Dr. Czeglédy István főiskolai tanár
Dr. Czeglédy Istvánné vezetőtanár
Dr. Hajdu Sándor főiskolai docens
Novák Lászlóné tanár
Zankó Istvánné tanár

Matematika 5.

PROGRAM

általános iskola 5. osztály
nyolcosztályos gimnázium 1. osztály

Átdolgozott kiadás

MŰSZAKI KIADÓ, BUDAPEST

Alkotó szerkesztő:
DR. HAJDU SÁNDOR

Az 1. kiadást bírálta:
DR. MAROSVÁRI MIKLÓSNÉ vezetőtanár
DR. SÜMEGI LÁSZLÓ egyetemi adjunktus

© Dr. Czeglédy István, Dr. Czeglédy Istvánné,
Dr. Hajdu Sándor, Novák Lászlóné, Zankó Istvánné, 1994, 2006
© Műszaki Könyvkiadó Kft., 2006

ISBN 963 16 4142 2
Azonosító szám: CAE 039M

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó Kft.
Felelős kiadó: Bérczi Sándor ügyvezető igazgató
Felelős szerkesztő: Bosznai Gábor
Műszaki vezető: Orgován Katalin
Borítóterv: Bogdán Hajnal
Műszaki szerkesztő: Trencséni Ágnes
Tördelőszerkesztés és számítógépes grafika: Köves Gabriella
Terjedelem: 7,87 (A/5) ív
6., 1. átdolgozott kiadás

E-mail: vevoszolg@muszakikiado.hu
Honlap: www.muszakikiado.hu
www.hajdumatek.hu

Nyomta és kötötte a Borsodi Nyomda Kft.
Felelős vezető: Ducsai György ügyvezető igazgató

Tartalom

BEVEZETŐ ISMERTETÉS 5

ÓRATERV, TANMENET 7

Óraterv 7
Tanmenet 10
1. Számok, mennyiségek 10
2. Algebrai műveletek 12
3. Összefüggések, nyitott mondatok 14
4. Geometriai alakzatok 15
5. A törtek 17
6. Geometriai vizsgálatok, szerkesztések 19
7. Az egész számok 21
8. Összefoglaló 22

A TANANYAG FELDOLGOZÁSA 23

1. Számok, mennyiségek 23
A tananyag-feldolgozás csomópontjai 24
Kapcsolódási lehetőségek 25
A tananyag-feldolgozás áttekintése 25
2. Algebrai műveletek 33
A tananyag-feldolgozás csomópontjai 34
Kapcsolódási lehetőségek 34
A tananyag-feldolgozás áttekintése 35
3. Összefüggések, nyitott mondatok 43
A tananyag-feldolgozás csomópontjai 43
Kapcsolódási lehetőségek 43
A tananyag-feldolgozás áttekintése 44
4. Geometriai alakzatok 46
A tananyag-feldolgozás csomópontjai 46
Kapcsolódási lehetőségek 47
A tananyag-feldolgozás áttekintése 49
5. A törtek 59
A tananyag-feldolgozás csomópontjai 60
Kapcsolódási lehetőségek 60
A tananyag-feldolgozás áttekintése 61
6. Geometriai vizsgálatok, szerkesztések 68
A tananyag-feldolgozás csomópontjai 68
Kapcsolódási lehetőségek 69
A tananyag-feldolgozás áttekintése 70

7. Az egész számok ... 80
A tananyag-feldolgozás csomópontjai ... 81
Kapcsolódási lehetőségek ... 81
Javasolt eszközök és modellek ... 82
A tananyag-feldolgozás áttekintése ... 84
8. Összefoglaló ... 88

Általános módszertani javaslatok ... 89

A tanulási folyamatról ... 90
A tananyag-feldolgozás általános szerkezete ... 93
A tudáspróbák feladata ... 94
Szemléltetés, eszközhasználat ... 95
A tananyag és a követelmények értelmezéséről ... 98
Halmazok, logika, kombinatorika ... 99
Számtan, algebra ... 101
Relációk, függvények, sorozatok ... 102
Mérés, geometria ... 104
Valószínűség, statisztika ... 106

BEVEZETŐ ISMERTETÉS

A tankönyvcsalád átdolgozásának koncepciója

A tankönyv első kiadása 1985-ben jelent meg. Azóta kétszer került átdolgozásra, 1993-ban és 2000-ben.

2006-ban újra szükségessé vált a tankönyvcsalád átdolgozása. Egyrészt 2000 óta jelentősen változtak a matematikatanítás tantervi feltételei. Drasztikusan csökkent a matematikaórák száma az alsó és a felső tagozatban egyaránt. Ezért a tanulók alacsonyabb tudásszinttel, bizonytalanabb készségekkel rendelkeznek, lassabban és több hibával dolgoznak, mint a korábbi években. Másrészt a nemzetközi és a hazai felmérések hatására hangsúlyeltolódást figyelhetünk meg a matematika követelmények terén úgy, hogy a követelmények összességében nem csökkentek. Az átdolgozás egyaránt érinti a tankönyv tartalmát, szerkezetét, módszertani megoldásait és tipográfiáját.

