges" sűrűn helyezkednek el a számegyenesen, azaz máshogy nem is tudnánk ábrázolni. Eddigi tapasztalataink szerint ez nem jelent problémát a 8. osztályos tanulóknak.

A következőkben néhány olyan gyakran előforduló hibára hívjuk fel a figyelmet, amelyek a függvényfogalom kialakítását gátolják.

- A tanulók sokszor azonosítják a függvényt a grafikonjával.
- A definíciókban nincs meg a fogalomra jellemző összes ismérv. (Például: Az egyik halmaz elemeihez hozzárendeljük a másik halmaz elemeit.)
- A fogalom definíciója „szűk". (A függvény olyan egy-egyértelmű megfeleltetés…)
- A grafikonok gyakorlati hasznát nem hangsúlyozzuk eléggé. (Például: Csak a grafikon ábrázolásáig jutunk el, az elemzésig már nem.)
- Nem tudják a tanulók egyéb ismereteikhez kapcsolni a függvény fogalmát. (Például: Nem látnak kapcsolatot a geometriai képletek és a függvények között.) Ez azt is jelenti, hogy nincs meg az ismeretek rendszere, csak elszigetelt, önmagukban funkcionáló ismeretekkel rendelkeznek a tanulók.
- A speciális függvényeket (egyenes arányosság, fordított arányosság) nem illesztik be a függvények rendszerébe.

A megfelelő példák válogatása, az alapos elemzés csökkentheti e hibák előfordulását.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

E fejezethez a tankönyv feladatain kívül a Matematika 7. Gyakorló **2.01–2.40.** és a Matematika 7–8. Feladatgyűjtemény **3.1.01–3.4.31.** feladatai tartoznak.

1. *Halmaz, elem, eleme* alapfogalmak nemcsak a függvényfogalomhoz, hanem a matematika minden fogalomrendszeréhez nélkülözhetetlenek.
2. A „hozzárendelést” az általános iskolában szintén alapfogalomnak tekintjük, de a tankönyv példái előkészítik, hogy ezt a fogalmat az alaphalmaz és a képhalmaz elemeiből képezhető rendezett elempároknak (vagyis a két halmaz Descartes-szorzatának) részhalmazaként értelmezzük. A példákhoz kapcsolódva megismerik a tanulók a *hozzárendelés, a képelem, a képhalmaz, az egyértelmű és többértelmű hozzárendelés* fogalmát. A hozzárendelések *megadási módjairól* korábban tanultakat megerősítjük, illetve bővítjük.
3. A hozzárendelések vizsgálata során szerzett tapasztalatokra támaszkodva értelmezzük a függvényt, és a függvény fogalomrendszeréhez tartozó fogalmakat (független változó, értelmezési tartomány, függvényérték, értékkészlet). Külön kiemeljük a *szám-szám függvény* fogalmát. Konkrét példákhoz kapcsolódva tudatosítjuk, hogy a leképezés szabálya önmagában nem értelmezi a függvényt, ismernünk kell az értelmezési tartományt és a képhalmazt is.
4. A *grafikus ábrázolást*, a grafikonok, táblázatok elemzését kapcsoljuk a matematika egyéb témaköreihez. A grafikonok elemzésével tapasztalati szinten előkészítjük az elemi függvényvizsgálatokat.
5. A speciális függvények korábban tanult ismeretanyagát bővítjük, megmutatjuk a kapcsolatot a lineáris függvény és az egyenes arányosság között, tisztázzuk az $y = ax + b$ formulában az a és a b szerepét.
   Ellenpéldaként foglalkozhatunk az $y = |x|$ függvénnyel, ábrázoltathatjuk a grafikonját (ezzel már korábban is találkoztak a tanulók).
6. A 6. osztályban tanultakat felidézve és elmélyítve foglalkozunk a fordított arányossággal. Konkrét példákhoz kapcsolódva ábrázoltatjuk az $y = \frac{c}{x}$ függvény grafikonját is.
7. Az arányossági következtetésekhez, illetve a lineáris függvényhez, esetleg az egyenletek grafikus megoldásához tartozó szöveges feladatokkal differenciáltan fejleszthetjük tanulóink szövegértelmező és problémamegoldó képességét. Egyúttal felkészítjük őket a tanultaknak a mindennapi életben, illetve a társtantárgyakban való alkalmazására is.

Differenciálás

Bár a Kerettanterv által ajánlott anyagrész, csak *jobb képességű osztályban*, illetve *emelt szinten* javasoljuk az egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldását. 8. és 9. osztályban is visszatérünk ehhez a témakörhöz.

Redukált változat: A tanmenetben feltüntetett első 6 óra anyagának feldolgozására legfeljebb 3 órát szánhatunk. Így az időhiány miatt az egzakt függvényfogalom kialakítására, matematikai megalapozására, elvontabb szintre emelésére csak 8. osztályban kerülhet sor. Fontos, hogy konkrét példákban a változó mennyiségek közti kapcsolatokat legyenek képesek értelmezni a tanulók. Ezért folyamatos ismétlésként újra és újra adjunk fel ilyen gyakorlati jellegű feladatokat.

Ha a tanulók tudásában lemaradást tapasztalunk, akkor feltétlenül szervezzünk korrepetálást, illetve a későbbi témakörök tanításánál (algebrai kifejezések, egyenletek stb.) – koncentrációként, folyamatos ismétlésként – a problematikus részek újbóli, a többi anyagrésznél alaposabb felelevenítését javasoljuk.

Kapcsolódási lehetőségek

A fejezet bevezető részében már szóltunk a függvény fogalomrendszerének és a matematika egyéb témaköreinek a kapcsolatáról. Ezért most csak vázlatosan foglalkozunk vele.

Halmazok, logika: **Tk. 3.01–3.05.** (de szinte minden feladat értelmezéséhez szükségesek a halmazelméleti fogalmak).

Műveletek értelmezése, gyakorlása: Az egyenes arányossági következtetések szoros kapcsolatban vannak a racionális számok szorzásának, osztásának értelmezésével.

Logika: Az állításokhoz hozzárendelhetjük a logikai értéküket, tagadásukat **Tk. B3.02–B3.03.** feladat.

Kombinatorika: A feltételeknek megfelelő összes megoldás megkeresése.

Aritmetika, számelmélet, algebra: A racionális számokhoz hozzárendelhetjük az ellentettjét, abszolútértékét, nála adott számmal nagyobb értéket, kerekített értékét stb., a természetes számokhoz az osztóit, osztói számát, egy adott számmal való osztásának maradékát stb. **Tk. 3.05–3.06., Gy. 2.07–2.08.** feladat. A függvények, sorozatok szabályának meghatározása, illetve a szabály alkalmazása (**Tk. 3.32–3.33., Gy. 2.38–2.39.** feladat) nemcsak a számolási jártasságokat fejleszti, hanem előkészíti az algebrai anyag feldolgozását is (kifejezések értelmezése, helyettesítési értékének megadása).

Százalékszámítás: **Tk. B3.18–B3.19., Gy. 2.22.**

Egyenletek, egyenlőtlenségek: **Tk. 3.26–3.31., B3.07–B3.10., Gy. 2.31–2.37.**

Geometria: A tanult terület-, felszín-, térfogatképletek folyamatos ismétlése jól illeszthető a függvénnyel kapcsolatos ismeretek alkalmazásának gyakorlásához (táblázatok kitöltése adott szabály alapján, egyenes, illetve fordított arányosság stb.) **Tk. B3.15., B3.20.; Gy. 5.21., 5.25., 5.30., 5.40., 5.44.**

Statisztika: A grafikonok, diagramok készítése egyaránt kapcsolódik a függvények, illetve a statisztika témakörhöz, ezért nehézség nélkül megoldható a statisztikában tanult ismeretek folyamatos ismétlése. **Gy. 2.04.**

Fizikai vizsgálatok: idő–út grafikonok elemzése, az egyenletes mozgás, a változó mozgás, a sebesség, a sebességváltozás fogalma; hőmérséklet-változás, halmazállapotváltozások; a térfogat, tömeg, sűrűség közti összefüggés stb. (**Tk. 3.07., 3.13., 3.16., 3.23., 3.26., 3.38., B3.07–B3.10.; Gy. 2.01–2.03., 2.05–2.06., 2.13., 2.29.** feladat).

Tanmenetjavaslat

Óra	Aktuális tananyag	Feladatok
	Aktuális tananyag Folyamatos ismétlés, koncentráció	
1. **1–2.**	*Hozzárendelések vizsgálata.* Halmaz, elem, eleme, rendezett elempárok, reláció, alaphalmaz, képhalmaz. A megfeleltetések megjelenítése nyíldiagrammal, táblázattal, *grafikonnal.* Halmazok, logika. Műveletek racionális számokkal. Számelméleti fogalmak; osztók száma. Geometriai fogalmak; kerület, terület. *Emelt szinten* mélyebb elemzést igénylő feladatok. Kombinatorika. Redukált változatban a fogalmak elmélyítése 8. osztályban valósulhat meg.	Tk. 3.01–3.06.; Gy. 2.07–2.08.; Tk. B3.01–B3.03.
2. **3–4.**	*Grafikonok, diagramok* készítése, olvasása, elemzése. Statisztikai vizsgálatok. Fizikai számítások. Redukált változatban a feladatok nagy részét folyamatos ismétlés keretében adjuk fel.	Gy. 2.01–2.06.
3. **5–6.**	*Függvények értelmezése, szám-szám függvények megadása, vizsgálata.* Értelmezési tartomány, független változó, függvényérték, értékkészlet. Függvények jelölési módja. Műveletek racionális számokkal. Abszolútérték. Százalék. Kapcsolatok ábrázolása. Grafikonok elemzése. Fizika (út, idő, sebesség közti összefüggés). Gyakorlati példák. Redukált változatban a fogalomrendszer kiépítése csak 8. osztályban valósul meg.	Tk. 3.07–3.10., B3.04–B3.05.; Gy. 2.09–2.11.; Fgy. 3.1.01–06.
4–5. **7–8.**	*Az egyenes arányosság mint függvény.* Arány, arányosság, arányos osztás. Az egyenes arányosság grafikonja. Összefüggések fizikai mennyiségek között. Százalékszámítással, oldatok keverésével, mozgással kapcsolatos szöveges feladatok. Táblázatok készítése, elemzése.	Tk. 3.11–3.17.; Gy. 2.12–2.16., 2.21–2.22.; Fgy. 3.2.01–03.

Óra	Aktuális tananyag	Feladatok
	Folyamatos ismétlés, koncentráció	
6–8. **9–11.**	*A lineáris függvény.* Az elsőfokú és nulladfokú függvények értelmezése. Az $y = ax + b$ képlettel adott függvény paramétereinek jelentése (a meredekség és a grafikonok párhuzamosságának kapcsolata, a konstans és a grafikonok y tengellyel való metszéspontjának kapcsolata). Lineáris függvény grafikonjának megrajzolása. Pontok koordinátáinak meghatározása a függvény grafikonjáról. Műveletek, műveleti tulajdonságok. Néhány nemlineáris függvény. *Emelt szint* *Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása.* Lineáris egyenlettel, egyenlőtlenséggel megoldható szöveges feladatok grafikus megoldása. Kifejezés helyettesítési értékének meghatározása. Szöveges feladatok a fizika, a kémia tárgyakból, valamint a gyakorlati életből. Kerület, terület.	Tk. 3.18–3.25.; Gy. 2.23–2.30.; Fgy. 3.2.04–08.; Tk. 3.26–3.31., B3.07–B3.10.; Gy. 2.31–2.37.; Fgy. 3.2.09–11.
9. **12.**	*A sorozat mint függvény.* A sorozat mint a pozitív természetes számok halmazán értelmezett függvény. Sorozat elemeinek megadása szabály alapján, néhány elemével adott sorozathoz szabály felírása. Növekvő, illetve csökkenő sorozatok. Számolás törtalakban, illetve tizedestört alakban adott racionális számokkal. Az algebrai kifejezésekről tanultak előkészítése.	Tk. 3.32–3.33.; Gy. 2.38–2.39.
10–11. **13–14.**	*A fordított arányosság mint függvény.* Arány, arányossági következtetések. A fordított arányosság grafikonja. Az egyenes arányosság, a lineáris függvénykapcsolat, illetve a fordított arányosság felismerése, megkülönböztetése konkrét feladatokban. Összefüggések fizikai mennyiségek között, mozgással kapcsolatos szöveges feladatok. Geometriai számítások.	Tk. 3.34–3.38.; Gy. 2.40.; Fgy. 2.4.14–19.
12–13. **15–16.** (+ 2 ó.)	*Fejlesztő értékelés,* a hiányosságok pótlásának megszervezése. *A relációkról, grafikonokról, függvényekről tanultak gyakorlása.* Kémiai, fizikai, geometriai feladatok. **3. témazáró felmérés** megíratása, kijavítása.	Tk. 3.39., B3.11–B3.20. A fejezet korábban meg nem oldott feladatai. Gy. 2.18–2.20.; Fgy. 3.4.01–02.

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Hozzárendelések vizsgálata

Ebben a bevezető részben a korábban már tanult ismereteket elevenítjük fel, előkészítve a függvényfogalom kialakítását. (Halmaz, elem, eleme, részhalmaz; alaphalmaz, képhalmaz; reláció, összetartozó elempárok, képelem.)

A *rendezett elempárok* halmazával foglalkozik a tankönyv, de csak konkrét esetekben, megnevezés (Descartes-szorzat), definíció nélkül. A példák alapján felismerhetik a tanulók, hogy a reláció a rendezett elempárok halmazának valamely nem üres részhalmaza.

A relációk különböző megadási módjait érdemes alaposan megvizsgálni, hiszen ezeket az ismereteket később felhasználjuk a kapcsolatok elemzésénél. (Táblázat, nyíldiagram, Descartes-diagram, elempárok halmaza.)

A tankönyv bővített változatának 151. oldalán található **3.** példa a korábbról ismert „szabályjátékokhoz" kapcsolódik, amikor néhány adott összetartozó elempárhoz keressük a lehetséges leképezési szabályokat. Ismerjék fel a tanulók, hogy néhány adott elempár nem határozza meg egyértelműen a relációt.

Az *egyértelműség,* többértelműség vizsgálata nagyon fontos, mert az egyértelmű megfeleltetések közül kerülnek ki a függvények.

A mintapéldák olyanok, hogy a fogalom minden jegyét tartalmazzák, s ezek feldolgozásával, alapos elemzésével elérhetjük azt, hogy a tanulók – némi tanári segítséggel, de nagy önállósággal – a függvény minden lényeges ismérvét képesek legyenek felfedezni.

A *redukált program* szerint csak a továbbhaladáshoz nélkülözhetetlen ismereteket tekintjük át, és elsősorban a grafikonok vizsgálatával foglalkozunk.

Függvények értelmezése, vizsgálata

7. osztályban, *alapszinten* nem tartjuk fontosnak, hogy tömör, pontos definíciót tudjanak adni a tanulók, de azt igen, hogy egy megfeleltetésről el tudják dönteni, hogy függvény-e vagy sem. Ha a függvény definícióját nem is várjuk el a tanulóktól, az *elnevezések* (értelmezési tartomány, értékkészlet, egyértelműség) pontos használatát igen. A *redukált programban* erre a szintre talán 8. osztályban juthatnak el a tanulók.

A heti 3 tanórában a *redukált változat* szerint dolgozó osztályokban csak a legjobbaktól várható el, hogy képesek legyenek elsajátítani ezeket a fogalmakat.

A feladatokat úgy válogassuk össze, hogy egyrészt kapcsolódjanak a fizikához, illetve a mindennapi élethez, másrészt felszínre hozzák a 6. osztályban tanult ismereteket, ezzel mintegy előkészítve a következő fejezet anyagának tanítását.

Alapszinten célszerű legalább két további órában foglalkozni a grafikonokkal, diagramokkal (**Gy. 2.01–2.06., 2.09–2.11.** feladat). Föltétlenül fordítsunk gondot a grafikonok vizsgálatára is, hiszen ez képezi alapját a későbbi függvényvizsgálatnak.

Emelt szinten már elvárhatjuk, hogy a definíciókat is megtanulják és értelmezni tudják a tanulók.

Ezen a szinten jobban támaszkodhatunk a tanulók önálló otthoni munkájára, ezért nem szükséges 4 tanítási órában foglalkoznunk ezzel a résszel. Az így felszabaduló időt majd az egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldására fordíthatjuk.

Az egyenes arányosság mint függvény

Az általános iskolában a fogalomkialakítás követhető útja: az egyszerűtől a bonyolult felé, a speciálistól az általános felé, a konkréttól az absztrakt felé. Az egyenes arányosság mint speciális lineáris függvény előkészítheti, megalapozhatja az általánosabb, absztraktabb, bonyolultabb fogalom tanítását. A kidolgozott mintapéldák felépítése olyan, hogy több, régebben tanult fogalmat, elnevezést is feleleveníthetünk velük (például: meredekség, pozitív szög, negatív szög). A sok gyakorlófeladat azt a célt szolgálja, hogy a tanulók az origón áthaladó adott meredekségű egyeneseket a maximális begyakorlottság szintjén tudják ábrázolni, és a meredekség értelmezése ne jelentsen problémát nekik. (Az $y = ax$ függvény esetén az x tengelyen 1 egységnyi pozitív irányú haladáshoz az y tengely mentén a egységnyi haladás tartozik.) Fontos kiemelni a meredekség és az összetartozó értékpárok arányának egyenlőségét is. Ezt a grafikonon is mutassuk meg. Azt is ajánlatos megmutatni, hogy ha a meredekség törtszám, akkor az előzőektől eltérő módon is ábrázolható a grafikon – de végeredményben ugyanazt kapjuk (tankönyv 164. oldal, **3.** példa).