1. Az alacsonyabb tudásszinthez igazodva az alsó tagozatos tananyagot alaposabban, tartalmilag és módszertanilag átgondoltabban tekintjük át (lehetőséget adva az esetleges hiányosságok pótlására). A tananyag feldolgozása során „színes" mintapéldákkal ismertetjük fel az új fogalmakat, összefüggéseket. A felépítésben alkalmazzuk a „kis lépések" elvét.
2. A tanulók terhelésének csökkentése érdekében **kevesebbet kell tanítanunk, de azt jól be kell gyakoroltatnunk**. Az alapszinten a lehetőségekhez képest csökkentjük az egyes anyagrészek ismeretanyagát, hogy pótolhassuk az alsó tagozatból örökölt hiányosságokat, és legyen elegendő idő az „új" anyagrészek, feladattípusok alaposabb feldolgozására.
3. Újragondoljuk az anyagrészek sorrendjét úgy, hogy időtakarékosabb, intenzívebb, komplexebb feldolgozást tegyünk lehetővé. Elegendő időt kell biztosítanunk a legfontosabb ismereteknek (például 5. osztályban a tizedestörtekkel való műveleteknek, a szöveges feladatok megoldásának, a mértékegységek átváltásának) begyakoroltatására, minél sokoldalúbb alkalmazására.
4. Figyelembe vesszük a hangsúlyeltolódásokat. A tananyag esetlegesen deduktív felépítését felváltjuk az ismeretek szemléletességen alapuló, „gyakorlatorientált" megközelítésével. Növeljük a mindennapi élettel kapcsolatos szöveges feladatok számát. Nagyobb súlyt fektetünk a táblázatok, diagramok elemzésére.
5. Tartalmilag és módszertanilag újragondoljuk a tipográfiát. A szöveg funkcióját, illetve az ismeretek megértését támogató színezést alkalmazunk. Növeljük a tartalommal adekvát, a megértést, illetve a motivációt elősegítő, de a figyelmet el nem terelő grafikák, fotók, színes, szemléltető ábrák számát.

A tankönyvcsalád ismertetése

Matematika 5. Program

Ezt a kiadványt minden iskola számára térítésmentesen biztosítja a kiadó. A könyv alakhoz képest az elektronikus változat bővebb. A kiadó honlapján doc formátumban is megtalálható az óraterv és a tanmenet.

Matematika 5. A (alapszint), illetve **Matematika 5. B (bővített változat)** tankönyv

Az alapszintű könyv minden olyan anyagrészt tartalmaz, amely a továbbtanuláshoz nélkülözhetetlen. A bővített tankönyvben a tehetséges tanulók számára, az alapszintű tankönyv tananyagán túl kiegészítő anyagrészeket, fejtörő feladatokat találhatunk.

Matematika 5. tankönyv feladatainak megoldása

A tanulók otthoni munkájának önellenőrzését segítő kiadvány.

Matematika 5. Gyakorló

Bőséges feladatanyaga elsősorban a tanultak gyakorlását, az esetleges hiányosságok pótlását szolgálja. A tankönyvben jelöljük, hogy az egyes alfejezetekhez a gyakorló-feladatsorok hogyan kapcsolódnak.

Matematika 5–6. Feladatgyűjtemény

Ezzel a feladatgyűjteménnyel a tehetséggondozást kívánják segíteni a szerzők. A jó képességű tanulóktól fokozatosan várjuk el az intenzívebb, magasabb szintű munkát. Ez az általános iskolai tagozaton azért fontos, hogy a tanulók a gimnáziumi tagozatra járó társaikkal azonos színvonalra juthassanak. A tankönyvben jelöljük azt is, hogy az egyes feladatok hányadik osztályban, mely anyagrészhez kapcsolódva oldhatók meg.

Matematika 3–5. Eszköztár

Többségében kartonpapírból készült eszközöket tartalmaz a 3–5. osztályos tankönyvek anyagának tanulásához. Segítségükkel (az Eszköztárban található útmutató ajánlásait követve) megszervezhető a tárgyi tevékenységből kiinduló irányított felfedeztető tanulás, az elvont fogalmak szemléleti megalapozása. 5. osztályban főleg a törtek tanítása során vehetjük hasznát ezeknek az eszközöknek.

Felmérő feladatsorok, matematika 5. osztály (A, B, C, D változat)

A felmérő feladatsorok célja, hogy a különböző helyi tantervek követelményei összemérhetők legyenek a Program követelményeivel és egymással. A füzetekhez készített tanári példányok tartalmazzák a javítási útmutatókat és az értékelési normákat. A C és a D változat külön füzetben, olcsóbb kivitelben került kiadásra. Ezeket a füzeteket csak hivatalos megrendelésre, az iskoláknak küldi meg a Műszaki Kiadó, ezek kereskedelmi forgalomban nem kaphatók.

ÓRATERV, TANMENET

Óraterv

Az iskolák többségében a helyi tanterv 5. osztályban heti 4, évi 144 matematikaórát ír elő. Ezen iskolák számára javasolt óraszámokat (az óratervben és a tanmenetben is) üres keretbe írtuk. Például: 01–22. óra Megjegyezzük, hogy ha ezekben az iskolákban az alsó tagozatban redukált óraszámban tanították a matematikát, akkor ötödik osztályban is meg kell elégednünk a kerettantervi minimum feldolgozásával.