A meredekség pozitív vagy negatív volta a függvény növekedését vagy csökkenését mutatja (tankönyv 165. oldal, **4.** példa). Ha $m = 0$, akkor az $y = ax$ képlet az $y = 0$ képletbe megy át, azaz az x tengely egyenletét kapjuk.

A lineáris függvény

Ebben a fejezetben értelmezzük és vizsgáljuk az $y = ax + b$ képlettel adott szám-szám függvényt. Az elsőfokú és a lineáris függvényt nem tekintjük azonos értelműnek. Ez definíció kérdése. Kapcsolódva a középiskolák tankönyveihez, *az elsőfokú és a nulladfokú* (azaz konstans) *függvényt nevezzük lineáris függvénynek.* Így a függvényt leíró kifejezésben az a, illetve a b paraméter 0 is lehet.

Miután az egyenes arányosság fejezetnél a meredekség jelentését kellően tisztáztuk, konkrét példákhoz kapcsolva, a függvénytranszformáció gondolatát felhasználva jutunk el az egyenes arányosság fogalmától a lineáris függvény fogalmáig. A feladatok és példák megoldásakor felismerik a tanulók, hogy az $y = ax$ és az $y = ax+b$ kifejezéssel leírható függvények grafikonja egymással párhuzamos egyenes, és az utóbbi grafikon a b értéknél metszi az y tengelyt.

Konkrét példákkal azt is meg kell mutatnunk, hogy például az $y = 2x + 3$ és az $y = 2x$ esetén mindkét függvénynél 1 egységnyi abszcisszaváltozáshoz 2 egységnyi ordinátaváltozás tartozik, de míg az $y = 2x$ függvénynél az összetartozó értékek aránya 2, addig az $y = 2x + 3$ függvénynél ez az arány változó. Néhány értékpár ennek igazolására:

$$x_1 = 1,\ y_1 = 5,\ \frac{y_1}{x_1} = 5; \qquad x_2 = 2,\ y_2 = 7,\ \frac{y_2}{x_2} = \frac{7}{2}; \qquad x_3 = 3,\ y_3 = 9, \qquad \frac{y_3}{x_3} = 3$$

Tehát az $y = 2x + 3$ kapcsolat nem egyenes arányosság.

A b paraméter jelentésének vizsgálatánál érdemes hangsúlyozni, hogy az egyenes arányosság grafikonja mindig az origón halad keresztül (ha az $x = 0$ az értelmezési tartománynak eleme). Ezért, ha az egyenes arányosságot $y = ax + 0$ alakban írjuk, akkor látható, hogy az egyenes arányosság olyan lineáris függvény, amelynél a $b = 0$.

Bár a függvények grafikus ábrázolásánál még *középiskolai tagozatban* is megengedhető az értéktáblázat használata – sőt a helyettesítési értékek kiszámítása a műveletek gyakorlása szempontjából hasznos és így ajánlott is –, az y tengellyel való metszéspont, illetve a meredekség értelmezése gyorsabb ábrázolási módra ad lehetőséget. Ha pontjainak felvételével ábrázoltatjuk az egyeneseket, akkor – a tévedések kiküszöbölése miatt – célszerű három pontot meghatároztatni. Kiderül a hiba, ha bármelyik pont nem illeszkedik a másik kettő által meghatározott egyenesre.

A **Tk. 3.21., 3.25.** feladattal fel tudjuk mérni, hogy melyik tanuló milyen szintre jutott el az a és a b paraméter értelmezését illetően, s mennyire képes az általánosításra.

A fogalomalkotáshoz szükséges, hogy a tanuló találkozzék ellenpéldákkal is.

Az $y = x^2$, $y = |x|$ és az $y = \frac{1}{x}$ függvényekkel, illetve ezek egyszerűbb (konkrétan adott) transzformáltjaival foglalkozhatunk (anélkül, hogy követelményeket támasztanánk ezen a téren). Erre szolgál a **Tk. 3.22.** feladat. Ez a feladat annak megmutatására is alkalmas, hogy a lineáris függvény olyan alakban is írható, amelyből nehéz leolvasni a meredekséget és az y tengellyel való metszéspontot.

Az $y = x^2$ és az $y = |x|$ függvénynél leolvastathatjuk a grafikonról, hogy hol növekszik, hol csökken a függvény, illetve hol van szélsőértéke. Általános megfogalmazást, definíciót ne várjunk el a tanulóktól.

Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

Alapszinten, főképpen *redukált óraszám mellett* csak 8. osztályban dolgozzuk fel ezt az anyagrészt.

A **Tk. 3.26–3.27.** feladat az egyenlőtlenségek grafikus megoldását készíti elő.

Ebben a fejezetben a függvényekről eddig tanultak alkalmazására kerül sor. Meghatározzuk az értelmezési tartománynak azokat az elemeit, amelyek esetén a függvényértékek egyenlők. A függvényértékek egyenlősége azt jelenti, hogy a grafikonoknak van közös pontja. Mivel azon abszcisszát keressük, ahol az ordináták megegyeznek, célszerű a metszéspontot (az y tengellyel párhuzamosan) levetíteni az x tengelyre.

Az egyenlőtlenségek grafikus megoldásánál azt javasoljuk, hogy a metszéspontokra helyezett, az y tengellyel párhuzamos vonalzóél x tengely menti pozitív-negatív irányban való elmozdításával mutassuk meg, hogy adott x esetén melyik grafikon pontjai helyezkednek el a másik felett.

Az egyenletek és az egyenlőtlenségek grafikus megoldásához megfelelő íróeszközök szükségesek, de általában így is csak közelítő megoldásokat tudunk adni. Közelítésünk pontosabb lehet, ha a tengelyeken az egységeket célszerűen választjuk meg. A grafikus megoldás mellett algebrailag is megoldathatjuk az egyenletet. A két megoldást egyúttal egymás ellenőrzésére használhatjuk fel.

A tanulókkal, konkrét feladatok megoldása során, ismertessük fel, hogy ha az egyenlet két oldalán lévő kifejezés azonos, akkor a két egyenes egybeesik, az egyenletnek végtelen sok megoldása van. Ha egyetlen közös pontja sincs a két grafikonnak (párhuzamos egyenesek), akkor nincs megoldása az egyenletnek.

A sorozat mint függvény

A tanulók legyenek képesek megkezdett sorozatokat folytatni adott, illetve felismert szabály szerint. Ismerjék fel többféle szabály megfogalmazásának lehetőségét. A tanultakat legyenek képesek alkotó módon alkalmazni számelméleti, geometriai vizsgálatokban.

Ha egy-két órában foglalkozunk a sorozatokkal, akkor nem érhetjük el ezeket a célokat. A matematika minden fejezetéhez kapcsolódva kapjanak ilyen feladatokat a tanulók.

Most az az elsődleges cél, hogy tudatosítsuk a fogalmat.

Fordított arányosság

Fordított arányossági következtetésekkel már két-három éve találkoztak a tanulók. Most a fogalom tudatosítása a cél.

Az $y = \frac{1}{x}$ függvénynél vizsgáltassuk meg, hogy a 0 miért nem lehet eleme az értelmezési tartománynak. (Utaljunk a korábban tanultakra, azaz a 0-val való osztás értelmetlen voltára.) Azt is figyeltessük meg, hogy a grafikonon mindez hogyan jelentkezik.

Tudáspróba

A **Tk. 3.39., B3.21.** feladat három részfeladata lényegében lefedi azokat a legfontosabb függvénytani ismereteket, amelyeket 7. osztályban el kell sajátítaniuk a tanulóknak.

Az **1.** feladat azt méri fel, hogy a tanuló hogyan képes értelmezni a grafikonról leolvasható összefüggéseket. Az elemzés szemlélethez kötődő elemi függvényvizsgálatot is jelent.

A **2.** feladatban kifejezéssel adott lineáris függvények grafikonját kell megrajzolni. Emelt szinten ezt alkalmazni kell egyenlet grafikus megoldásában.

A **3.** feladatban szöveggel adott függvényt kell értelmezniük a tanulóknak.

Ebben az anyagrészben elért tudást a **4. témazáró feladatsorral** mérhetjük fel.

Gyakorló- és fejtörő feladatok

A feladatok egyrészt a meglévő ismeretek elmélyítését szolgálják, másrészt (a **Tk. B3.20.** feladattal) a geometriából tanultakat is feleleveníthetjük, mintegy előkészítve a következő témakör tárgyalását.

Az *emelt szinten* az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldását gyakoroltassuk (**Tk. B3.16.** feladat).

Javasoljuk, hogy sok, de felszínes feladatmegoldás helyett inkább kevesebb feladattal foglalkozzunk, és ezek mindegyikére teljes megoldást adjunk.

4. Geometriai transzformációk

A Kerettanterv által ajánlott koncepció szerint az előző három fejezet tananyaga jelentős mértékben bővült. Ezt úgy „kompenzálhatjuk”, hogy az egybevágósági transzformációkat 7. osztályban a korábbiakban megszokottnál jóval kevesebb óraszámban, „alacsonyabb szinvonalon” dolgozzuk fel.

Az előző évfolyamokon, már alsó tagozatban is, a kísérletezések és a sokoldalú megfigyelések során igen sok élményt gyűjtöttek a tanulók a különböző transzformációkról, köztük az egybevágósági transzformációkról is. Ezekre a megfigyelésekre támaszkodhatunk most is, amikor játékos feladatok megoldása során tudatosítjuk a fogalmakat.

A geometriai transzformációt speciális függvényként, vagyis olyan *egyértelmű leképezésként* értelmezzük, amelynek az értelmezési tartománya és a képhalmaza is ponthalmaz. Ez megállapodás kérdése. Vannak olyan szakkönyvek, amelyek csak a ponthalmazok *egy-egyértelmű leképezését* tekintik geometriai transzformációnak. Mi indokolja az általunk elfogadott általánosabb értelmezést?

Jobban megfelel a tanulók tudásszintjének. Ugyanis 7. osztályban nem foglalkozunk az „egy-egyértelmű” leképezéssel. Egyrészt időhiány miatt, másrészt a kölcsönösen egyértelműség vizsgálata még magasabb évfolyamokon is komoly gondot okoz a legtöbb tanulónak.

Így lehetőség nyílik az „elfajuló esetek” vizsgálatára is. Ezek (mint ellenpéldák) éppen az egy-egyértelmű leképezés fogalmát is *előkészíthetik.*

Ezt a definíciót találjuk a legtöbb középiskolai tankönyvben is.

A „geometriai transzformáció” – mint pontnak ponthoz történő *egyértelmű* hozzárendelése – fogalmával 6. osztályban a tengelyes tükrözés részletes tárgyalása során találkoztak a tanulók. 7. osztályban további egybevágósági transzformációk kerülnek sorra. Az *eltolással* és a *forgatással* csupán az ismerkedés szintjén (8. osztályban visszatérünk az egzakt fogalmak kialakítására és a tulajdonságok vizsgálatára, a szerkesztések elvégzésére). A *középpontos tükrözéssel* részletesen foglalkozunk.

A téma feldolgozása során arra törekszünk, hogy az egyes transzformációk tulajdonságait vizsgálva egyezéseket és különbözőségeket vetessünk észre, fedeztessünk fel, ezzel fejlesztve a tanulók geometriai szemléletét. Szükséges tehát, hogy az újabb transzformációkkal való ismerkedést megelőzze a tengelyes tükrözésről és a tengelyesen szimmetrikus alakzatokról tanultak felelevenítése, rögzítése.

A tanári bemutatáshoz jól használható az írásvetítő. A jól szerkesztett, rögzített tengely körül „átforduló” transzparenssel igen jól szemléltethető például az, hogy a tengelyes tükrözés *nem síkmozgás.* Hatékony az írásvetítővel való modellezés a síkmozgások (eltolás, elforgatás) bemutatása során is. Az eltolásnál a két rétegben egymásra helyezett fólia közül a felső egy rögzített „vályúban” mozdulhat el, a forgatásnál pedig egy műanyag patent modellezi a „rögzített pontot”.

A tükrözések egymás utáni végrehajtása nem követelmény, ennek következtében ilyen jellegű probléma csak a feladatok között (**Tk. 4.20., Gy. 6.20.**) fordul elő. *Jobb csoportban* érdemes ezeket a feladatokat megoldatni. Ezeknek az összetett leképezéseknek a szemléltetése során fokozott jelentőségű az írásvetítővel, fóliával való modellezés. Alkalmazása fejleszti a tanulók geometriai szemléletét, „felfedezteti” az egyes transzformációk közötti egyezéseket, megfeleltetéseket, illetve különbözőségeket, és a későbbiek során a függvénytranszformációkhoz való kapcsolhatóságot biztosíthatja.

A témakör feldolgozására heti 4 matematikaóra mellett 10–12 órát javaslunk, heti 3 matematikaóra esetén 3–4 órával kevesebbet.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. Az előző évfolyamokban már konkrét tapasztalatokat szereztek a tanulók a transzformációkról. Ezeket a tapasztalatokat ebben a tanévben összegyűjtjük, rendszerezzük és újabbakkal bővítjük ki. A függvényfogalom tudatosítása után, az általánosabb értelmezésnek megfelelően, a sík pontjainak *egyértelmű leképezését* mint *pont-pont függvényt* nevezzük geometriai transzformációnak.
A fogalom kialakításához szükséges, hogy ellenpéldákkal is találkozzék a tanuló. Ezért találkozzék egyrészt olyan megfeleltetésekkel, amelyek nem egyértelműek, tehát nem transzformációk, másrészt kerüljön sor nem egybevágósági transzformációk vizsgálatára is.

2. Játékos feladatokon keresztül foglalkozunk az egybevágósági transzformációkkal. A tananyag spirális felépítésének ezen a szintjén még nem lehet célunk a definíciók megfogalmazásának, a tulajdonságok felsorolásának, illetve a szerkesztések pontos végrehajtásának a számonkérése. Feladatunk a rugalmas képi gondolkodás fejlesztése, a geometriai szemlélet alakítása.

3. *Emelt szinten, jobb csoportban alapszinten is:*
Ha korábban értelmeztük a *vektor* fogalmát, akkor ennek felhasználásával pontosíthatjuk az *eltolás* fogalmát is mint olyan ponttranszformációt, amely síkmozgás. Később az eltoláshoz kapcsolódva a *párhuzamos szárú szögpárok* küzül értelmezzük az *egyállású szögeket* és a *társszögeket.*
8. osztályban az eltolást is újra tárgyalja a tankönyv úgy, hogy el is mélyíthetjük a 7. osztályban tanultakat.

Redukált program
Az eltolással nem foglalkozunk.

4. Felelevenítjük és tudatosabbá tesszük (beépítjük a fogalomrendszerbe) a tengelyes tükrözésről és a tengelyesen szimmetrikus síkidomokról tanultakat.

Emelt szinten
A *tengelyes tükrözés tulajdonságait* szerkesztési és bizonyítási feladatok megoldásában alkalmazzuk.

5. Külön fejezetben vizsgáljuk a *középpontos tükrözést.* Tudatosítjuk, hogy a középpontos tükrözés speciális forgatás.
Ehhez kapcsolódva értelmezzük a fordított állású szögeket.
Értelmezzük a középpontos szimmetriát. A korábban megismert négyszögek, szabályos sokszögek közül előállítjuk és vizsgáljuk a középpontosan szimmetrikusakat.

Emelt szint

A középpontos tükrözés és szimmetria tulajdonságainak alkalmazásaként *szerkesztési és bizonyítási* feladatokat oldunk meg.

Az egybevágósági transzformációk összefoglalására és rendszerezésére, az eltérő és az azonos tulajdonságok kiemelésére 8. osztályban kerül sor.

Redukált óraszám mellett 2–3 órával kevesebb idő jut erre a témakörre, mint ha heti 4 matematikaóra lenne. Ezért a geometriai transzformáció fogalmának szemléleti és fogalmi megalapozása nem lehet olyan mély, mint ahogyan az előzőekben felvázoltuk. Továbbá a tanult egybevágósági transzformációk gyakorlására, összetettebb feladatok megoldására kevesebb idő jut. Ezt a hátrányt némileg kompenzálhatjuk, ha az Algebrai kifejezések c. fejezet feldolgozása során folyamatos ismétlésként geometriai feladatokat is feladunk.

Kapcsolódási lehetőségek

Halmaz, logika

Az alakzatok vizsgálatánál, rendszerezésénél, az összefüggések megfogalmazásánál alkalmazzuk a halmazelméleti és logikai ismereteket és eszközöket (**Tk. 4.11., 4.31., B4.04.; Gy. 6.31.** feladat).