Sok olyan iskola van, ahol felismerték, hogy az alsó tagozatos óraszámok drasztikus csökkentése miatt a tanulók a korábbiakhoz képest hiányosabb ismeretekkel, fejletlenebb készségekkel és képességekkel lépnek a felső tagozatba. Ezért 5. osztályban legalább heti 4,5, évi 162 órát biztosítanak a matematikaoktatás számára. Ebben az esetben a javasolt óraszámokat szürkére színezett keretbe írtuk: 01–24. óra

Ha heti 4 óránál kevesebb óraszámot biztosít a helyi tanterv az ötödik osztály számára, akkor a kerettantervi követelményeket már csak a jobb képességű tanulók képesek teljesíteni. A nehezebben haladó tanulóknak nemcsak az új anyag elsajátítása, hanem az alsó tagozatos hiányosságok pótlása is komoly gondokat jelenthet. Ebben az esetben a nehezebben haladó tanulók számára heti rendszerességgel korrepetálást kell szerveznünk.

1. Számok, mennyiségek 01–22. óra 01–24. óra

A természetes számok – Tájékozódás a számegyenesen – Kisebb, nem kisebb; nagyobb, nem nagyobb – Szorzás és osztás 10-zel, 100-zal 1000-rel, ... – Hosszúságmérés – Tömegmérés – Euróval fizetünk

A tanultak gyakorlati alkalmazása; hosszúságok, tömegek becslése, mérése.

A tized, század, ezred fogalmának tudatosítása az alsó tagozatban tanultak átismétlésével. A tizedestörtek fogalmának előkészítése.

A tizedestörtek értelmezése – Tizedestörtek ábrázolása számegyenesen – Tizedestörtek egyszerűsítése, bővítése, összehasonlítása – Pontos érték, közelítő érték, kerekítés (A természetes számok kerekítése – A tizedestörtek kerekítése – A mérés pontosságának jelzése) – Gyakorlás – **1. dolgozat**, diagnosztikus, témazáró felmérés

A fogalomrendszert a szemléletre, gyakorlati alkalmazásokra alapozva építjük fel. A fogalmak megszilárdulása a legtöbb tanulónál csak a következő anyagrészek feldolgozása során várható el.

2. Algebrai műveletek

23–52. óra

25–58. óra

A természetes számok összeadása. A természetes számok kivonása – Tizedestörtek összeadása, kivonása – Az összeadás és a kivonás tulajdonságai – A természetes számok szorzása – Tizedestörtek szorzása, osztása 10-zel, 100-zal, 1000-rel – Tizedestörtek szorzása természetes számmal – Osztó, többszörös (csak az alsó tagozatban tanultak felelevenítése) – **2. dolgozat**, tájékozódó felmérés – A természetes számok osztása (Osztás egyjegyű osztóval – Osztás többjegyű osztóval) – Tizedestörtek osztása természetes számmal – A műveletek sorrendje – Az átlag kiszámítása – Gyakorlás

Kiegészítő anyagként: Nem tízes alapú számrendszerek

A tizedestörtek gyakorlati példákon (mértékváltás, pénzváltás) történő bevezetése lehetővé teszi, hogy az írásbeli műveletekről tanultakat átismételjük, majd (gyakorlati példákra támaszkodva) kiterjesszük a tizedestörtekre. Így a tanulók szinte az egész tanév folyamán gyakorolhatják és alkalmazhatják a tizedestörtekről tanultakat.

Ez a felépítés mintegy 10 tanórával csökkentheti az új tananyag feldolgozásának időigényét. Így részben kompenzálható az az időveszteség, amely az alsó tagozatos tananyag részletesebb áttekintéséből és az esetleges hiányosságok pótlásából, továbbá a felső tagozatba lépő tanulók lassúbb munkatempójából és alacsonyabb tudásszintjéből adódik.

3. Összefüggések, nyitott mondatok

53–66. óra

59–74. óra

Táblázatok, grafikonok – Összefüggések, sorozatok – Arányos következtetések – Gyakorlás – **3. dolgozat**, az első félévet záró felmérés

Kiegészítő anyag: Egyenlet, egyenlőtlenség

A témakör hangsúlyossá válása, a gyakorlati alkalmazások előtérbe kerülése, valamint a tizedestörtekről tanultak integrálása miatt önálló fejezeteket alakítottunk ki. A korábbiakhoz képest módszertanilag kidolgozottabb lett a témakör feldolgozása. „Új feladattípusok” a szövegértelmező és a táblázat-, illetve grafikonelemző képesség fejlesztésére.

Az előző fejezetekben találkoztak a tanulók az alapszintű követelményeknek megfelelő, egy lépéssel megoldható egyenletekkel, egyenlőtlenségekkel. Az Egyenlet, egyenlőtlenség c. fejezetet a helyi tanterv előírásainak, illetve a csoport színvonalának megfelelő szinten célszerű feldolgozni, nehezebben haladó csoportban ez az alfejezet elhagyható.

4. Geometriai alakzatok

67–86. óra

75–94. óra

Ismerkedés testekkel, felületekkel, vonalakkal – Egyenesek kölcsönös helyzete – Síkidomok, sokszögek – Egybevágó síkidomok – Téglalap, négyzet (tulajdonságaik, kerületük) – A terület mérése, mértékegységei – A téglalap területe – Téglatest, kocka (tulajdonságaik vizsgálata) – *Kiegészítő anyag:* Síkok és egyenesek, síkok és síkok kölcsönös helyzete a térben (a téglatest tulajdonságainak vizsgálatából kiindulva) – A téglatest hálója, felszíne – A téglatest térfogata – Az űrtartalom mérése – Gyakorlás – **4. dolgozat**, témazáró felmérés

Az új fejezetek (téglalap, négyzet, téglatest, kocka) nem új anyagrészt tartalmaznak. Az alsó tagozatos tananyag aprólékos átismétlése, illetve az átgondoltabb módszertani kidolgozás indokolta ezen anyagrészek önálló fejezetként történő feldolgozását. A tanulók számára új, hogy a tizedestörtekről tanultakat alkalmazniuk kell a geometriai számításokban.

5. A törtek 87–106. óra 95–116. óra

A törtek értelmezése – Törtek bővítése, egyszerűsítése – Törtek összehasonlítása – Egyenlő nevezőjű törtek összeadása, kivonása – Különböző nevezőjű törtek összeadása, kivonása – Törtek szorzása természetes számmal – Törtek osztása természetes számmal – *Kiegészítő anyag:* Törtalakban írt szám tizedestört alakja – Gyakorlás – **5. dolgozat**, témazáró felmérés

A fogalmak kialakításakor ne „absztrakt" feladatokból, hanem szemléletes, gyakorlati jellegű szöveges feladatokból induljunk ki.

A fejezetben mindig visszautalunk a tizedestörtekkel kapcsolatos ismeretekre. Megmutatjuk, hogy amit ott a szemléletre támaszkodva felismerhettünk, az most a törtekről tanultakkal is igazolható. Így újra gyakoroltathatjuk a tizedestörtekről tanultakat is.

6. Geometriai vizsgálatok, szerkesztések 107–118. óra 117–134. óra

Ponthalmazok, a kör és a gömb – Háromszög szerkesztése (három oldalból) – Szakaszfelező merőleges – A szögtartomány – A szögek mérése szögmérővel – A szögek fajtái – Tájékozódás a terepen és a térképen (helymeghatározás, távolságmérés, szögmérés) – Gyakorlás

Kiegészítő anyag: Téglalap szerkesztése – Testek ábrázolása – Tájékozódás iránytűvel, tájolóval

Az új anyag tárgyalását kapcsoljuk össze a geometriai számítások gyakorlásával. A gyakorlatorientált megközelítés koncepciójának megfelelően hangsúlyosan kell szerepeltetnünk a térképhasználattal kapcsolatos ismereteket.

7. Az egész számok 119–130. óra 135–148. óra

Nem elég a természetes szám – Az egész számok abszolútértéke – Az egész számok összeadása, kivonása – A derékszögű koordináta-rendszer – Gyakorlás – **6. dolgozat**, a 6. és a 7. témakör zárása

Ezt a fejezetet a megfelelő 6. osztályos tananyag előkészítésének, szemléleti megalapozásának kell tekintenünk. Az anyagrész tárgyalása során fontosnak tartjuk a kísérletezést, tapasztalatszerzést. A bemagoltatott szabályok alkalmazása nem felel meg sem a tanulók életkori sajátosságainak, sem a „gyakorlatorientált", képességfejlesztő koncepciónak. Ezért növeltük a szemléletes, és csökkentettük az „absztrakt", illetve összetett feladatok számát.

8. Összefoglaló 131–144. óra 149–162. óra

Számok és műveletek – Mérések, mértékegységek, geometria – **7. dolgozat**, összegző tanévzáró értékelés

A megváltozott követelményekhez igazítva tekintjük át az ötödik osztályos tananyagnak a továbbtanuláshoz nélkülözhetetlen témaköreit.

Kislexikon [A tankönyv bővített változatában]

Az önálló ismeretszerzés képességének egyik fontos tényezője a kislexikon használatának megtanulása.

Tanmenet

1. Számok, mennyiségek

1–3. óra 1–3. óra **A természetes számok**

A természetes számok értelmezése 100 000-*ig*.

A természetes számokról az alsó tagozatban tanultak átismétlése, majd kiterjesztése 100 000-ig a szemléletre (játék pénz használatára) támaszkodva.

Helyiértékes írásmód a tízes számrendszerben, a helyiérték-táblázat használata, az alakiérték, helyiérték, tényleges érték értelmezése. Pénzhasználat. Egyszerű szöveges feladatok megoldása. Római számírás (a csoport képességeinek megfelelő szinten).

Tk. 1.01–1.16.; Mgy. 1.01–1.02., 1.15–1.18., 9.01–9.10.

4–5. óra 4–5. óra

A természetes számok írása, olvasása 1 000 000-*ig.*

A tízes számrendszer helyiértékes írásmódjáról tanultak kiterjesztése. Egyszerű szöveges feladatok megoldása, táblázatba foglalt adatok értelmezése. A természetes számok helyesírása.

Tk. 1.17–1.27.; Mgy. 1.06–1.14., 1.35–1.36., 9.11–9.14.

6–7. óra 6–8. óra **Tájékozódás a számegyenesen**

Kisebb, nem kisebb; nagyobb, nem nagyobb

Természetes számok helyének (közelítő helyének) *meghatározása* (elsősorban) egyes, tízes, százas, ezres beosztású *számegyeneseken.*

Megfelelő órakeret esetén: *egyszerű egyenlőtlenségek* értelmezése, igazsághalmazuk megállapítása, ábrázolása a számegyenesen. „Legalább”, „legfeljebb”, „nem nagyobb”, „nem kisebb” stb. kifejezések értelmezése.