Számtan, algebra

Számolás racionális számokkal: koordináta-rendszerben transzformációval kapott alakzatok pontjainak, vektorok végpontjainak meghatározása; forgatások egymás utáni elvégzésekor az elfordulás mértékének kiszámítása; stb. (**Tk. 4.01–4.04., 4.13., B4.08., Gy. 6.05., 6.08.**); Területszámítások, törtrész kiszámítása, arány (**Tk. 4.21–4.23.**).

Relációk, függvények

Koordináta-rendszer: **Tk. 4.01–4.04., 4.13., 4.20., B4.08., B4.18.**

A geometriai transzformáció is függvény. A ponthoz pontot rendelés szabályai az egyes feladatoknál szövegesen, illetve matematikai összefüggés formájában találhatók.

A mérés, a geometria egyéb témakörei

Alkalmazzuk a hosszúságmérésről és a szögmérésről tanultakat.

Az egybevágósági transzformációkkal való ismerkedés során a már meglévő geometriai *fogalmakra* és az ismert *szerkesztési eljárásokra* építünk. Az egyes transzformációk tulajdonságait alkalmazva háromszögeket, négyszögeket szerkesztünk.

Meghatároztathatjuk tanult síkidomok kerületét, területét: **Tk. 4.18–4.19., 4.21–4.23.**

Tanmenetjavaslat

Óra	Aktuális tananyag	Feladatok
	Folyamatos ismétlés, koncentráció	
1. **1–2.**	Ismerkedés a pont-pont függvényekkel. A *geometriai transzformáció* mint függvény. Pont hozzárendelése ponthoz adott szabály alapján. Az egybevágósági transzformáció fogalma. A különböző egybevágósági transzformációk (tengelyes tükrözés, eltolás, elforgatás) felismerése. Parkettázások. Mozgással végrehajtható transzformációk kiválasztása. Alapvető geometriai fogalmak és szerkesztési eljárások felelevenítése. A függvény fogalma. Hozzárendelés adott szabály alapján. Derékszögű koordináta-rendszer. *Redukált program* Nem foglalkozunk teljes mélységében a fogalmakkal.	Tk. 4.01–4.08.; Gy. 6.01–6.07.
– **3–4.**	*Eltolás.* A tankönyv bővített változatában található anyagrész. Az eltolás tulajdonságai. Nullvektor. Az eltolás modellezése (például áttetsző papír segítségével), végrehajtása párhuzamos egyenesek szerkesztésével. A vektor fogalma, jelölései, két vektor összege. Merőleges, párhuzamos egyenesek. Derékszögű koordináta-rendszer. *Redukált program:* Nem foglalkozunk ezzel az anyagrésszel.	Tk. B4.01–B4.02.; Gy. 6.08–6.13.
2. **5–6.**	*Tengelyes tükrözés, tengelyesen szimmetrikus síkidomok,* a sík t tengely körüli 180°-os elforgatása, a tengelyes tükrözés végrehajtása, tulajdonságai, tengelyesen tükrös alakzatok előállítása, vizsgálata. Háromszögekről, négyszögekről tanultak ismétlése, háromszögek, négyszögek szerkesztése, területe. *Redukált program:* Az esetleges hiányosságokat korrepetáláson küszöböljük ki.	Tk. 4.09–4.12.; Gy. 6.14–6.20.;
(+ 2 ó.)	*Emelt szint* A tengelyes tükrözés alkalmazása szerkesztési és bizonyítási feladatokban.	Fgy. 3.2.01., 3.2.05., 4.2.14–18.

Óra	Aktuális tananyag	Feladatok
	Folyamatos ismétlés, koncentráció	
3–5. **7–9.**	*A középpontos tükrözés* fogalma, tulajdonságai. Elforgatás 180°-kal. A szerkesztés végrehajtása. A tengelyes tükrözés és a középpontos tükrözés összehasonlítása. *Középpontosan szimmetrikus alakzatok.* Derékszögű koordináta-rendszer. Tengelyes tükrözés. Forgatás. Szerkesztések. Háromszög szögösszege. Paralelogramma, deltoid, rombusz, szabályos sokszög. Tengelyes szimmetria, forgásszimmetria. *Emelt szint* A középpontos tükrözés és szimmetria alkalmazása szerkesztési és bizonyítási feladatokban.	Tk. 4.13–4.23.; Gy. 6.21–6.23.; Tk. B4.10–B4.19.; Gy. 6.26–6.29.; Fgy. 4.2.08., 4.2.10., 4.2.19.
6. **10.**	*Szögpárok:* Az egyállású szögek, csúcsszögek, váltószögek, mellékszögek, társszögek felismerése. Középpontos tükrözés. Szerkesztések. Háromszög szögösszege. Paralelogramma belső szögei közti kapcsolat.	Tk. 4.28–4.30.; Gy. 6.24–6.25., 6.30.
7–8. **11–12.** (+ 2 ó.)	*Összefoglalás,* gyakorlás, fejlesztő értékelés. A hiányosságok pótlásának megszervezése, a folyamatos ismétlés előkészítése. **5. témazáró felmérés** megíratása, kijavítása. *Redukált óraszám mellett* nem biztos, hogy jut idő ennek a dolgozatnak a megíratására.	Tk. 4.31., B4.03–B4.09.; Fgy. 4.2.20., 4.2.22–28.

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Ismerkedés a pont-pont függvényekkel

A **Tk. 4.01–4.04.** feladatok egymással összefüggők, célszerű mind a négyet megoldatni, majd a tapasztalatokat együttesen megbeszélni és rögzíteni. A négy feladat segítségével felfrissítjük a tanulók koordinátageometriával, függvényfogalommal, geometriai transzformációval, tengelyes tükrözéssel kapcsolatos ismereteit, *előkészítjük* az eltolásnak és a középpontos tükrözésnek mint transzformációnak a tanítását. Példát mutatunk olyan transzformációkra (torzítás, nagyítás), amelyek nem szögtartók, illetve nem távolságtartók.

Mint már említettük, a geometriai transzformációt olyan *függvényként* értelmezzük, amelynek az értelmezési tartománya és a képhalmaza is ponthalmaz. Az egybevágóság távolságtartó transzformáció.

A különböző egybevágósági transzformációkkal komplex módon foglalkozunk a **Tk. 4.01–4.04.; Gy. 6.04–6.06.** feladatok megoldása során.

Törekedjünk arra, hogy a tanulók ismerjék fel

a tengelyes tükrözést, a tükrözés tengelyét;

az eltolást, az eltolást meghatározó vektort;

az elforgatást, az elforgatás középpontját, illetve az elfordulás szögét.

Eltolás

A tankönyv bővített változatában szereplő fejezet. Az eltolás tárgyalásához 8. osztályban visszatérünk, ezért most elsősorban az ismerkedés, tapasztalatszerzés legyen a célunk. Időhiány miatt most esetleg el is hagyható ennek az anyagrésznek a feldolgozása.

Az általános iskolai tanuló eddigi tanulmányai során *minden* egybevágósági transzformációval megismerkedett, közülük a tengelyes tükrözéssel viszonylag részletesen.

Már alsó tagozatban, de főleg a 6. osztályban a tengelyes tükrözés lényeges tulajdonságait konkrét feladatokat megoldva, sok esetben modellezéssel, kísérletezgetéssel fedezte fel a tanuló, fedeztette fel a tanár. Véleményünk szerint az *eltolás* is olyan transzformáció, amelynek megismerése *széles körű* manipulatív tevékenységet követel meg a tanulótól, és *csak a tapasztalatszerzés útját bejárva* válik teljesen érthetővé az eltolásra adott tankönyvi meghatározás.

Az eltolás esetében ugyanis – a tengelyes tükrözéshez viszonyítva – *bonyolultabb* a vizsgálódás. Egy-egy alakzat (például irányított szakasz) mozgatása esetén azt kell vizsgálni, hogy az elmozdulás iránya és nagysága miként befolyásolja az alakzat méretét és mozgásának irányát. E vizsgálódás eredménye:

1. Ha a szakasz bármely két pontja (pl. a két végpontja) egyazon irányban ugyanakkora utat tesz meg, akkor a szakasz hossza nem változik meg, iránya pedig az eredeti szakaszéval párhuzamos marad.
2. Ha a szakasz végpontjai egyazon irányban mozognak, de eközben különböző nagyságú utat tesznek meg, akkor az általuk meghatározott szakasz hosszúsága az eredeti szakaszéhoz viszonyítva megváltozhat, iránya pedig nem lesz feltétlenül párhuzamos az eredeti szakasszal.
   Az nem fordulhat elő, hogy egyidejűleg mind a végpontok közötti távolság, mind az általuk meghatározott irány változatlan marad.
3. Ha a végpontok különböző irányban ugyanakkora vagy különböző nagyságú utat tesznek meg, akkor az e pontok közti távolság megváltozhat, és az általuk meghatározott irány sem lesz feltétlenül párhuzamos az eredeti szakasszal.
   Ez esetben sem fordulhat elő az, hogy egyidejűleg változatlan marad mind a pontok távolsága, mind a pontok által meghatározott irány.

Mindezek a megállapítások azt jelentik, hogy egy irányított szakasz és a képe akkor és csak akkor egyenlő, ha a kezdő- és a végpontja azonos irányban ugyanakkora távolságra mozdul el. (Feltételezzük, hogy az irányított szakasz „merev test”, a mozgatás során tehát bármely két pontjának egymástól mért távolsága nem változik.)

Az 1–3. pontokban említett tapasztalatok megszerzésére igen alkalmasak azok a feladatok, amelyekben négyzetrácson vagy háromszögrácson vizsgáljuk szakaszok transzformációját (**Tk. 4.02.; Gy. 6.08–6.11.** feladat). A szakaszt esetleg szívószáldarabbal modellezhetjük. Mind a négyzetrács, mind a háromszögrács leegyszerűsíti az irányok, hosszak megállapítását, összehasonlítását.

Néhány további didaktikai jellegű megjegyzés:

Hívjuk fel a figyelmet a pontkoordináták pontos leolvasására.

A téves adatok felismerése és korrigálása az ismeretek bővítését eredményezi.

Ha szükséges, további olyan pontpárokat is megadhatunk, amelyekkel az 1–3. pontban kifejtettek igazolhatók.

A területszámítás gyakorlása céljából kiszámíttathatjuk a vizsgált sokszögek területét.

Ezeknek a feladatoknak a feldolgozását azért is ajánljuk, mert a tapasztalatszerzés mellett alkalmasak a koordinátageometriai ismeretek alkalmazására, *bővítésére,* a kombinatív képességek fejlesztésére.

A feladatok – funkciójuk szerint – három csoportba oszthatók:

a fogalom megértését elősegítő (**Tk. 4.02.; Gy. 6.08–6.11.** feladat);

a szerkesztés technikáját elősegítő, gyakorló (**Tk. B4.02.** feladat);

a geometriai szemléletet fejlesztő (**Tk. 4.06–4.08., B4.01.** feladat).

Tengelyes tükrözés, tengelyesen szimmetrikus síkidomok

Ebben a részben – a koncentrikus bővítés elvének megfelelően – nemcsak a tengelyes tükrözésről tanultakat ismételjük át, idézzük fel, hanem a már ismertek alapján a fogalmakat tovább mélyítjük, az alkalmazások körét pedig tovább szélesítjük.

Az általános iskolai matematikatanulás egyik alapvető vonása a próbálkozáson, kísérletezésen, megfigyelésen alapuló ismeretszerzés. Emiatt fennáll annak a veszélye, hogy ezt az induktív ismeretszerzési folyamatot teljes értékű *bizonyításnak* tekintik a tanulók, vagyis a *sejtést* bizonyításként kezelik. Ezért fontos a bizonyítás igényének kialakítása. Ezt a célt szolgálhatja például, ha a tankönyvben felsorolt tulajdonságok bizonyítását is kérjük a tehetségesebb tanulóinktól.

Középpontos tükrözés

A **Tk. 4.14.** feladat feldolgozását hatékonyabbá tehetjük, ha közvetlenül előtte *ténylegesen* – minden tanulót bevonva – le is játszatjuk a társasjátékot. (Például a padtársak játszanak, vagy a tanár játszik az osztállyal stb.) A tanulók tapasztalat nyomán jutnak el ahhoz a felismeréshez, hogy a *rendszertelen,* vaktában való próbálkozásnál jóval értékesebb a szintén tapasztalat útján szerzett „négyes csoportokba osztás”, de a *biztos nyerés stratégiájának* a középpontos tükrözés az alapja.

A két előkészítő feladat (**Tk. 4.13., 4.14.**) megoldása után a tanulók előtt inkább a transzformáció megvalósításának technikája válik világossá, mintsem az, hogy a középpontos tükrözés speciális (180°-os) elforgatás. Ez utóbbit a példa megoldása után veszik észre – tanári irányítás segítségével – a tanulók, és így közös munka nyomán juthatunk el fontos következtetésekhez.

Halmazábrák segítségével módunk van a speciális és az „általános” eset összehasonlítására, törvényszerűségeinek újbóli felismertetésére és megfogalmazására:

A *középpontos* tükrözés az *elforgatás speciális* esete, a tükrözött alakzat, tehát az elforgatott alakzat minden tulajdonságával (például egybevágóság) rendelkezik. Létezik azonban olyan tulajdonsága (például a megfelelő szakaszok párhuzamossága), amely az elforgatott alakzatokra *általában nem* jellemző. Tehát az elforgatások halmazának valódi részhalmaza a középpontos tükrözések halmaza.

A szavakban való megfogalmazása módot nyújt az *igaz állítás nem minden* esetben való *megfordíthatóságának* bizonyítására is:

ha egy alakzat egy másik alakzat középpontos tükörképe, akkor annak elforgatott képe;

ha egy alakzat egy másik alakzat elforgatott képe, akkor annak *nem feltétlenül* a középpontos tükörképe.

A fejezethez kapcsolódó gyakorlófeladatok közül a **Tk. 4.17.** feladat megoldásakor, a középpontos tükrözés végrehajtásán túlmenően, a háromszögekről is szerezhet új tapasztalatokat a tanuló. (Szögfelezői és magasságvonalai egy pontban metszik egymást.)

A **Tk. 4.18–4.22.** feladat megoldása azért fontos, mert egyrészt visszautalhatunk a háromszög területéről tanultakra, másrészt előkészíthetjük a paralelogrammákról később tanulandókat.

Középpontosan szimmetrikus alakzatok

A tengelyesen szimmetrikus és forgásszimmetrikus síkbeli alakzatok meghatározásának mintájára a középpontosan szimmetrikus síkbeli alakzatokat is definiáljuk.

A feladatokon keresztül *elmélyíteni* igyekszünk az új fogalmat. Emellett *felelevenítjük* a tengelyesen és középpontosan szimmetrikus alakzatokról tanultakat. Az *összehasonlítás* során a tanulók logikai ismereteit, képességét több oldalról (szemlélet, meggondolás) is bővítjük, fejlesztjük.

Szögpárok

Párhuzamos szárú szögek

A párhuzamos szárú szögekre vonatkozó megállapításokat a tankönyv kidolgozott példájának megoldása nyomán fogalmazzuk meg (természetesen lehetséges más módon való feldolgozás is).

A „szögek szárai egyirányúak”, a „szögek szárai ellentétes irányúak” *nem magától értetődő fogalmak,* ezeket valamilyen módon meg kell határozni. A tankönyv csupán rajzzal szemlélteti, de nem definiálja ezeket a fogalmakat (általában a középiskolai könyvek sem). *Emelt szintű* tanulócsoport esetén felhívhatjuk a tanulók figyelmét arra, hogy a rajz alapján próbáljanak helyes szóbeli meghatározást adni.

Ez esetben a *szokratikus* tanítási eljárás célravezető lehet.

Az a tapasztalat, hogy (eleinte) a próbálkozások közvetlenül vagy közvetve circulus vitiosushoz vezetnek: a tanulók az *egy irányban, ellentétes irányban* szavakat használják a meghatározás közben. A tanár segítő mondata (a síkot bontsuk egyenessel két félsíkra) helyes meghatározást eredményezhet. *Például:*

Két – nem egy egyenesbe eső – párhuzamos félegyenest *egyirányúnak* nevezünk, ha a kezdőpontjaikon áthaladó egyenes a két félegyenest nem választja el. (Az elválasztás azt jelenti, hogy a félegyenesek nem egyazon félsíkban haladnak.)

Az ellentétes irányú félegyenesekre vonatkozó meghatározás ezek után már könnyebben megalkotható.

A helyes meghatározáshoz való eljutás kollektív munka eredménye. Célja nem csak az *ismeret* megszerzése. Az alkalmazott – szokratikus – módszer kialakíthatja a fogalmak pontos meghatározásának igényét, fejlesztheti a matematikai intelligenciát; biztosítja a kulturált vitakészséget, az igazság *fokozatos* megközelítését, s még jó néhány oktatási és nevelési cél megvalósítását.

Fordított állású szögek

A *csúcsszögek* és a *váltószögek* fogalmát, a velük kapcsolatos egyenlőséget a középpontos tükrözés alkalmazásaként vezethetjük be. A fordított állású szögek fogalmának kialakításakor hangsúlyoznunk kell, hogy ha egy egyenest 180°-kal elforgatunk, akkor az eredeti egyenes és a képe párhuzamos egymással. *Alapszinten* a szemléletre támaszkodva már korábban elfogadtuk, *emelt szinten* bizonyíthatjuk (bővített tankönyv 211. oldal) ezt az állítást. Ebből közvetlenül következik, hogy a félegyenes középpontos tükörképe egy vele párhuzamos, de ellentétes irányú félegyenes.