Kijelentések tagadása. Halmaz kiegészítő halmaza (komplementere). Logikai „és”, logikai „vagy” műveletek.

Tk. 1.28–1.32.; 1.33–1.37.; Mgy. 1.19–1.26., 9.25–9.30.; 1.27–1.29., 9.31–9.32.

8. óra 9. óra **Szorzás és osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel,** . . .

Az alsó tagozatban tanultak átismétlése, majd alkalmazása a kibővített számkörben. A szorzás és az osztás közti kapcsolat tudatosítása.

Oszthatóság. Részhalmaz. A számok írásának, olvasásának gyakorlása. Kombinatorika.

Tk. 1.38–1.42.; Mgy. 1.03–1.05., 2.39., 9.15–9.18.

9–11. óra 10–13. óra **Hosszúságmérés. Tömegmérés**

A hosszúság, a tömeg mérése, a mérőeszközök használata. Becslés, összehasonlítás, megmérés, kimérés. Mértékegységek átváltása, a tized, a század és az ezred fogalmának tudatosítása. *A tizedestörtek fogalmának előkészítése.*

Az alsó tagozatban tanultak átismétlése, majd alkalmazása a kibővített számkörben.

A számok írása, olvasása, illetve a 10-zel, 100-zal, 1000-rel való szorzás gyakorlása.

Tk. 1.43–1.50., 1.51–1.57.; Mgy. 7.01–7.08., 7.18–7.20., 9.19–9.20., 9.71–9.72.

12. óra 14. óra **Euróval fizetünk**

Ismerkedés az Európai Unió fizetőeszközével. A váltópénz használatának gyakorlása.

A tizedestörtek fogalmának előkészítése.

Tk. 1.58–1.64.

13–15. óra 15–17. óra **A tizedestörtek értelmezése**
Tizedestörtek ábrázolása számegyenesen

A tízes számrendszer helyiérték-táblázatának kibővítése. A helyiérték és a tényleges érték fogalmának általánosítása. *A tizedestörtek írása, olvasása.* Mennyiségek, illetve euróban adott értékek kifejezése tizedestört mérőszámmal.

A tized, a század, az ezred fogalmának megerősítése. A hosszúság, illetve a tömeg mértékegységei. Euró, cent, a váltópénz használatának gyakorlása.

Tk. 1.65–1.77., 1.78–1.79.; Mgy. 5.48–5.56., 5.59., 7.29–7.39., 9.75., 9.78.; Fgy. 4.1.01–04.

16. óra 18. óra **Tizedestörtek egyszerűsítése, bővítése, nagyság szerinti összehasonlításuk**

Mértékegységek átváltásával szemléltetjük a fogalmat.

Tizedestörtek írása, olvasása, ábrázolásuk számegyenesen. A hosszúság, illetve a tömeg mértékegységeinek átváltása. Egyszerű egyenlőtlenségek értelmezése.

Tk. 1.80–1.85.; Mgy. 5.56–5.58., 5.60–5.62.

17–19. óra 19–21. óra **Pontos érték, közelítő érték, kerekítés**
A mérés pontosságának jelzése

A természetes számok kerekítése, az alsó tagozatban tanultak felelevenítése, kiterjesztése az egymilliós számkörre. *Tizedestörtek kerekítése.* Tized, század, ezred szomszédok. A kerekített számok helye a számegyenesen. A csoport képességeinek megfelelő szinten foglalkozzunk a mérés pontosságának jelzésével.

Számok írása, olvasása, ábrázolásuk számegyenesen. Hosszúság-, illetve tömegmérés.

Tk. 1.86–1.89., 1.90–1.99., 1.100–1.104.; Mgy. 1.30–1.34., 5.63–5.67., 9.63–9.65.; Fgy. 1.1.25–26.

20–22. óra 22–24. óra **Rendszerező összefoglalás, gyakorlás**

1. dolgozat, diagnosztikus, témazáró felmérés

A hiányosságok pótlásának megszervezése.

Tk. 1.105–1.112., 1.113.

2. Algebrai műveletek

23–24. óra 25–26. óra **A természetes számok összeadása, kivonása**

Az alsó tagozatban tanultak ismétlése, majd kiterjesztése az egymilliós számkörre. A természetes számok szóbeli és írásbeli összeadása, kivonása. Az összeg és a különbség változásai (alsó tagozatban tanultak általánosítása). A műveleti eredmények becslése (ez a számkör bővítése miatt nehézséget okozhat a tanulóknak).

Egyszerű (összeadással, illetve kivonással megoldható) *szöveges feladatok.*

Természetes számok írása, olvasása, kerekítése. Egy lépéssel (következtetéssel) megoldható egyenletek, egyenlőtlenségek.

Tk. 2.01–2.08., 2.09–2.18.; Mgy. 2.01–2.37. 9.33–9.34; Fgy. 1.2.01–21.

25–27. óra 27–30. óra **A tizedestörtek összeadása, kivonása**

Az összeadás és a kivonás tulajdonságai

A hosszúságméréshez, a tömegméréshez, illetve a pénzhasználathoz (euró, cent) kapcsolódó szemléletes feladatokból kiindulva. A műveleti eredmény becslése. *Egyszerű* (összeadással, illetve kivonással megoldható) *szöveges feladatok.*

A csoport képességeinek megfelelő szinten: Az összeadás és a kivonás tulajdonságainak vizsgálata, a zárójel használata.