A váltószögek egyenlőségére vonatkozó egyszerű, alapvető megállapítás ismerete mind az általános iskolai (például **Tk. 4.29.** feladat, a háromszög szögeinek összege 180°), mind a középiskolai matematikatanítás során elengedhetetlen követelmény.

A feladatok részben a *fordított állású szögek* fogalmának mélyítésére (**Tk. 4.28–4.30., Gy. 6.24.**), részben a középpontos tükrözés tulajdonságainak felelevenítésére, a korábban tanultakkal való „összeszövésre” alkalmasak.

Gyakorló- és fejtörő feladatok

A gyakorlófeladatok olyanok, hogy megoldásukhoz az egybevágósági transzformációkról tanultak egészét alkalmazni kell. Ezért e feladatokhoz kapcsolódva jól megvalósítható a tanultak összegzése, rendszerezése, összefoglalása, de a korábban tanultak (például kerület- és területszámítás, a háromszögekkel kapcsolatos egyszerű szerkesztések) felelevenítése is. A Matematika 7. Gyakorló **6.01–6.31.** és a Matematika 7–8. Feladatgyűjtemény **4.2.20., 4.2.22–28.** feladatai lehetőséget adnak a differenciált folyamatos ismétlés megszervezésére, az esetleges hiányosságok pótlására.

Emelt szinten, a középiskolába készülő, illetve középiskolai tagozatra járó tanulóknak fokozatosan el kell jutniuk arra a szintre, hogy a geometriából tanultakat szerkesztési és bizonyítási feladatokban is alkalmazni tudják. Erre azért tudunk (témakörönként 1–2 tanórányi) időt biztosítani, mert ezeknél a tanulóknál kevesebb időt kell fordítanunk az alapvető ismeretek és egyszerű szerkesztési eljárások sulykolására, helyette probléma szintű feladatok megoldásával foglalkozhatunk.

Az **1.** példa (Tk. 210. o.) ízelítőt nyújt a tengelyes tükrözés magasabb szintű alkalmazására szerkesztési feladat megoldásában. Ehhez a példához kapcsolódik a **B4.10–B4.13.** feladatsor.

A **2.** példa megoldása során a már ismert technikai eljárást (merőleges bocsátása a kérdéses egyenesre) alkalmazzuk, s ennek segítségével bizonyítjuk az egyenes és tükörképének párhuzamos voltát. Célszerű ezek után azt is megemlíteni, hogy 180°-os elforgatás esetén az egyenessel a tükörképe 180°-os szöget zár be, ami *párhuzamosságot* jelent. (Ez esetben is ajánljuk a fólián való kivetítést.)

Tudáspróba

A tudáspróbák feldolgoztatásával előkészíthetjük a dolgozatot. Lásd

5. témazáró feladatsor.

5. Algebrai kifejezések

Az algebrai kifejezésekkel – tehát nem csak konkrét számokkal – való műveletek elvégzése mindig komoly gondot jelentett a tanulóknak. Ennek az az oka, hogy ez a tevékenység nagyfokú absztrakciót feltételez. Ha tanulóink nem képesek e gondolkodási műveletre vagy nem eléggé fejlettek e téren, szinte megoldhatatlan problémával találják szemben magukat. Az absztrakcióra való képesség nem alakul ki magától, komoly tanári tervező munkát igényel. Hosszú, nehéz munka során lesz csak képes a tanuló erre a – matematikában nélkülözhetetlen – tevékenységre. Ezért is helyeselhető az a törekvés, amely az algebra alapjainak lerakását már alsó tagozatban megkezdi, és a gyerekekhez közel álló példák – konkrétumok – sokaságán keresztül jut el 7. osztályban az algebrai kifejezésig, azaz a gondolati absztrakcióig.

A betűjelölés bevezetése nem öncélú. Használata nélkülözhetetlen a függvények, a geometriai számítások, az egyenletek, egyenlőtlenségek, a fizikai, kémiai számítások stb. tanításánál.

Alsó tagozatban – kezdetben – a keretjelölést (téglalap, négyzet, háromszög, kör stb.) használjuk, ezzel is érzékeltetve azt, hogy az egyes keretekbe több szám is írható, később, fokozatosan térünk át a változók betűkkel való jelölésére. Ez a fokozatosság több évfolyamon keresztül, állandó tartalmi bővülést feltételezve valósulhat meg. Például a következő feladatsoron érzékeltethető a fokozatosság, a konkréttól az absztraktig haladás folyamata.

a) Írd fel 2-nek és 3-nak az összegét!
Írd fel a-nak és 3-nak az összegét!
Írd fel a-nak és b-nek az összegét!

b) Most 13 éves vagyok. Hány év múlva leszek 22 éves?
Most a éves vagyok. Hány év múlva leszek 38 éves?
Most x éves vagyok. Hány év múlva leszek y éves?

c) Egy osztályban 15 pad van. Ha minden padba 2 tanuló ül, akkor 1 hely üresen marad. Hány tanuló van az osztályban?
Egy osztályban a számú pad van. Ha minden padba 3 tanuló ül, akkor 2 tanulónak nem jut hely. Hány tanuló van az osztályban?
Egy osztályban a számú pad van. Ha minden padba x számú tanuló ül, akkor y hely üresen marad. Hány tanuló van az osztályban?

d) Írd fel 50 Ft-nak a 20%-át!
Írd fel a Ft-nak a 40%-át!
Írd fel a Ft-nak a b%-át!

E néhány kiragadott példa is érzékelteti, hogy nagyon sok témakört tudunk érinteni az algebrai kifejezések tanítása során. Az is látszik, hogy egy ilyen „nehéz” fogalom, megfelelő konkrét példákkal hogyan tehető a tanulók számára „kézzelfoghatóvá”. Fontos a differenciálási lehetőség az itt felsorolt példáknál, mert nagyon sok tanuló nehezen jut el a példasorozatban látható „3. fokozatig”. Ezek a tanulók sokáig megmaradnak a „konkrétság” szintjén.

A rendszerszemlélet – a korábbi témakörökhöz hasonlóan – itt is fontos a fogalomalkotáshoz, hiszen ezáltal alaposabb, tartósabb, alkalmazhatóbb, transzferálhatóbb ismereteket szerezhetnek a tanulók. Ebből a szempontból vizsgáljuk meg, hogy az algebrai kifejezések fogalmának kialakításához milyen egymásra épülő, egyszerű és összetett fogalmakat kell a tanulóknak elsajátítaniuk.

Halmaz, elem, eleme.

Alapműveletek, elnevezések (összeadás, kivonás, összevonás, szorzás, osztás, összeg, különbség, szorzat, hányados).

A 0 az osztásban.

Előjel; műveleti jel.

Műveleti tulajdonságok; zárójelek használata; műveleti sorrend.

Összeg szorzása, osztása; szorzat szorzása, osztása.

Hatványozás; hatvány, alap, kitevő; műveletek hatványokkal.

Kifejezés, változó, együttható; egynemű, különnemű; egytagú, többtagú; algebrai egész és törtkifejezés.

Helyettesítési érték meghatározása.

Értelmezési tartomány.

Az egyszerű fogalmak közül többet (halmaz, elem, eleme, műveletek, elnevezések, előjel stb.) már korábban megtanítottunk, de 7. osztályban – év elején – ezek alapos ismétlése szükséges, hogy a fogalomalkotásban tudjuk mihez kapcsolni az új ismereteket. A többi – korábban felsorolt – fogalomról is szereztek már a tanulók bizonyos alapismereteket, amelyekre most építhetünk.

Redukált program

Heti három órában mintegy 8 órával kevesebb idő jut az algebrai kifejezések tárgyalására, mint azokban a csoportokban, amelyek heti négy órában tanulják a matematikát. Ezért itt ebben a témakörben sem lehet teljességre törekedni. Inkább az algebrai kifejezések eszközjellegét kell hangsúlyoznunk. Ez azt jelenti, hogy annyit és olyan mélységben kell megtanítanunk e témakörből, amennyi az egyéb tantárgyakban (fizika, kémia, technika stb.), illetve a matematika más témaköreiben (geometria, egyenletek, függvények stb.) nélkülözhetetlen.

Az *algebrai kifejezések szorzattá bontásával* még előkészítés igényével sem foglalkozhatunk. Ezt a NAT, illetve a Kerettanterv ennek a korosztálynak nem írja elő. A további témakörökben is kevesebb idő jut a gyakorlásra, az összetettebb feladatok megoldására. Ezt a hiányt a középiskolába készülő tanulóinknak otthoni munkával vagy külön foglalkozásokon pótolniuk kell.

Az év végi ismétlésre lényegében nem marad idő. Ezért a számtan, algebra, illetve a függvények témakörben tanultakat az algebrai kifejezések feldolgozásával párhuzamosan kell áttekintenünk, és a hiányosságokat differenciált otthoni munkával (vagy korrepetálások szervezésével) pótoltatnunk kell. A tanmenetben apró betűvel szedve utalunk, hogy mely ismereteket eleveníthetjük fel és ismételhetjük át.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. Felelevenítjük a *műveletek fogalmát,* gyakoroltatjuk a négy alapműveletet a racionális számok halmazában. Tudatosítjuk a *műveleti tulajdonságokat.*
2. Elmélyítjük a *hatványozás* fogalmát, értelmezzük az alap, a kitevő jelentését, tudatosítjuk a *műveletek sorrendjét,* továbbá felelevenítjük a *hatványokkal végzett műveletekről* és a *számok normálalakjáról* tanultakat.
3. Értelmezzük az *algebrai kifejezésekkel* kapcsolatos fogalmakat, elnevezéseket (algebrai kifejezés, együttható, változó; egynemű, különnemű algebrai kifejezések).
   Az algebrai kifejezések *helyettesítési értékeinek* kiszámításánál gyakoroltatjuk a négy alapműveletet és a hatványozást, a racionális számok különböző alakjaival.
   Ha tanulóink (szóban és írásban) megbízhatóan számolnak, akkor a helyettesítési érték kiszámításához használtathatunk számológépet. Ezzel nemcsak időt szabadítunk fel az érdemi munkára, hanem („egyszerű" számológépek használata esetén) tudatosabbá válik a műveletek helyes sorrendje is. A számológéppel való számolást mindig előzze meg az eredmény becslése (kerekített értékekkel „fejben" számolva).

   Emelt szinten értelmezhetjük az *algebrai egész* és *törtkifejezések* fogalmát, vizsgálhatjuk az algebrai törtkifejezések *értelmezési tartományát.*
4. Értelmezzük és gyakoroltatjuk az egynemű kifejezések összevonását.
5. Értelmezzük és gyakoroltatjuk az egytagú, majd többtagú kifejezések szorzását, osztását egytagú kifejezéssel.

   Alapszinten és a *redukált programban* esetleg megelégedhetünk a többtagú kifejezések számmal való szorzásával.

   Emelt szinten eljuthatunk a többtagú kifejezések többtagú kifejezésekkel való szorzásához.
6. Többtagú kifejezés szorzattá alakítása *kiemeléssel.* A *redukált programban* nem foglalkozunk ezzel az anyagrésszel.
7. Az *egyenletek, az egyenlőtlenségek megoldása* során alkalmazzuk az algebrai kifejezésekről tanultakat: az egynemű kifejezések összevonását, a kifejezések szorzását és szorzattá alakítását, s ezzel a műveletvégzést is gyakoroltatjuk. Külön hangsúlyt kap a *törtegyütthatós egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása.*

   Emelt szinten ismerkedünk a nemlineáris egyenletek megoldásával.
8. Az *egyszerű szöveges feladatok* megoldásának menetét a korábbi évfolyamokon is nagy részletességgel tanítottuk. 7. osztályban gyakoroltatjuk, elmélyítjük a *szöveges feladatok megoldásának algoritmusát.* Különösen figyelnünk kell a *tervkészítésre,* a *becslésre* és az *ellenőrzésre.*

   Alapszinten ismerkedés az egyenlettel, egyenlőtlenséggel megoldható szöveges feladatokkal.

   Emelt szinten egyenlettel, egyenlőtlenséggel megoldható szöveges feladatok megoldásának gyakorlása.

Kapcsolódási lehetőségek

Műveletek, műveleti tulajdonságok

Ebben a fejezetben a racionális számok minden tanult alakjával – ha tanítottuk, akkor a normálalakkal is – célszerű műveleteket végeztetni, amihez a helyettesítési értékek meghatározása és az egyenletek megoldásának az ellenőrzése nyújt lehetőséget.

A műveleti tulajdonságok, a helyes műveleti sorrend biztos és alkalmazásra képes tudása nélkül nem lehet meghatározni a kifejezések helyettesítési értékét, elvégezni a kifejezések összevonását, szorzását, szorzatra bontását. Ezért a kifejezésekkel végzett műveletek során újra és újra tudatosítanunk kell a műveleti tulajdonságokat, a zárójelek használatáról tanultakat és a helyes műveleti sorrendet.

Hatványozás

A hatványozásról tanultakat is alkalmaznunk kell az algebrai kifejezések értelmezéséhez, helyettesítési értékük meghatározásához. A kifejezések szorzására, osztására, szorzatra bontására (jobb csoportban) olyan feladatokat is feladhatunk, amelyekben alkalmazni kell az egyenlő alapú hatványok szorzásáról, osztásáról tanultakat.

Geometria

A terület-, kerület-, felszín-, térfogatképleteket algebrai kifejezések formájában fogalmazzuk meg, ezért ezeknek a mennyiségeknek a kiszámítása lényegében algebrai kifejezés helyettesítési értékének meghatározása. A téglalap területének számítása modellként szolgál az algebrai kifejezések szorzásának, illetve szorzatra bontásának értelmezéséhez. (**Tk. 5.13., B5.11., B5.46.; Gy. 3.07., 3.13–3.16., 3.30–3.33., 3.42–3.43.; Fgy. 2.3.30.**)

Arány, arányosság, százalékszámítás

Főleg a szöveges feladatok megoldása során, az adatok közti kapcsolatok felírásakor gyakoroltathatjuk ezeket az anyagrészeket. (**Tk. 5.12., 5.26., 5.37., B5.38.; Fgy. 2.4.19., 2.5.01–22.**)

Halmazok, logika

Egyenletek, egyenlőtlenségek értelmezéséhez, megoldásához használjuk a halmazelméleti, logikai fogalmakat (alaphalmaz, igazsághalmaz, nyitott mondat stb.).

Tanmenetjavaslat

Óra	Aktuális tananyag	Feladatok
	Folyamatos ismétlés, koncentráció	
1. **1.**	*Műveleti tulajdonságok:* kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás. *Hatványok.* Alap, kitevő. Szorzat hatványalakja, hatvány szorzatalakja. Azonos alapú hatványok szorzása, osztása, hatvány hatványozása konkrét feladatokban. Műveletek a racionális számkörben. Számok normálalakja. Műveletek sorrendjének ésszerű megválasztása.	Tk. 5.01–5.02.; Gy. 1.61–1.80.; Fgy. 2.2.04–07., 2.2.17–21.
2–3. **2–3.**	*Ismerkedés az algebrai kifejezésekkel;* változó, együttható, hatvány, alap, kitevő, előjel, műveleti jel, összeg, szorzat. Fizikai, kémiai, geometriai képletek kapcsolata az algebrai kifejezésekkel. Függvények. Egyenletek.	Tk. 5.03–5.04.; Gy. 3.01–3.08.; Fgy. 2.4.09., 2.4.14–15., 2.4.19., 2.5.01–09.
4–5. **4–5.**	*Algebrai kifejezések helyettesítési értékeinek meghatározása.* Műveletek racionális számokkal. Hatványozás. Műveleti sorrend. Terület, kerület, felszín, térfogat meghatározása ismert adatok helyettesítésével.	Tk. 5.05–5.09.; Gy. 3.09–3.18.
6. **6.** (+ 1 ó.)	*Egynemű, különnemű algebrai kifejezések.* *Emelt szinten algebrai törtkifejezések* értelmezése, értelmezési tartománya, értékkészlete, helyettesítési értékük meghatározása. Törtek egyszerűsítése változókat tartalmazó kifejezéssel. Törtek egyszerűsítése, bővítése. A 0 az osztásban. Műveletek törtekkel.	Tk. 5.10–5.11.; Gy. 3.19–3.21.; Tk. B5.01–B5.03.; Fgy. 2.7.44–49.
7. **7–8.**	*Egynemű kifejezések összevonása.* Szöveges feladatok adatai közti kapcsolatok felírása algebrai kifejezéssel. Műveleti tulajdonságok. Helyettesítési értékek meghatározása. Fizikai, kémiai, geometriai képletek. *Redukált program* A tanultakat részben folyamatos ismétlésként otthoni munkában gyakoroltatjuk. *Emelt szint* Bonyolultabb, szorzást, osztást és hatványokat tartalmazó kifejezések összevonása. Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása.	Tk. 5.12–5.14.; Gy. 3.22–3.24., 3.28.; Tk. 5.15–5.19.; Gy. 3.25–3.27.; Fgy. 2.7.24–32., 2.8.01–03.