Tizedestörtek írása, olvasása, kerekítése. Mértékegységek átváltása. Egy lépéssel (következtetéssel) megoldható egyenletek, egyenlőtlenségek.

Tk. 2.19–2.38., 2.39–2.44.; Mgy. 5.68–5.79., 3.01–3.04., 3.15–3.16., 3.21–3.24.; Fgy. 1.2.27., 4.2.06.

28–30. óra 31–33. óra **A természetes számok szorzása**

Az alsó tagozatban tanultak ismétlése, majd kiterjesztése az egymilliós számkörre: A természetes számok szóbeli és írásbeli szorzása. A műveleti eredmény becslése. Egyszerű (szorzással megoldható) szöveges feladatok. Következtetés egyről többre.

A csoport képességeinek megfelelő szinten: A szorzás műveleti tulajdonságai. A szorzat változásai. Összeg, különbség szorzása.

Számok írása, olvasása, kerekítése. Számolás kerek számokkal. Kombinatorika.

Tk. 2.45–2.54.; Mgy. 2.38., 2.41–2.53., 3.05–3.06., 3.17., 9.35.;
Fgy. 1.2.30–31., 1.2.33–42.

31–33. óra 34–36. óra **Tizedestörtek szorzása 10-zel, 100-zal, 1000-rel**
Tizedestörtek szorzása természetes számmal

A szorzásról tanultak kiterjesztése a tizedestörtekre. A szorzat becslése. *Szöveges feladatok* a szorzásra; következtetés.

Tizedestörtek írása, olvasása, kerekítése. Mértékegységek átváltása. Sorozatok: néhány elemével adott sorozathoz szabály keresése, majd a felismert szabály alapján további tagok megadása.

Tk. 2.55–2.59., 2.60–2.66.; Mgy. 5.82–5.83., 5.84–5.88., 9.66–9.68.

34. óra 37. óra **Az idő mérése**

Az időmérésről, az időmérés mértékegységeiről az alsó tagozatban tanultak felelevenítése. Az időméréssel kapcsolatos *egyszerű szöveges feladatok.*

Szorzás, következtetés egyről többre.

Tk. 2.67–2.70.; Mgy. 7.24–7.28., 9.36–9.37.

35–36. óra 38–39. óra **Osztó, többszörös**

Ismerkedés az oszthatóság problémakörével a csoport képességeinek megfelelő mélységben. (Nehezen haladó csoport esetén redukálható.)

Szóbeli szorzás, relációk, halmazok, sorozatok.

Tk. 2.71–2.78.; Mgy. 6.46–6.49.; Fgy. 1.3.02.

37–38. óra 40–41. óra **2. dolgozat,** tájékozódó felmérés, fejlesztő értékelés

39–40. óra 42–43. óra **A természetes számok osztása**
Osztás egyjegyű osztóval

Az alsó tagozatban tanultak ismétlése, rendszerezése. Nulla az osztásban. A hányados változásai. *Írásbeli osztás egyjegyű osztóval.* A hányados nagyságrendjének becslése az osztás első lépése után. Az eredmény ellenőrzése. *Egyszerű szöveges feladatok.*

Következtetéssel megoldható egyenletek. A műveletek közti kapcsolatok tudatosítása.

Tk. 2.79–2.82., 2.83–2.84.; Mgy. 2.40., 2.55., 2.70.; Fgy. 1.3.07–08.

41–44. óra 44–47. óra **Az összeg és a különbség osztása**
Osztás többjegyű osztóval

A többjegyű osztóval való osztás előkészítése, az algoritmus megismerése és gyakorlása. A hányados becslése, a maradékos osztás ellenőrzése. *Szöveges feladatok.*

Természetes számok írásbeli szorzása. A hosszúság, a tömeg és az idő mértékegységeinek használata a mindennapi élettel kapcsolatos feladatokban.

Tk. 2.85–2.88., 2.89–2.94.; Mgy. 3.25–3.27., 2.54., 2.56–2.73.;
Fgy. 1.2.32., 1.2.43–46., 1.2.48–49., 1.2.59.

45–46. óra 48–50. óra **Tizedestörtek osztása természetes számmal**

A természetes számok osztásáról tanultak általánosítása. A hányados egészrésze nagyságrendjének becslése, a maradékos osztás ellenőrzése. *Szöveges feladatok.*

Pénzhasználat (euró, cent). Tizedestörtek szorzása természetes számmal. Összeg, különbség osztása. A hosszúság, tömeg, idő mértékegységei.

Tk. 2.95–2.99.; Mgy. 5.89–5.91., 5.93–5.96., 6.53., 9.69.; Fgy. 4.2.16.

47–49. óra 51–53. óra **A műveletek sorrendje. Az átlag kiszámítása**

Az alsó tagozatban tanultak rendszerezése, majd alkalmazása a tizedestörtek körében. *Összetett szám-, illetve szöveges feladatok* megoldásmenetének megtervezése, a terv végrehajtása. A (számtani) átlag kiszámítási módja konkrét feladatokban.

A szóbeli, illetve az írásbeli műveletek gyakorlása, zárójelhasználat a természetes számok, illetve a tizedestörtek körében. Több lépésben megoldható egyenletek.