Óra	Aktuális tananyag	Feladatok
	Folyamatos ismétlés, koncentráció	
8–9. **9–10.**	*Egytagú kifejezés szorzása, osztása egytagú kifejezéssel.* Szorzat szorzása, szorzat osztása. Műveletek a racionális számok halmazán. Műveletek sorrendje, műveleti tulajdonságok. Azonos alapú hatványok szorzata, hányadosa. Szorzat, hányados hatványozása. Különböző alapú, azonos kitevőjű hatványok szorzata, hányadosa. Terület-, felszín-, térfogatszámítás.	Tk. 5.20–5.22.; Gy. 3.29–3.37.; Fgy. 2.7.33–34., 2.7.40.;
10–11. **11–12.**	*Többtagú kifejezések szorzása egytagú kifejezéssel.* Összeg, különbség szorzása, osztása. Zárójel használata. Szorzás, osztás a racionális számkörben. Terület, felszín, térfogat. Szöveges feladatok adatai, paraméterei közti összefüggések felírása többféleképpen. *Emelt szint* Olyan többtagú kifejezések szorzása egy taggal, ahol az összeg tagjai között hatványok szorzatai is előfordulnak.	Tk. 5.23–5.26.; Gy. 3.38–3.44.; Fgy. 2.7.35–41., 2.8.07–10.
– **13–14.**	*Többtagú kifejezések szorzattá alakítása.* A tankönyv bővített változatában szereplő fejezet. Együttható, változó, hatvány, alap, kitevő, hatványok felírása szorzatalakban, műveletek hatványokkal. Egynemű, különnemű kifejezések. Összeg, szorzat szorzása; többtagú kifejezések szorzása egy taggal. Területszámítás. A *redukált programban* nem tananyag. Erre az anyagrészre 8. osztályban visszatérünk, ezért időhiány miatt alapszinten is elhagyható.	Tk. B5.04–B5.09.; Gy. 3.45–3.50.; Fgy. 2.7.40–43.
– **15–16.**	*Alapszint:* A 6–14. óra anyagának gyakorlása. *Redukált program:* A tanultakat folyamatos ismétlésként otthoni munkában gyakoroltatjuk. *Emelt szint* *Többtagú kifejezés szorzása többtagú kifejezéssel.* Hatványok szorzása, osztása. Helyettesítési értékek meghatározása. Műveletek sorrendje. Területszámítás.	Tk. B5.10–B5.13.; Fgy. 2.7.50–53.
12–13. **17–18.**	*Egyenletek, egyenlőtlenségek.* Lineáris egyenletek, mérlegelv, alaphalmaz, igazsághalmaz, azonosság, azonos egyenlőtlenség. Műveletek a racionális számkörben. Zárójelhasználat, összevonás. Műveletek algebrai kifejezésekkel; helyettesítési értékek meghatározása.	Tk. 5.27–5.29.; Gy. 4.14–4.17.; Fgy. 2.8.01–11., 2.8.19.

Óra	Aktuális tananyag	Feladatok
	Folyamatos ismétlés, koncentráció	
14. **19–20.**	*Alapszint* Néhány egyszerű *törtegyütthatós egyenlet, egyenlőtlenség* megoldása. Műveletek törtekkel, törtek egyszerűsítése, bővítése. Műveletek algebrai kifejezésekkel; helyettesítési értékek meghatározása. *Redukált program:* A tanultakat folyamatos ismétlésként otthoni munkában gyakoroltatjuk. *Emelt szint* Összetettebb törtegyütthatós egyenletek, egyenlőtlenségek. Néhány nem elsőfokú egyenlet. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös. Törtek szorzása, osztása. Kiemelés, szorzattá alakítás.	Tk. 5.30–5.36.; Gy. 4.18–4.19.; Tk. B5.30–B5.37., B5.47–B5.48.; Gy. 4.20–4.21.; Fgy. 2.3.10., 2.8.01–23.
15–16. **21–23.**	*Alapszint* Néhány egyszerű, *egyenlettel, egyenlőtlenséggel megoldható szöveges feladat.* (Rajzok, ábrák, táblázatok.) Változók közti összefüggések felírása műveletekkel. *Redukált program:* A tanultakat folyamatos ismétlésként otthoni munkában gyakoroltatjuk. *Emelt szint* *Szöveges feladatok megoldása egyenlettel, egyenlőtlenséggel.* Arány, arányos osztás. Százalékszámítás. Geometriai számítások. Fizikai, kémiai feladatok.	Tk. 5.37–5.38.; Gy. 4.24.; Tk. B5.38–B5.46.; Gy. 4.25–4.34.; Fgy. 2.7.30., 2.5.01–22., 2.8.25–27.
17–18. **24–26.** (+ 2 ó.)	*Gyakorlás, fejlesztő értékelés.* A hiányosságok pótlásának megszervezése. *Redukált program* A tanultakat részben folyamatos ismétlésként otthoni munkában gyakoroltatjuk. **6. témazáró felmérés** megíratása, kijavítása.	Tk. 5.39.; B5.14–B5.49.; Fgy. 2.9.01–14.

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Műveleti tulajdonságok

Felelevenítjük az algebrai kifejezések tanításához elengedhetetlen alapismereteket.

A műveletek sorrendje és ennek a sorrendnek a zárójelezéssel való megváltoztatása sok problémát jelent a tanulók zömének. Amíg minden tanuló biztos ismeretekkel nem rendelkezik e témakörben, addig nem javasoljuk a továbbhaladást, hiszen e nélkül lehetetlen az összevonás, a kiemelés végrehajtása, a helyettesítési értékek kiszámítása, az egyenletek megoldása.

Hasonlóan fontos az előjel és a műveleti jel fogalmának pontos kialakítása. Az itt jelentkező gondot az előjel kettős funkciójából eredeztethetjük. Egyrészt a konkrét negatív számokat (például: -2; -3; $-1{,}2$ stb.), másrészt egy elem additív inverzének képzését (számok ellentettjét) jelöljük vele. További problémával találjuk szemben magunkat, ha a „–” előjel egy változó előtt áll.

Ha megkérdezzük tanulóinkat, hogy a „$-a$” értéke pozitív vagy negatív, nagy valószínűséggel a tanulók többsége negatívot mond. Példákkal és a helyettesítési értékek kiszámításával kell megmutatnunk, hogy a „$-a$” éppúgy lehet pozitív, mint negatív, vagy 0. A probléma gyökere az, hogy a változó „magában hordja” az előjelét is. (Például: $a = 5$; $a = -2$; $a = 0$.)

A hatványok tanítása sem új anyag. 5., 6. osztályban és 7. osztályban év elején értelmeztük a hatványokat, megmutattuk, mit értünk alapon, kitevőn. Ezekre az ismeretekre támaszkodva alakítjuk tovább a hatványfogalmat.

A pozitív egész kitevőjű hatványok csak kiinduló alapját képezik a hatványfogalomnak, de az a definíció, hogy a^n olyan n-tényezős szorzat, amelynek minden tényezője a, nem vihető át a 0, a negatív és a törtkitevős hatványok definiálására. 7. osztályban, *emelt szinten* értelmezhetjük a 10 nempozitív egész kitevőjű hatványait. (*Alapszinten* erre 8. osztályban kerülhet sor.)

Hívjuk fel a figyelmet arra, hogy nem helyes az a definíció, amely szerint bármely szám 0-dik hatványa 1, mert 0^0 nincs értelmezve. Sok példával kell megmutatnunk, hogy definíció szerint:

Minden 0-tól különböző szám 0-dik hatványa 1.
A 0 bármely pozitív hatványa 0.

Ismerkedés az algebrai kifejezésekkel

Az algebrai kifejezés nagyon absztrakt és sok ismeretet igénylő fogalom. *Például* a $-2x^3$ kifejezés feltételezi, hogy az *előjel,* a *műveleti jel,* az *együttható,* a *változó,* a *hatványalap, hatványkitevő* fogalmát ismerik a tanulók.

Az *együttható* fogalmának kialakítását már alsó tagozatban előkészítjük akkor, amikor azonos tagok összegét szorzat alakjában íratjuk fel a gyerekekkel. *Például:*

$2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2$ (vagy $2 \cdot 3$)

Felső tagozatban ennek egyszerű általánosítása jelenik meg, amikor

$x + x + x + x$ helyett $4 \cdot x$-et (vagy $x \cdot 4$-et) írunk.

Ebből – külön indoklás nélkül – jutunk el oda, hogy nem csak a pozitív egész számok lehetnek együtthatók: $3{,}5a$; $-\frac{1}{2}b$. Míg például a $4 \cdot x$; $5 \cdot a^3$ visszavezethetők azonos tagok összegére, addig a negatív vagy törtegyütthatós kifejezések nem.

Bőségesen legyenek az órán olyan feladatok, ahol párhuzamba állítjuk a kitevő és az együttható értelmezését. Így elkerülhetjük a következő hibákat, vagy legalábbis csökkenthetjük gyakoriságukat:

$2^3 = 6$ vagy $x^5 = 5x$

Az együttható „összegeredetének”, illetve a hatvány „szorzateredetének” hangsúlyozása hatékonyabbá teszi ez irányú munkánkat. Például:

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \neq 6 = 2 \cdot 3 = 2 + 2 + 2$

A hatványok előjelének meghatározása is sok problémát jelent a tanulóknak. Például:

$(-x)^3 = -x^3$, de $(-x)^6 \neq -x^6$

Zárójelezéssel tehetjük egyértelművé, hogy hogyan kell számolnunk.

Először a hatványozást, majd az ellentettképzést (– 1-gyel való szorzást) végezzük el:

$-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$

A zárójelben lévő kifejezésnek képezzük a hatványát, vagyis előbb képezzük a szám vagy kifejezés ellentettjét, és ezt hatványozzuk.

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

Ide kívánkozik még, hogy ebben az egyszerű kifejezésben: x, három 1-es van „elrejtve”:

$$x = \frac{1 \cdot x^1}{1}$$

Ezeknek az 1-eseknek az algebrai kifejezések egyszerűsítésénél lesz nagy jelentőségük.

A tanmenetben javasolt 2 óra kevés arra, hogy az itt felsorolt ismereteket elsajátítsák a tanulók, gondot kell fordítanunk arra, hogy ezek a témakör minden fejezeténél (sőt később egyéb fejezeteknél is) megfelelő hangsúlyt kapjanak, s folyamatos ismétlésként többször visszatérjünk rájuk.

Algebrai kifejezés helyettesítési értékének meghatározása

A későbbiek során gyakori, nagyon fontos anyagrész. Egyrészt a *számolási rutint* fejlesztjük vele, másrészt a *műveletek sorrendjét* ismételtethetjük át, s nem utolsósorban itt alapozzuk meg azt, hogy az *egyenletek ellenőrzéséhez nélkülözhetetlen* helyettesítési értékeket ki tudják számolni. Ezért a tanmenetben javasolt 2 órán túl a témakörre szánt minden órán szakítsunk időt ennek a gyakorlására.

Egynemű, különnemű algebrai kifejezések. Egynemű kifejezések összevonása

Szorosan összetartozik e két fejezet. Az egyenletek megoldásához nélkülözhetetlen ismeretek találhatók bennük. Javasoljuk, hogy addig, míg tanulóink ismerete hiányos vagy pontatlan, ne haladjunk tovább, hanem a tanmenetjavaslattól eltérően 1–2 órát még fordítsunk ezen anyagrész megtanítására, vagy korrepetáláson pótoljuk a hiányosságokat. A jobb képességű tanulóktól többtényezős, hatványokat is tartalmazó kifejezések összevonását is elvárhatjuk, míg a gyengébbeknél megelégedhetünk az olyan típusúakkal, amelyek a lineáris egyenletek megoldásához szükségesek.

Algebrai egész és törtkifejezések

Emelt szint

Tudatosítanunk kell, hogy az algebrai kifejezések értelmezési tartományának meghatározásánál – a 0-val való osztás értelmetlen volta miatt – ki kell zárnunk azokat az értékeket, amelyekre a nevező helyettesítési értéke 0. (**Tk. B5.02–B5.03.; Fgy. 2.7.44.**)

Ezeknek az ismereteknek a függvények értelmezési tartományának meghatározásakor és az egyenletek megoldásakor vesszük majd hasznát.

Egytagú kifejezés szorzása, osztása egytagú kifejezéssel

Az *egytagú, többtagú* kifejezés definiálása nehézkes. A pontos, de bonyolult – s a tanulók számára nehezen elsajátítható – definíció adása helyett *megfelelő példákkal mutassuk meg, hogy mi a különbség az egytagú, illetve a többtagú algebrai kifejezés között.* Ugyanis nem mondhatjuk, hogy az egytagú algebrai kifejezésben csak szorzás vagy csak osztás szerepel, és összeadás, kivonás nem, mert ez így nem igaz. Például: az $5(x+y)$ kifejezés egytagú (amelynek az egyik tényezője kéttagú), de az ebből kapható $5x + 5y$ kifejezés már nem egytagú. A tankönyvben nem definiáljuk ezeket a fogalmakat. Megfelelő példák sokaságával alakítsuk ki a tanulókban azokat.

Az egytagú kifejezések szorzásának, osztásának tanításánál fontos e *műveletek algoritmusának* elsajátítása. Nevezetesen: először szorozzuk (osztjuk) az együtthatókat, majd elvégezzük a változókkal a kijelölt műveletet. Azt is fontos tisztáznunk, hogy csak azonos alapú hatványok szorzatát tudjuk „egyszerűbben” felírni, más esetben csak kijelöljük a változók szorzatát (hányadosát). Például: $2xy \cdot 3x^2 = 6 \cdot x^3 \cdot y$.

Felhívjuk a figyelmet a differenciálás szükségességére és lehetőségeire. *Alapszinten, minimumkövetelményként* megelégedhetünk olyan kifejezések szorzásával, osztásával, amelyeket az egyszerűbb egyenletek megoldásánál alkalmaznunk kell (például: legfeljebb elsőfokú egytényezős kifejezés szorzása), míg az *emelt szinten* tanulók esetén a többtényezős, a hatványozás azonosságainak ismeretét is megkívánó kifejezések szorzását, osztását is elvárhatjuk.

Ennek az anyagrésznek az ismerete nélkülözhetetlen a későbbi fejezetek tanításához (például többtagú kifejezés szorzása egytagúval), így javasoljuk, hogy addig ne haladjunk tovább, míg a szükséges ismeretek birtokában nincsenek a tanulók.

Többtagú kifejezések szorzása egytagú kifejezéssel

Javasoljuk a területmodellek felhasználását ezen anyagrész tanításakor. Így érthetőbb, maradandóbb, s a gyengébb tanulók számára is követhetőbb a zárójelbontás.

Az egyenletek megoldásához nélkülözhetetlen ismeret, fontos az alapos begyakorlása. Ha a tanmenetben javasolt két óra kevés erre, akkor a fejezet végére tervezett gyakorlóórákon túlmenően a folyamatos ismétlés során is szánjunk időt erre az anyagrészre.

Többtagú kifejezés szorzattá alakítása kiemeléssel

Az előző fejezettel szinkronban tanítandó. A zárójelbontás „szabályát” már megismerték a tanulók, tehát ha egy összeget szorzattá alakíttatunk, akkor rögtön ellenőriztetjük az eredmény helyességét. A területmodell alkalmazását itt is javasoljuk.

Szükséges differenciálnunk: A tankönyv, a gyakorló és a feladatgyűjtemény feladatai lehetővé teszik, hogy a középiskolába készülők számára a tanulók szintjének megfelelő feladatokat válogathassunk, míg a többiek számára megelégedhetünk olyan feladatokkal, amelyek az egyszerűbb egyenletek megoldásához szükségesek.

A *redukált programban* nem foglalkozunk ezzel az anyagrésszel.

Többtagú kifejezés szorzása többtagú kifejezéssel

Emelt szint

Csak a középiskolában továbbtanulóknak javasoljuk feldolgozását. A többieknek a korábbi három fejezet anyagának gyakorlását ajánljuk. A területmodell segítségével a tankönyv ábrájáról leolvasható a művelet eredménye.

Egyenletek, egyenlőtlenségek

Olyan nyitott mondatként definiáljuk az egyenletet, amelyben *algebrai kifejezéseket az egyenlőség jelével kapcsolunk össze.* Ez nem mond ellent a korábbi definíciónak, de így matematikailag jobban kezelhető, hiszen az egyenletek megoldása során a két oldalon álló algebrai kifejezéseken azonos, illetve ekvivalens átalakításokat végzünk. A megoldási módok között olyan eljárások is előfordulnak, amelyek nem sorolhatók a mérlegelvvel, a lebontogatással, a próbálgatással való megoldás egyikébe sem, hanem az algebrai kifejezések átalakítása útján oldjuk meg (például az $x^2 - 9x = 0$ egyenlet $x(x-9) = 0$ egyenletté alakítható, ami után a szorzat 0 voltát vizsgáljuk). Más esetben a grafikus megoldást alkalmazzuk.