Tk. 2.100–2.105., 2.106–2.108.; Mgy. 3.09–3.14., 5.98–5.99., 9.40–9.42.; Fgy. 1.2.56., 1.2.58.

50–52. óra 54–56. óra **Rendszerező összefoglalás, gyakorlás**

Az összeadás, kivonás, szorzás és osztás gyakorlása a természetes számok és a tizedestörtek körében. *A tanultak alkalmazása gyakorlati jellegű feladatokban.*

A 2. felmérés alapján tapasztalt hiányosságok pótlásának megszervezése.

Halmazok, logika. Mértékegységek átváltása. Összetett szám-, illetve szöveges feladatok.

Tk. 2.109–2.125., B2.06–B2.33., 2.126.; Mgy. 9.70–9.75., 9.78., 9.83.

57–58. óra **Nem tízes alapú számrendszerek**

Jobb képességű csoportban, ha a tanulók biztos szám- és műveletfogalommal és megfelelő készségekkel rendelkeznek, továbbá ha elegendő idő áll a rendelkezésünkre, akkor foglalkozzunk ezzel a témakörrel.

Tk. B2.01–B2.05.; Fgy. 1.4.01–12.

3. Összefüggések, nyitott mondatok

53–55. óra 59–61. óra **Táblázatok, grafikonok**

Adatok rendezése táblázatok segítségével. Táblázatba foglalt adatok értelmezése, összehasonlítása. *Oszlopdiagramok, pontdiagramok, töröttvonal-diagramok* készítése gyűjtött adatokból, illetve táblázat alapján. Kész diagramok elemzése.

Természetes számok, illetve tizedestörtek ábrázolása számegyenesen. Hőmérsékletmérés, hosszúságmérés, tömegmérés. Egyszerű szövegek értelmezése.

Tk. 3.01–3.09.; Mgy. 6.01–6.06., 6.35–6.40.; Fgy. 5.1.03., 5.1.05–06.

56–57. óra 62–63. óra **Összefüggések, sorozatok**

Táblázat kitöltése, sorozat folytatása adott szabály alapján, Táblázatban adott adatpárokhoz, illetve néhány elemmel adott sorozathoz szabály(ok) keresése.

Algebrai műveletek gyakorlása. Műveleti tulajdonságok, műveleti sorrend, zárójelek használata. Pénzhasználat (euró, cent).

Tk. 3.10–3.18.; Mgy. 6.07–6.19., 6.22., 6.41–43.;
Fgy. 5.1.01–04., 5.1.07., 5.1.19–20., 5.3.01–03., 5.3.16–18.

58–60. óra 64–66. óra **Arányos következtetések**

Egyenes arányossági következtetések egyről többre, többről egyre, többről többre. A mindennapi élettel kapcsolatos szöveges feladatok megoldása.

Szorzás, osztás. Mértékegységek alkalmazása, pénzhasználat. Grafikonok vizsgálata.

Jobb képességű csoportban: Ismerkedés fordított arányossági feladatokkal.

Tk. 3.19–3.22.; Mgy. 2.74–2.85., 2.86–2.94.

67–68. óra **Egyenlet, egyenlőtlenség**

A fejezet feldolgozását jobb képességű csoportban javasoljuk.

Az egyes műveletek gyakorlásánál találkoztak a tanulók következtetéssel egy, esetleg két-három lépésben megoldható egyenletekkel. Ebben a részben az ott szerzett tapasztalatokat tudatosítjuk.

Műveletek közti összefüggések.

Tk. B3.01–B3.14.; Mgy. 9.45–9.50.; Fgy. 1.2.47., 1.2.57., 1.2.60–63., 1.2.65.

61–66. óra 69–74. óra **Gyakorlás, rendszerezés**
3. dolgozat, az első félévet záró felmérés

Gyakorlás, értékelés. A hiányosságok pótlása, a folyamatos ismétlés megtervezése.

Tk. 3.23–3.35., B3.15–B3.21., 3.36.; Mgy. 9.43–9.47.; Fgy. 5.2.05–07.

4. Geometriai alakzatok

67–69. óra 75–77. óra **Ismerkedés testekkel, felületekkel, vonalakkal**
Egyenesek kölcsönös helyzete a síkon

Testek, felületek, vonalak; szakasz, egyenes, félegyenes; szakaszmásolás. A körző és a vonalzó használata. *Egyenesek merőlegessége, egyenesek párhuzamossága.* Merőleges, illetve párhuzamos egyenesek „szerkesztése” derékszögű vonalzó segítségével.

Ötödik osztályban a derékszögű vonalzó használatát szerkesztésnek tekintjük.

Tk. 4.01.–4.04., 4.05–4.09.; Mgy. 8.01–8.06., 8.89., 8.92–8.94.; Fgy. 6.2.01.

70–71. óra 78–79. óra **Síkidomok, sokszögek. Egybevágó síkidomok**

Síkidomok, sokszögek csoportosítása különböző szempontok szerint.

Az alsó tagozatban tanultak felelevenítése: Háromszög, négyszög fogalma. A sokszög mint a háromszög, négyszög, ötszög, ... fogalmának általánosítása. Az elnevezések (csúcs, oldal, átló) tudatosítása.

Az egybevágó mint „azonos alakú és azonos méretű" síkidomok keresése.

Halmazok. Állítások logikai értékének eldöntése. A kerület fogalmának előkészítése.

Tk. 4.10–4.12., 4.13–4.15.; Mgy. 8.07–8.08., 8.95–8.97., 8.116–8.119.