Minden tankönyvi fejezetben megtalálhatjuk az egyenleteket. Ebben a fejezetben az eddig felhalmozódott ismereteket gyűjtöttük össze, rendszereztük azokat, s alkalmaztuk a matematika egyéb témáinál. Az algebrai kifejezéseknél tanult minden ismeret gyakoroltatható itt, sőt a megoldásoknál nélkülözhetetlenek ezek az ismeretek. Az ellenőrzést minden megoldás után követeljük meg a tanulóktól!

Törtegyütthatós egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása

A tankönyvben található algoritmus lépéseit célszerű begyakoroltatni, mert így több hibát előzhetünk meg. Ki kell emelni, s a tanulókban tudatosítani a törtvonal „zárójel funkcióját”, s kezdetben a legkisebb közös többszörössel való beszorzás után célszerű mindig zárójelet használni.

Szöveges feladatok megoldása egyenlettel, egyenlőtlenséggel

A szöveges feladatok gazdag választékában az eddig tanult anyagrészek majdnem mindegyike megtalálható. (Geometriai számítások, arány, százalék, számelmélet, sorozatok, kombinatorika stb.) Ez egyrészt lehetőséget teremt a folyamatos ismétlésre, másrészt meg tudjuk mutatni a matematikai fogalmak közti sokrétű kapcsolatrendszert. A szöveges feladatok módszeres megoldását mindenképpen javasoljuk, még akkor is, ha időigényes, mert ezáltal a munka megtervezésére, rendszerességre, alaposságra, önellenőrzésre szoktatjuk a tanulókat, s fejlesztjük bizonyítási igényüket és ítélőképességüket. Rajz, táblázat, grafikon készítését is szorgalmazzuk, mert ezzel tudjuk az elemző és adatok közti kapcsolatfeltáró munkát megkönnyíteni.

Az egyenlettel való megoldás mellett buzdítani kell a tanulókat az egyenlet nélküli, következtetéssel való megoldásokra is.

Tudáspróba

A korábbi fejezetekhez hasonlóan itt is csak mintául szolgál a feladatsor. Segítséget ad a témazáró mérőlap tervezéséhez. Változtatás nélküli megíratását nem javasoljuk, mert így téves információt kapunk a tanulók tudásszintjéről.

Gyakorlófeladatok

Differenciálásra, gyakorlásra, ismétlésre szolgáló feladatok. A feladatok nagy száma nem teszi lehetővé, hogy minden feladatot megoldassunk. A tanulók igényének megfelelően felzárkóztatásra, tehetséggondozásra válogassunk a feladatok közül.

Ebben a fejezetben – főleg a jobb képességű tanulóknak – kiemeléssel szorzat formájában felírható másodfokú egyenleteket találunk, mintegy érzékeltetve a kiemelés gyakorlati hasznát.

6. A háromszögekről és a négyszögekről tanultak rendszerezése

A háromszög, négyszög oldalairól és szögeiről a legfontosabb összefüggéseket már 6. osztályban tárgyaltuk. Ezeket most újra részletezzük, kiegészítjük. Míg 6. osztályban elsősorban a tapasztalatra, szemléletre alapoztuk a megállapításokat, addig most a középpontos tükrözésről, eltolásról, a párhuzamos szögpárokról tanultakat alkalmazva egyes összefüggéseket *bizonyítunk* is. A tananyag spirális felépülése ezt lehetővé és szükségessé is teszi. A spirális építkezés azt is biztosítja, hogy optimálisan igazodjunk egy-egy osztályon belül a gyerekek tudásszintjéhez, gondolkodási képességéhez.

A tananyag-feldolgozás mélységének, formájának és a feladatok szintjének megválasztásával tekintettel lehetünk például arra, hogy

- milyen a gyerekek 6. osztályból hozott tudása;
- milyen a gondolkodási, illetve a feladatmegoldó képességük szintje;
- milyen az osztály polarizáltsága; előreláthatólag mekkora részük megy gimnáziumba, szakközépiskolába, szakiskolába;
- a tanítási órákon milyen munkaformák alakultak ki az előző években;
- mennyire biztosak a többi témakör követelményeiben.

Mindezek figyelembevételével az adott tanulócsoport számára optimálisan megválaszthatjuk a tananyag mennyiségét, a feldolgozás mélységét, és kiválaszthatjuk a megfelelő módszert. Az érthetőség, áttekinthetőség kedvéért ezt a differenciálást három szinten fogalmazzuk meg.

Alapszint: A tulajdonságokat (vagy azok egy részét) az egybevágósági transzformációk alkalmazásával bizonyítjuk. Ezzel nemcsak az így szerzett ismeretek maradandóbbá tételét, hanem a gondolkodási képességük fejlesztését is jobban szolgálhatjuk.

Heti 4 matematikaóra mellett legalább 14 órában foglalkozzunk ezzel az anyagrésszel.

Intenzívebbé tehetjük a munkánkat, ha e fejezet feldolgozását összekötjük a geometriai tananyag év végi rendszerező összefoglalásával (**B7.01–B7.07., 7.68–7.78.** feladat).

Emelt szint: A szerkesztési feladatok megoldása során rendszeresen megvizsgáljuk, hogy a felsorolt adatokkal miért van, illetve miért nincs megoldás, miért van csak egy, illetve több megoldás. Esetleg többféleképpen is bizonyítjuk az összefüggéseket. Néhol tartalmilag is túllépjük az alapszintű tananyagot. Ehhez nyújt segítséget a tankönyv bővített változata, amely mintegy két és félszer akkora terjedelemben (267–316. oldal) dolgozza fel ezt az anyagrészt, mint az alapszintű változat (A 205–A 226. oldal). A tananyag-feldolgozás című rész (lásd később) további konkrét javaslatokat is tartalmaz.

Ha a többi témakör megengedi, akkor a tananyag feldolgozására, a szép szerkesztési és bizonyítási feladatok megoldására fordítsunk 4–5 órával többet, mint alapszinten.

Redukált program: Ha heti 3 matematikaóra van, akkor a fogalmaknak az elmélyítésére, a geometriai gondolkodás absztraktabb szintre emelésére nincs lehetőségünk. Elsősorban ismétlés jellegűen rendszerezzük a háromszögek, négyszögek tulajdonságait, kiegészítve az egybevágósági eseteken alapuló szerkesztésekkel (a NAT és a Kerettanterv is előírja) és az egybevágósági transzformációkról tanultak felelevenítésével.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. Összegyűjtjük, kiegészítjük, rendszerezzük azokat a tapasztalatokat, ismereteket, amelyeket az előző években (és ebben az évben) a gyerekek a háromszögekről, négyszögekről tanultak.

   A tulajdonságok vizsgálata során szükségszerűen felelevenítjük a korábban tanult geometriai fogalmakat (például a tengelyes, illetve a középpontos tükrözést és szimmetriát).

2. Az ismeretszerzés, -bővítés, -kiegészítés módja (a redukált óraszámban tanulók kivételével) most már nem csak tapasztalatszerzésre épül. Eljutunk a bizonyításig is, persze csak képességüknek és az időkeretnek megfelelő szinten. Különbséget teszünk az alakzatok meghatározó tulajdonságai és egyéb jellemzői között.

   A középiskolába készülő és a már középiskolás tanulóinknak ezt a lépést föltétlenül meg kell tenniük. Fokozatosan el kell jutniuk az általános iskolában megszokott, a szemléleten alapuló induktív ismeretszerzés szintjéről a középiskolákban elvárt deduktív tárgyalásmódig (definíció, tétel, bizonyítás).

3. A szerkesztési feladatok megoldása során most is hangsúlyozzuk azokat a lépéseket, amelyek segítik a fegyelmezett gondolkodás, a pontosság alakulását. Ezek:

   Értelmezd a feladatot!

   Keress összefüggéseket!

   Tervezd meg a szerkesztés lépéseit!

   Végezd el a szerkesztést!
   Legyünk igényesek a szerkesztések szépségére, pontosságára, törekedjünk arra, hogy a tanulók is örömüket leljék az érthető, áttekinthető, esztétikus munkában.

   Ellenőrizd a megoldást!
   Továbbra is tudatosan fejlesztjük a gyerekek kifejezőképességét (anyanyelv és szaknyelv) a meghatározások, következtetések, bizonyítások megfogalmaztatásával. Megköveteljük a terminológia és a jelölések helyes használatát.

   Keress újabb összefüggéseket és más megoldást! Vizsgáld meg a megoldhatóság feltételeit és a megoldások számát!
   Kérdezhetjük például: Miért van, illetve miért nincs megoldás? Miért van több megoldás? Melyik feltételt hogyan kellene változtatni, hogy változzon a megoldások száma?
   Az ilyen diszkusszió szinte minden szerkesztési feladatnak fontos és hasznos lépése lehet.

4. Mivel a háromszögek, négyszögek területének kiszámítását a 2. fejezet tartalmazza, itt lehetőség nyílik a megszerkesztett alakzatok területének (kerületének) kiszámítására, így a korábban tanultak folyamatos ismétlésére, bővítésére. Ehhez kapcsolhatjuk a hasáb térfogat- és felszínszámításának az ismétlését.

Kapcsolódási lehetőségek

Halmazok, logika

Háromszögek, négyszögek csoportosítása, rendszerezése; a háromszögek, négyszögek halmazából részhalmazok kiválasztása adott tulajdonság alapján. Egy-egy halmazról, alakzatról mondott állítások igazságának eldöntése (**Tk. 6.21–6.22., 6.35–6.36., 6.39.** feladat).

Emelt szinten állítások tagadása, megfordítása (**Tk. B6.24–B6.25.** feladat).

Számtan, algebra

Alakzatok a derékszögű koordináta-rendszerben (**Tk. 6.27–6.28., B6.63–B6.64.** feladat).

A geometriai számításokban gyakoroljuk a racionális számokkal végzett műveleteket, feleleveníthetjük az arány, az egyenes és fordított arányosság fogalmát, egyenlettel megoldható szöveges feladatokat oldathatunk meg. Ilyenek például:

a háromszögek, négyszögek belső szögeivel kapcsolatos számítások (**Tk. 6.09–6.16., B6.01–B6.09., B6.11–B6.13., B6.15., 6.26., 6.38., 6.40–6.41., B6.61., B6.74–B6.75.** feladat);

a kerület-, terület-, felszín- és térfogatszámítással kapcsolatos feladatok (**Tk. 6.08., B6.10., B6.18., 6.31–6.34., B6.26–B6.40., B6.56., B6.66., B6.77–B6.85.** feladat).

A képletek alkalmazásakor a képletek mint algebrai kifejezések helyettesítési értékét számítjuk, miközben figyelembe kell venni a műveletek sorrendjét, a műveleti azonosságokat, a zárójelezést és a számítások lehetséges egyszerűsítését.

Függvények

A területképlet mint függvény. Hogyan változik a képlet számértéke, ha változnak az adatok? Hogyan kell változtatni az adatokat, hogy a számérték ne változzék?

Kombinatorika

Szerkesztési feladatokban minél több megoldás, illetve az összes megoldás megkeresése (**Tk 6.02., 6.04–6.06.** feladat).

A geometria egyéb fejezetei

Lényegében átismételhetjük és rendszerezhetjük a teljes geometria-tananyagot.

Alapszerkesztések. Nevezetes szögek szerkesztése.

Területszámítás. A terület mértékegységeinek átváltása. A hasáb térfogata (lásd fent).

Egybevágósági transzformációk; szimmetriák (**Tk. 6.21., 6.27–6.30., 6.35.** feladat).

Tanmenetjavaslat

<table>
<tr><th>Óra</th><th>Aktuális tananyag

Folyamatos ismétlés, koncentráció</th><th>Feladatok</th></tr>
<tr><td>1–2.
1–2.</td><td>Háromszögek. Elnevezések, jelölések, a háromszög magassága. Háromszögek csoportosítása oldalai és szögei szerint. Háromszög-egyenlőtlenség. A belső, illetve a külső szögek összege.
A belső és a külső szögek közti kapcsolat.
Emelt szint
Kapcsolat a szögek és az oldalak közt.
Egybevágósági transzformációk.
Szög, szögmérés, szögpárok.
A háromszög kerülete és területe.
Arány, arányos osztás. Egyenlet, egyenlőtlenség.
Halmaz, részhalmaz. Osztályozás. Kombinatorika.</td><td>Tk. 6.01–6.16.;
B6.01–B6.13.;
Gy. 7.33–7.43.;

Tk. B6.14–B6.15.;
Fgy. 2.8.30.,
4.1.17–19., 4.1.31.</td></tr>
<tr><td>3–4.
3–4.</td><td>Háromszögek szerkesztése. Az egyértelmű szerkeszthetőség feltételei. Speciális háromszögek egyértelmű szerkeszthetőségének feltételei.
A háromszögek egybevágóságának alapesetei.
Jobb csoportnak: Az alapeseteken túlmenő szerkesztések és bizonyítások.
Tengelyes tükrözés. Szög, szögmérés, szögmásolás, szögek szerkesztése. A háromszög kerülete és területe. Arány, arányos osztás. Egyenlet, egyenlőtlenség. Kombinatorika.</td><td>Tk. 6.17–6.20.;
Gy. 7.44–7.49.;

Tk. B6.16–B6.22.;
Gy. 7.50.;
Fgy. 4.1.21–26.,
4.1.28.</td></tr>
<tr><td>5.
5–6.

(+ 1 ó.)</td><td>A négyszögekről tanultak rendszerezése. Osztályozásuk különböző szempontok szerint (tengelyesen szimmetrikus, középpontosan szimmetrikus négyszögek).
A négyszögek belső szögeinek összege.
Halmaz, halmazábrák készítése, elemzése.
Logika: „minden”, „van…”, „ha …, akkor…”, „pontosan akkor …, ha …”.
Tengelyes, középpontos és forgásszimmetria.
Redukált program: A korábban tanultak áttekintése.
Emelt szint
Négyszögek vizsgálata.
Állítás –</td><td>Tk. 6.21–6.23.;
Gy. 7.51–7.65.;

Tk. B6.23–B6.25.;
Fgy. 1.1.10–13.</td></tr>
</table>

Óra	Aktuális tananyag Folyamatos ismétlés, koncentráció	Feladatok
6–7. **7–9.**	*A paralelogramma* származtatása, meghatározása (többféleképpen), tulajdonságai. Csoportosításuk különböző szempontok szerint. *Speciális paralelogrammák* tulajdonságainak vizsgálata.	Tk. 6.26–6.30.;
	Paralelogrammák szerkesztése. Mit értünk A négyszög szögeinek összege. A háromszög szerkesztésének alapesetei. Tengelyes és középpontos tükrözés. A paralelogramma kerülete és területe. Derékszögű koordináta-rendszer.	Tk. 6.31–6.38.; Gy. 5.14.;
	Emelt szint Összetettebb szerkesztések és bizonyítások.	Tk. B6.26–B6.36.; Fgy. 4.1.24–25.
	Redukált program: A korábban tanultak áttekintése.	
8. **10–11.**	*Trapéz.* A trapéz meghatározása, elnevezések. Speciális trapézok: húrtrapéz, paralelogramma, derékszögű trapéz. *A trapéz szerkesztése.* Halmaz, részhalmaz. Logika. Tengelyes és középpontos tükrözés; szimmetria. Szög, szögmérés, szögek szerkesztése, szögpárok. Háromszögek szerkesztése. Terület-, felszín- és térfogatszámítás. Koordináta-rendszer.	Tk. 6.39–6.41.; Gy. 5.37.;
(+ 2 ó.)	*Emelt szint*, illetve *jobb csoportnak* A trapéz területképletének levezetése többféleképpen. Összetettebb szerkesztések és bizonyítások.	Tk. B6.37–B6.40., B6.41–B6.47.; Gy. 5.34–5.41.; Fgy. 4.1.33., 2.8.31., 4.1.26.
	Redukált program: A korábban tanultak áttekintése.	
9–11. **12–14.**	*Összefoglalás.* Tudáspróba, a hiányosságok pótlásának megszervezése. *Gyakorlófeladatok:* egyszerű szerkesztési és bizonyítási feladatok; kerület-, terület-, felszín- és térfogatszámítás.	Tk. 6.42., B6.48–B6.86.; Gy. 7.25–7.69., 5.61–5.92.; Fgy. 4.1.01–07., 4.1.28–29., 4.4.02., 4.4.09–12.;
(+ 4 ó.)	*A geometria-tananyag év végi összefoglalása, rendszerezése.*	Tk. 7.52–7.78., B7.01–B7.07.; Gy. 5.49–5.92., 6.01–6.31., 7.25–7.69.; Fgy. 4.2.01–28.
(+ 2 ó.)	**7. témazáró felmérés** megíratása, kijavítása.	

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Háromszögek

A középiskolába készülő tanulók számára utalhatunk az 5. osztályos matematikakönyvben található (részletezőbb) meghatározásra: A háromszög három oldala záródó töröttvonalat (háromszögvonalat) alkot, és a háromszög a síknak az a része, amelyik ezen a töröttvonalon belül van.

A háromszög tulajdonságainak vizsgálata lehetőséget ad:

az eddigi tapasztalatok, ismeretek rendszerezésére;

az ismeretek rövid, szabatos megfogalmazására;

a bizonyítás mint (deduktív) ismeretszerzési módszer megismerésére, alkalmazására, a bizonyítási igény és a logikus gondolkodás fejlesztésére;

egyéb geometriai alapismeretek, alapszerkesztések felelevenítésére;

a halmazszemlélet, kombinatorikus szemlélet fejlesztésére.

Ha a körülmények (osztálylétszám, óraszám, a tanulók tudása, érdeklődése) megengedik, a tananyag feldolgozását kombinatorikus problémával kezdhetjük. Például:

Hány egyenest határozhat meg 1 pont, 2 pont, 3 pont stb.? Ha azt is kikötjük, hogy 3 vagy annál több pont esetében egyik három sem esik egy egyenesbe, akkor a feladat a kombinatorika nyelvén megfogalmazva így szól: Adott n számú elemből hányféleképpen választható ki kettő? Megjegyezhetjük, hogy *alaptételnek* tekintjük a következőt: két ponton át pontosan egy egyenes húzható.

A **Tk. 6.02.** feladatban is hasonló kombinatorikus gondolat van. Ha a lehető legtöbb metszéspont számát kérjük, akkor szintén n elem másodosztályú kombinációinak számát keressük. A feladat bővíthető az egyenesek számának növelésével. A legjobbak valószínűleg észreveszik, hogy n egyenes maximális metszéspontjának a száma: $\dfrac{n(n-1)}{2}$

A lehető legtöbb metszéspont esetében keletkezik a legtöbb síkrész. Ha az egyenesek száma n, akkor a síkrészek száma $(n+1)$-gyel több a metszéspontok számánál:

$$\frac{n(n-1)}{2}+n+1=\frac{n^2-n+2n}{2}+1=\frac{n(n+1)}{2}+1$$

A kapott síkrészek számával kapcsolatban megkérdezhetjük, hogy közülük hány korlátos, és a korlátosak milyen sokszögek. Ebből a gondolatmenetből is adódhat a háromszög tankönyvben leírt meghatározása.

A háromszög magasságával ebben a tanévben a területszámítással kapcsolatban is foglalkoztunk. Itt most csak felelevenítjük. Érdemes most is megemlíteni az oldal és oldalegyenes, a magasság és a magasságegyenes közötti kapcsolatot, illetve különbözőséget.

A háromszög tulajdonságainak összegyűjtése alkalmas a *bizonyítás* mint ismeretszerzési módszer megismertetésére, alkalmazására. A bizonyítás során a meghatározó tulajdonságot, az ismert alaptételeket (axiómákat) és a már eddig bizonyított tételeket felhasználva újabb összefüggéshez jutunk.

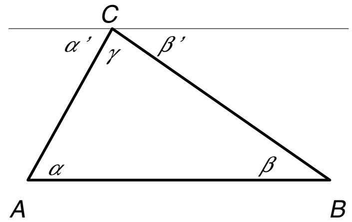
A háromszög-egyenlőtlenség tétele a háromszög meghatározásával és azzal az axiómával igazolható, hogy két pont távolsága (a köztük lévő legrövidebb út) a pontokat összekötő szakasz.

A háromszög szögei közti kapcsolatok közül a tankönyvben először a külső szög és a nem mellette lévő két belső szög összegének egyenlőségét bizonyítjuk, majd ezt a bizonyított tételt használjuk fel a belső szögek összegéről szóló tétel bizonyítására. A két bizonyítás sorrendje meg is fordítható. Először a belső szögek összegét bizonyítjuk, és ezt a tételt használjuk fel a külső szög tulajdonságának igazolására. *Például:*

Tétel

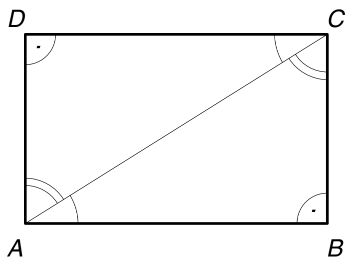
Bármely háromszög belső szögeinek összege $180°$.

Bizonyítás:
Jelölje az *ABC* háromszög belső szögeit α, β, γ.
A háromszög *C* csúcsán át az *AB* oldallal párhuzamost húzunk. A γ szög mellett két másik szög keletkezett. Ezek közül az α' az α-nak, a β' a β-nak váltószöge, tehát $\alpha = \alpha'$ és $\beta = \beta'$.



Mivel $\alpha' + \gamma + \beta' = 180°$, az előbbiek miatt
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Egy másik *bizonyítás* lehet a következő:
Tekintsük bizonyítottnak, hogy bármely téglalap két egybevágó derékszögű háromszögre bontható.



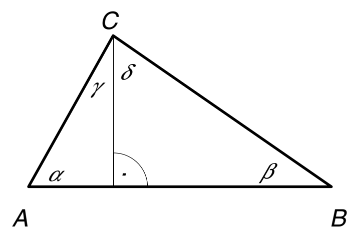
ABC△ ≅ *CDA*△;

ACB∢ = *CAD*∢;

CAD∢ + *CAB*∢ = 90°,

ACB∢ + *ACB*∢ = 90°.
Ezért a derékszögű háromszög két hegyesszögének összege $90°$.

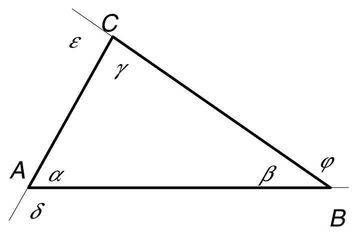
Az *ABC*△-ben a *C* csúcsból merőlegest húzunk az *AB* oldalra, két derékszögű háromszöget kapunk. A két derékszögű háromszög két-két hegyesszögének összege éppen az *ABC*△ belső szögeinek összegével egyenlő, ami az előzőek alapján $(90° + 90° =)\ 180°$.



Ha először a háromszög belső szögeinek összegéről szóló tételt bizonyítjuk, akkor ezzel a külső és belső szögek kapcsolatának az igazolása így történhet:

$\alpha + \delta = 180°$ és $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, ezért $\delta = \beta + \gamma$.

A háromszög oldalai és szögei közti kapcsolattal a tankönyv bővített változata foglalkozik.



Sokszor kell hangsúlyoznunk, hogy egy tételt csak azzal a tétellel bizonyíthatunk, amelyet alaptételnek fogadunk el, vagy amelyet már előzőleg bizonyítottunk.

A háromszög megszerkesztése

A bevezetést szolgáló **Tk. 6.18.** feladat, valamint az **1.** példa megoldása során foglalkozzunk a következő gondolatokkal:

A megadott adatok függetlenek-e egymástól?

Teljesülnek-e azok az összefüggések, amelyeket a háromszög oldalairól és szögeiről tanultunk?

Ha teljesülnek a feltételek, akkor egyértelműen megszerkeszthetők a háromszögek?

A szerkesztési feladatok megoldása során hívjuk fel a gyerekek figyelmét a megoldás lépéseire (bővített változat **7**. példa).

Az „egyértelműen megszerkeszthető” kifejezés jelentése köti össze a háromszögszerkesztés alapeseteit és az egybevágóság alapeseteit. Az egybevágóság alapeseteit sokszor felhasználhatjuk egyéb bizonyítások felépítésében is, ezért ezeket az ismereteket jól gyakoroltassuk be.

A derékszögű és egyenlő szárú háromszögek szerkesztését a 6. osztályban részletesen tárgyaltuk. Most azt hangsúlyozzuk, hogy ezek szerkesztése is 3 adatból történik, de az adatok közül egyet vagy kettőt már ismerünk.

A szerkesztési feladatok megoldása sok gyereknek még magasabb évfolyamokon is gondot jelent. *Minimumszinten* nem léphetünk túl a háromszögszerkesztés alapesetein. Ezért javasoljuk, hogy ebben a témakörben gondosan mérlegeljük a differenciálás lehetőségeit.

Négyszögek

Sokféleképpen osztályozzuk a négyszögeket, felhasználva az előzőleg megismert tulajdonságokat. Több oldalról akarjuk megközelíteni azokat a tulajdonságokat, amelyekkel egyértelműen meghatározhatók a speciális négyszögek. Nem minden tanulótól várhatjuk el a meghatározó és nem meghatározó tulajdonságok közötti különbség felismerését. De ha többször is találkoznak az összehasonlítással, megkönnyíthetjük a középiskolai ismeretek befogadását.

Ha az osztály szintje megengedi, akkor például a **Tk. 6.21.** feladat továbbfejlesztésével a logikai ismereteket erősíthetjük. Az adott alaphalmazból a **B,** az **F** és az **I** állításokkal ugyanazok a négyszögek választódnak ki. De ezekkel az állításokkal bármilyen más négyszögek halmazából válogatva ugyanaz lenne az igazsághalmaz. Ezért ezek az állítások egymással helyettesíthetők.

Felhívjuk a figyelmet a **Gy. 7.64.** feladatra. Ebben áttekintjük és elemezzük, hogy egyes négyszögek hány adatból szerkeszthetők meg.

Négyszögek vizsgálata

Emelt szint

A bővített változatban a 289–290. oldalon található két példa és a **Tk. B6.25.** feladat nem csak a négyszögek további vizsgálatával foglalkozik. Ha az egybevágósági transzformációk tanulásakor már vizsgáltuk a négyszögek szimmetriáját, akkor itt a fő cél a logikai ismeretek alkalmazása: az állítás megfordításának értelmezése, igazságértékének megállapítása.

A paralelogramma származtatása, tulajdonságai

A tankönyvben a paralelogrammát a szemközti oldalak párhuzamosságával határozzuk meg. A **Tk. 6.21.** feladattal kapcsolatban már korábban is felismerhették a tanulók, hogy a szemközti oldalak egyenlősége és a középpontos szimmetria is alkalmas tulajdonság a paralelogrammáknak a négyszögek közüli kiválasztására. A paralelogrammát a két tulajdonság közül bármelyikkel meghatározhatjuk.

Emelt szinten tanulók számára megmutathatjuk, hogy bármelyik *meghatározó tulajdonsággal* bizonyítható a többi tulajdonság. Csak arra kell vigyáznunk, hogy a bizonyításnál alkalmazott állításokat alaptételnek (axiómának) fogadjuk el vagy már bizonyított tételek legyenek. Például a felsorolt paralelogramma-tulajdonságok közül az elsőből következik a második.

A paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak, ezért a szemközti oldalai egyenlők.

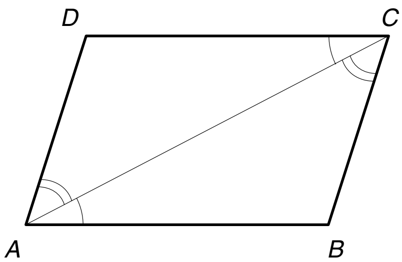
Bizonyítás

Bizonyított állításnak, tételnek fogadjuk el a következőket:

Két háromszög egybevágó, ha egy oldalban és a rajta fekvő két szögben megegyezik.

Ha két egyenlő szög egy-egy szára párhuzamos, akkor a másik pár szár is párhuzamos. A két szög vagy egyállású, vagy fordított állású (csúcsszögek, váltószögek).

Húzzuk meg az *ABCD* paralelogramma *AC* átlóját!



1. A kapott két háromszögben az azonos körívvel jelölt szögek egyenlők, mert megfelelő száraik párhuzamosak (váltószögek). A két háromszög az *AC* oldalban megegyezik.
2. Az *ABC* és *CDA* háromszögek egybevágók. Ebből következik, hogy a megfelelő oldalak egyenlők; $AB = DC$ és $BC = AD$.

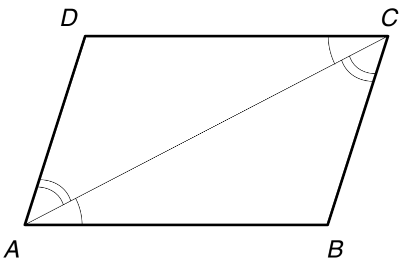
Tehát a paralelogramma szemközti oldalai egyenlők.

A most bizonyított állítás megfordítható.

A paralelogramma szemközti oldalai egyenlők, ezért a szemközti oldalak párhuzamosak.

A bizonyítás lépéseinek sorrendje éppen fordítottja az első bizonyítás lépéseinek.

1. Ha a négyszög szemközti oldalai egyenlők, akkor az ABC háromszög egybevágó a CDA háromszöggel.
2. Az egybevágóság miatt az azonos körívvel jelölt szögek egyenlők. Egyik pár száruk egy egyenesbe esik, ezért váltószögek, a másik pár száruk párhuzamos.



Tehát a paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak.

Ha a paralelogrammát a középpontos szimmetriával határozzuk meg, akkor a középpontos szimmetria tulajdonságait bizonyítottnak tekintve, a többi 6 tulajdonság egyetlen lépéssel igazolható.

Speciális paralelogrammák

A *téglalapot* leggyakrabban úgy határozzuk meg, hogy *egyenlő szögű* paralelogramma. Az „egyenlő szögű” tulajdonsággal bármilyen négyszögek halmazából is téglalapok választódnak ki. (Lásd **Tk. 6.22.** feladat **G** állítása.)

Emelt szinten ez a témakör is alkalmas arra, hogy a középiskolába készülő, illetve középiskolai tagozatra járó tanulók ismerkedjenek a „szükséges”, az „elégséges” és a „szükséges és elégséges” feltételek fogalmával.

Az egyenlő szögű négyszög biztos, hogy paralelogramma, hiszen a szomszédos szögek összege 180°, társszögek, ezért a szemközti oldalak párhuzamosak. Úgy is mondhatjuk, hogy az „egyenlő szögű” tulajdonság *elégséges, de nem szükséges* feltétele annak, hogy a négyszög *szemközti oldalai párhuzamosak* legyenek, hiszen van nem egyenlő szögű paralelogramma is. A szemközti oldalak párhuzamossága *szükséges, de nem elégséges* feltétele annak, hogy a négyszög egyenlő szögű legyen.

A téglalap átlói felezik egymást, mert paralelogramma, egyenlők, mivel egymás tükörképei. Ezért a téglalap köré kör húzható. Minden derékszögű paralelogramma körbe írható. Minden körbe írható paralelogramma derékszögű. A paralelogrammák halmazában a körbe írhatóság *szükséges és elégséges* feltétele a derékszögűség, a derékszögűségnek szükséges és elégséges feltétele a körbe írhatóság.

A *rombusz* leggyakoribb meghatározása: egyenlő oldalú paralelogramma. Elég lenne csak azt mondani, hogy olyan paralelogramma, amelynek két szomszédos oldala egyenlő. Az „egyenlő oldalú” tulajdonsággal nemcsak a paralelogrammák közül, hanem bármilyen négyszögek közül is pontosan a rombuszok választódnak ki.

A paralelogrammák közüli kiválasztás a következő tulajdonságokkal is történhet:

Átlói a paralelogramma szögeit felezik.
Szimmetrikus az átlóira.

A felsorolt tulajdonságok bármelyikével bizonyítani lehet a többit. A téglalaphoz hasonlóan vizsgálhatjuk a rombusz két-két tulajdonságát abból a szempontból is, hogy azok közül az egyik *szükséges* vagy *elégséges*, vagy *szükséges és elégséges* feltétele a másiknak.

Például:

Szükséges, de nem elégséges feltétel:

Az átlók felezik egymást.
A szemközti szögek egyenlők.

Elégséges, de nem szükséges feltétel:

Négy szimmetriatengelye van.
90°-os elforgatással önmagával fedésbe hozható.

Szükséges és elégséges feltétel:

Mindkét átlójára szimmetrikus.
Az átlók felezik a szemközti szögeket.

A paralelogramma szerkesztése

Milyen mélységben, mennyiségben foglalkozunk a paralelogramma szerkesztésével, függ attól is, hogy a tanulók kellően begyakorolták-e a háromszögszerkesztés alapeseteit, és ismerik a paralelogramma-tulajdonságok közötti összefüggéseket. Ha mindkét elvárásnak megfelelnek, akkor a paralelogramma szerkesztése nem új anyag, hanem az előzőek alkalmazása. Ez az oka annak, hogy a tankönyvben csak két példát mutatunk be. Bevésésként egy-egy megszerkesztett paralelogrammán elemezzük a tulajdonságokat, a gyerekek szerezzenek jártasságot az összefüggések leírásában, elmondásában.

Redukált program

Az osztály képességeinek figyelembevételével annyit és olyan mélységben tanítunk meg ebből az anyagrészből, amennyire idő jut.

Emelt szint

Egyrészt túllépünk a háromszög tanult alapszerkesztéseinek közvetlen alkalmazásán, másrészt nem konkrét adatokkal adjuk meg a feladatot, így a tanuló az általa felvett adatokkal dolgozik. Ezért nagyobb hangsúlyt kap a diszkusszió. Vizsgáljuk, hogy mi a feltétele annak, hogy a felvett adatokkal a paralelogramma megszerkeszthető legyen.

A feladatok zömében kerületet és területet is számítunk. A számításokkal kapcsolatos gyakori hibák könnyebben kiküszöbölhetők, ha előzőleg megszerkesztették az alakzatot.

Trapéz

A tankönyv bevezető **6.39.** feladata lehetőséget ad a paralelogrammák, speciális paralelogrammák és a szimmetriák ismétlésére.

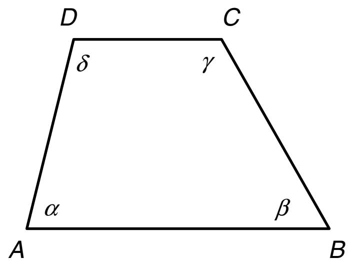
A trapéz meghatározásának leggyakoribb módja található a tankönyvben. Erre épülnek az elnevezések is. Keressünk egyéb meghatározó tulajdonságokat a szögekkel kapcsolatban. Például:

A trapéz olyan négyszög, amelyben van két szomszédos szög, amelyek összege 180°.

Ebből a meghatározásból kiindulva bizonyítható, hogy a négyszögnek van két párhuzamos oldala.

Bizonyítás:

$\alpha + \delta = 180°$. A két szög egyik szára közös, tehát *társszögek.* A társszögek szárai páronként párhuzamosak: $AB \| DC$.



A négyszög belső szögeinek összegéből vagy két oldal párhuzamosságából adódik, hogy a másik két szög összege: $\beta + \gamma = 180°$.

A húrtrapéz tulajdonságait 6. osztályban tárgyaltuk.

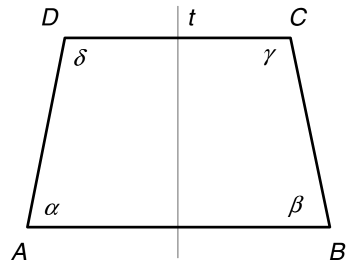
A trapézok halmazából a következő tulajdonságokkal választhatók ki:

Az egyik alapján fekvő két szöge egyenlő.

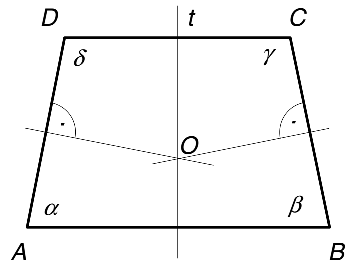
Az egyik alap felezőmerőlegesére tengelyesen szimmetrikus.

Átlói egyenlők.

Köréje kör húzható (ezért húrtrapéz).



A tükrösség miatt a szárak felezőmerőlegesei a tükörtengelyen metszik egymást. Ez a metszéspont mind a négy csúcstól egyenlő távolságra van ($OA = OB = OC = OD$). Ezért ha a trapéznak van az alapokat felező tükörtengelye, akkor kör húzható köréje.
A húrtrapéz nem meghatározó tulajdonsága: a szárai egyenlők.



A trapéz területe

A tankönyv bővített változatában szereplő fejezet.

A trapéz területével a tankönyv 2. fejezetében foglalkoztunk, de az ott közölt átdarabolási eljárás általánosan nem alkalmazható.

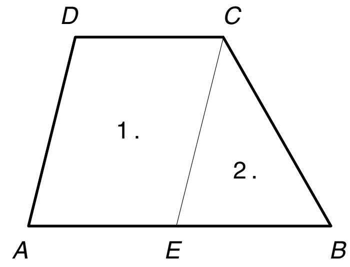
A bemutatott példa ötféle megoldásával ötféle alakú képlethez jutunk, de ezek közül bármelyik kettő teljesen azonos egymással (kapcsolat az algebrai kifejezések azonos átalakításáról tanultakkal). A tankönyv 2. fejezetében megfogalmazott szabály, a hatodik féle, téglalappá való átdarabolásra utal.

A trapéz szerkesztése

A tankönyv bővített változatában szereplő fejezet.

A háromszög szerkeszthetőségéből kiindulva állapítjuk meg a trapéz szerkesztéséhez szükséges adatok számát.

A trapézt egy egyenessel egy paralelogrammára és egy háromszögre bonthatjuk. Az 1. jelű paralelogramma szerkesztéséhez három adat szükséges, a 2. jelű háromszöghöz már csak egy újabb adat kell. Ez az újabb adat a trapéz egyik szára (a *CB* szakasz) vagy a két alap különbsége (*EB* szakasz). Ez a felbontás segít a trapéz négy oldalból történő megszerkesztésében.



Vegyes geometriai feladatok

A tankönyv bővített változatában szereplő fejezet.

Ezek a feladatok a matematikából tehetséges tanulók fejlesztését szolgálhatják. Lehetőséget biztosítanak arra, hogy a geometriai tananyag év végi összegzését és rendszerezését „széles sávon”, a tanulók egyéni képességeihez optimálisan igazodva szervezzük meg.

7. Összefoglaló feladatok

A 6. osztályos program 6. Összefoglaló című fejezetében részletesen taglaltuk az összefoglalás módszertani kérdéseit, ezért most nem térünk ki erre. Annyiban egészítjük ki az ott leírtakat, hogy 7. osztályban már föltétlenül vegyük figyelembe az *alaptanterv aktuális követelményeit*. Úgy szervezzük meg az összefoglalást, hogy legyen alkalmunk az alapvető ismeretek felmérésére és a hiányosságok pótlásának megszervezésére.

Csökkenthető az év végi ismétlés óraigénye úgy, hogy a számtan, algebra témakörhöz tartozó ismeretek egy részét az 5. fejezet összefoglalásakor, a geometriához kapcsolódó ismereteket a 6. fejezet összefoglalása során tekintjük át.

Ha *képesség szerinti csoportbontásban* tanítjuk a matematikát, akkor most (is) lehetőség nyílik a csoportbeosztás felülvizsgálatára.

1. Elsősorban azok a tanulók jelentenek gondot, akik nehezen birkóznak meg az „emelt szintű” oktatás intenzívebb munkatempójával. Mérjük föl, hogy miért maradtak le. Ha úgy látjuk, hogy a tanuló megfelelő képességekkel rendelkezik, és csak néhány anyagrészben hiányos, illetve nem kellően begyakorolt a tudása, akkor egyéni munkában szervezzük meg a hiányok pótlását (esetleg néhány óra korrepetálást is beiktathatunk). Ha a tanuló lemaradása (érdektelensége) olyan mértékű, hogy a hiányok pótlását nem remélhetjük, akkor javasoljuk, hogy a tanuló az „alapszintű” oktatásban folytassa a matematika tanulását. Ezt föltétlenül beszéljük meg a szülőkkel, a tanulóval, az osztályfőnökkel és a párhuzamos csoportot tanító kollégával.

2. Mérlegeljük gondosan azoknak a tanulóknak a képességeit, tudását és ambícióját, akik az „alapszintű” csoportban jó eredményeket érnek el. Ha ezt megfelelőnek látjuk, akkor javasolhatjuk, hogy a tanuló lépjen át az „emelt szinten” tanuló csoportba. Mindenképpen szervezzük meg ezeknek a tanulóknak az „átállását” és „felzárkózását” (feladatsorok kijelölése, a megoldások, problémák megbeszélése, korrepetálás). Erről megfeledkezve törést okozhatunk a tanulókban. *Kellő felkészítés* után alkalmat adhatunk a tanulónak, hogy próbaképpen vegyen részt az „emelt szinten” tanuló csoport néhány óráján. Így mérlegelheti, hogy vállalja-e ezt az intenzívebb munkát.

3. Külön gondot okoznak azok a tanulók, akik „alapszinten” sem érték el az *alaptantervben előírt minimumot.* Ha több ilyen tanuló van, akkor célszerű az év végi ismétlés idejére kettébontani az „alapszinten” tanuló csoportot. Míg a nehezebben tanuló gyerekekkel csak a legalapvetőbb ismereteket gyakoroltatjuk, és megkíséreljük elérni a továbbhaladáshoz föltétlenül szükséges szintet, addig a többiekkel tételesen összefoglalhatjuk a tanultakat.

Redukált program: Lényegében nem jut idő az év végi rendszerező összefoglalásra. Ez némileg kompenzálható, ha az **5.** és a **6.** fejezet tárgyalása során jól kiaknázzuk a kapcsolódási lehetőségeket, és folyamatosan felelevenítjük és tudatosítjuk a tanév során tanultakat.

A hiányosságok pótlására legalább most szervezzünk korrepetálást.

Megjegyezzük, hogy a 7. fejezet feladatai nem csak az év végi összefoglalás céljait szolgálhatják. Jól alkalmazhatók ezek a feladatsorok a témazáró dolgozatok előkészítésekor és a folyamatos ismétlés során is.

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Számtan, számelmélet

A témakör összefoglalásakor – ha ez gondot okoz tanulóinknak – folyamatosan ismételhetjük a mértékegységek átváltását.

A témakör ismétlését a tankönyv a következőképpen tagolja:

1. *Számok írása a tízes számrendszerben. Normálalak*

A számok írásának gyakorlását kapcsoljuk össze a racionális számok fogalomrendszerének ismétlésével.

A **Tk. 7.01.** feladat megoldásakor a szaktanár és a tanuló számára egyaránt tanulságos, ha a nagy számokat (nem a megtanítás igényével) rendszerbe foglaljuk:

10^6 = millió; 10^{12} = billió; 10^{18} = trillió;

10^{24} = kvadrillió; 10^{30} = kvintillió; 10^{36} = szextillió

A matematikatanítás során többször nyílik alkalmunk olyan szóösszetételek megismertetésére, amelyek egyik tagja görög vagy latin szó. (Esetünkben a latin: bi-, tri-, kvadri-, kvint-, szext- előtagok megfigyelését javasoljuk.) Ne féljünk attól, hogy a tanuló az idegen szavak szótárából vagy a lexikonból írja ki a szavak jelentését, sőt szoktassuk ezen források használatára a tanulókat. Az ilyen gyűjtőmunka általános műveltségük fejlesztése mellett intelligencia- és igényszintjüket is emelheti.

Ugyanakkor a következőkre föltétlenül hívjuk fel a figyelmet:

Egyes kultúrkörökben mást jelentenek ezek az elnevezések. *Például* az USA-ban (és Franciaországban):

10^9 = billion; 10^{12} = trillion; 10^{15} = quadrillion;

10^{18} = quintillion; 10^{21} = sextillion

A tudományok az áttekinthetőség és az egyértelműség kedvéért a normálalakot használják az ismertetett elnevezések helyett.

2. *Osztó, többszörös, oszthatóság*

A feladatok megoldásának megbeszélése során kérjük a fogalmak értelmezését, fogalmaztassuk meg a tanult *oszthatósági szabályokat.*

A **Tk. 7.07.** feladatban a megfordítható állítások esetén az állítást és az állítás megfordítását fogalmaztassuk meg egy állításként.

A **Tk. 7.10.** feladat feldolgozásával az alábbi didaktikai, nevelési feladatokat oldhatjuk meg:

a prímtényezős felbontás gyakorlása;
az osztók előállítása a prímtényezők segítségével;
kombinatív, kreatív gondolkodásmód fejlesztése;
a térfogat- és felszínszámításról tanultak felidézése, gyakorlása;
a téglatest „alakja” és felszíne közti kapcsolat megsejtetése (az adott térfogatú téglatestek esetén csökken a felszín, ha az élek hossza a velük egyenlő térfogatú kocka éleinek hosszához „közelít”).

3. *Műveletek a racionális számkörben*

A feladatok megoldásához kapcsolódva beszéljük meg a zárójelek használatát, tudatosítsuk a helyes műveleti sorrendet. Indokoltassuk a feladatok megoldását.

4. *Arány, arányos osztás, arányosság*

A témakörhöz kapcsolódva ismételjük át a százalékszámítást is.

Függvények

Ha kellő súllyal tárgyaltuk ezt a témakört, akkor most 2 óra elegendő az átismétléséhez.

1. *Grafikonok*

2. *Lineáris függvény*

Beszéljük meg, hogy hogyan olvasható le a kifejezésekből a grafikon meredeksége és az y tengellyel való metszéspontja. (Az $x \mapsto ax + b$ függvény esetén mi az a és a b jelentése?)
Az egyenletek grafikus megoldásával időhiány miatt lehet, hogy nem foglalkoztunk korábban (**Tk. 7.39.** feladat). Az év végi ismétlés során esetleg kibővíthetjük a tanultakat a lineáris egyenletek grafikus megoldásával. Rajzoltassuk meg (az x tengelyen vagy külön számegyenesen) a megoldáshalmazt is.

Algebra

1. *Algebrai kifejezések*

A helyettesítési értékek meghatározásakor zsebszámológéppel ellenőriztethetjük a megoldásokat. A **Tk. 7.45.** feladat ellenőrzése úgy történhet, hogy az eredeti feladatba helyettesítjük be az a és a b értékét. Vetessük észre, hogy ha az a és a b „csúnya" szám (például $a = 29{,}73$, $b = -22{,}34$), akkor mindenképpen célszerű először az algebrai kifejezést egyszerűbb alakra hozni.
A **Tk. 7.47.** feladatnak és a didaktikai elveknek egyaránt megfelel, ha többféle módon is szorzattá alakítjuk a kifejezéseket.

2. *Egyenlet, azonosság, egyenlőtlenség, azonos egyenlőtlenség*

Hívjuk fel a tanulók figyelmét az ellenőrzésre. Ehhez most is ajánlott zsebszámológépet használni.

Geometria

1. *Háromszög*

Elevenítsük fel a háromszögek szögek szerinti osztályozását, az oldalak szerinti csoportosítását, a derékszögű illetve az egyenlő szárú háromszöggel kapcsolatos elnevezéseket. Idézzük fel a belső és külső szögekkel kapcsolatos összefüggéseket és a háromszög-egyenlőtlenséget mint a háromszög megszerkeszthetőségének feltételét. Tudatosítsuk a háromszög egybevágóságának alapeseteit.
Ha a **Tk. 7.58.** feladatot *a)*-tól *d)*-ig megoldatjuk, akkor tudatosíthatjuk, hogy a háromszöget két oldala és a nagyobbik oldallal szemközti szöge határozza meg egyértelműen. Átismételhetjük a nevezetes szögek szerkesztését.

2. *Négyszög*

A négyszögekről tanultak ismétlését csak átlagosnál jobb csoportban tárgyalhatjuk a feladatsornak megfelelő mélységben. Az ilyen osztályokban javasoljuk *a kis csoportos foglalkozást* úgy, hogy az egyes csoportok egy-egy részfeladatot oldanak meg, majd összehasonlítjuk és diszkutáljuk a különböző megoldásokat.
Átlagos vagy annál gyengébb csoport esetén csupán az egyszerűbb szerkesztésekkel foglalkozzunk, elsősorban a háromszögszerkesztés alapeseteit alkalmazzuk, és a kerület-, területszámítást gyakoroltassuk. Idézzük fel a *konvex* és a *nemkonvex* síkidomok fogalmát, a konvex és a nemkonvex sokszögek tulajdonságait.

3. *Testek térfogata, felszíne*

Felelevenítjük a négyszögek és a háromszög területszámításáról tanultakat és a hasáb térfogat- és felszínszámítását. Ellenőrizzük a mértékegységek átváltását. A térfogatszámítással kapcsolatosan megbeszélhetjük, hogy a mértékegység-rendszer megalkotói szerint: 1 liter = 1 dm^3. Ám a korabeli mérések pontatlansága miatt a hosszúságetalonból számított 1 dm^3-es térfogat és az űrmérték etalonjával definiált 1 liter között (igen kicsi) eltérés van. Ennek ellenére az 1 litert a számításokban 1 dm^3-nek tekinthetjük.

4. *Egybevágósági transzformációk*

A feladatok megoldása (felzárkóztató szinten) elősegíti a tanult egybevágósági transzformációk tulajdonságainak felidézését, összehasonlítását.
A **Tk. 7.72.** feladat megoldásakor a terület és az átlóhossz meghatározása is kitűzhető feladatként. Megvizsgáltathatjuk azt is, hogy ha a pontok az x tengellyel párhuzamos egyenesre illeszkednek, akkor az ordinátájuk azonos (kapcsolat a konstans függvény grafikonjával); ha az y tengellyel párhuzamos egyenesre illeszkednek, akkor az abszcisszájuk azonos (ez nem függvénygrafikon!). Jobb csoportban felismerhetik a tanulók, hogy a szakasz *felezőpontjának koordinátáit* a szakasz végpontjai megfelelő koordinátáinak számtani közepeként kapjuk. Ilyen mélységű diszkusszió nyomán újabb feladat is kitűzhető (például „nagy számok” a koordináták), amelyben már pontábrázolás nélkül kell a hiányzó csúcspontok koordinátáit meghatározni.
Célszerű többféle megoldási módot alkalmazni. A különböző megoldási tervek és a három megoldás miatt a feladat alkalmas a *geometriai szemléletmód* és *rugalmas gondolkodás* fejlesztésére. Hívjuk fel a figyelmet a megfogalmazás fontosságára. Ha a három csúcspont koordinátáit „rendre” adtuk volna meg, akkor a feladatnak egy megoldása lenne.
A **Tk. 7.76.** feladat megoldásakor a tengelyes tükrözés tulajdonságainak felelevenítésén és a szerkesztés végrehajtásán kívül további kérdések is felvethetők:

Az „átló”, „oldalegyenes”, „felezőmerőleges” fogalma.

A felezőmerőleges szerkesztésének módja.

Nevezetes szögek, a szögfelező szerkesztése.

A háromszög szerkesztésének alapesetei.

Mekkora szöget zárnak be (például a *b)* feladatban) az eredeti rombusz átlói a tükörkép rombusz oldalaival?

A **Tk. 7.78.** feladat a **Tk. 7.77.** feladat megoldásával készíthető elő.