72–73. óra 80–81. óra **Téglalap, négyzet (tulajdonságaik, kerületük)**

Az alsó tagozatban tanultak felelevenítése: A téglalap, négyzet fogalma, tulajdonságaik megfigyelése; oldalaik egymáshoz való viszonya, a tengelyes tükrösség vizsgálata papírból kivágott téglalap (négyzet) hajtogatásával. A téglalap kerületének meghatározása konkrét esetekben.

Összeadás, szorzás, műveleti sorrend, zárójelek használata a természetes számok és a pozitív tizedestörtek körében.

Tk. 4.16–4.20.; Mgy. 8.09–8.17.; Fgy. 6.3.11.

74–76. óra 82–84. óra **A terület mérése, mértékegységei**
A téglalap területe

A terület szemléletes fogalma. Négyszögrácsra, háromszögrácsra rajzolt sokszögek területének meghatározása különbözően választott területegységek esetén.

A téglalap területe, a területmérés szabványos egységei. A terület-mértékegységek átváltása. A mindennapi élethez kapcsolódó mérések, számítások; szöveges feladatok.

A szorzás és osztás gyakorlása a természetes számok és a pozitív tizedestörtek körében. Egyenes arányossági következtetések. Hosszúságmérés. A kerületszámítás gyakorlása.

Tk. 4.21–4.26., 4.27–4.32.; Mgy. 8.18–8.29., 8.30–8.37., 6.20–6.21.

77–79. óra 85–87. óra **Téglatest, kocka (tulajdonságaik vizsgálata)**
Síkok és egyenesek, síkok és síkok kölcsönös helyzete a térben
A téglatest hálója, felszíne

Az alsó tagozatban tanultak felelevenítése: A téglatest (kocka) fogalma, elnevezések.

A téglatest modell vizsgálatához kapcsolódva a síkok, illetve síkok és egyenesek párhuzamosságának, merőlegességének megfigyelése. A kitérő egyenesek.

Téglatestek hálójának megrajzolása, a téglatest felszíne, a felszín kiszámítása.

Az összeadás és a szorzás gyakorlása, zárójelek használata, műveleti sorrend.

Tk. 4.33., B4.01–B4.03., 4.34–4.41.; Mgy. 8.38–8.61., 8.120.;
Fgy. 6.5.01–02., 6.5.04–06., 6.5.11.

80–81. óra 88–89. óra **A téglatest térfogata**

Téglatestek építése, térfogatának értelmezése. *A térfogatmérés mértékegységei.*

Oszthatóság. A szorzat csoportosíthatósága. A felszínszámítás. Mértékegységek átváltása.

Tk. 4.42–4.49.; Mgy. 8.62–8.71.; Fgy. 6.5.09–10.

82. óra 90. óra **Az űrtartalom mérése**

Az alsó tagozatban tanultak felelevenítése: Az űrtartalom mérése, mértékegységei.

Kapcsolat az űrtartalom-, illetve a térfogatmérés egységei között.

A térfogatszámítás, illetve a térfogategységek átváltásának gyakorlása.

Tk. 4.50–4.52.; Mgy. 7.12–7.17., 7.40–7.41.

83–86. óra 91–94. óra **Gyakorlás**

4. dolgozat, témazáró felmérés

Vegyes gyakorló- és fejtörő feladatok. A hiányosságok pótlásának megszervezése.

Műveletek a természetes számok és a pozitív tizedestörtek körében.

Tk. 4.53–4.67., B4.04–B4.31. 4.68.

5. A törtek

87–89. óra 95–97. óra **A törtek értelmezése**

A tört értelmezése mint az egység valahányad részének többszöröse. Az egynél nagyobb, az egynél kisebb, illetve az eggyel egyenlő törtek. Egészek törtalakjai. Vegyes számok. Mennyiségek törtrésze. *A tört értelmezése mint több egész egyenlő részekre osztása.* A kétféle értelmezés ekvivalenciája (a szemléletre támaszkodva).

Az osztás értelmezése. Hosszúságmérés. Területszámítás.

Tk. 5.01–5.12.; Mgy. 5.01–5.03., 6.34., 5.11–5.12.; Fgy. 3.1.01–05., 3.1.10.

90–93. óra 98–101. óra **Törtek bővítése, egyszerűsítése**

Törtek összehasonlítása

Törtek bővítése, egyszerűsítése: a törtek végtelen sokféle alakban írhatók fel.

Egyenlő nevezőjű, illetve *egyenlő számlálójú* (pozitív) *törtek összehasonlítása.*

Különböző nevezőjű és számlálójú (pozitív) *törtek összehasonlítása* közös nevezőre hozással, közös számlálójú törtekké alakítással, számegyenesen történő ábrázolással.

A hányados változásai. Törtek ábrázolása számegyenesen. A tizedestörtek bővítése, egyszerűsítése, nagyság szerinti összehasonlítása és rendezése.

A hosszúság és a tömeg mértékegységei. Területszámítás.

Tk. 5.13–5.27.; Mgy. 5.08–5.10., 5.13–5.21., 9.56–9.57.; Fgy. 3.2.01–03.

94–96. óra 102–104. óra **Egyenlő nevezőjű törtek összeadása, kivonása**
Különböző nevezőjű törtek összeadása, kivonása

Azonos nevezőjű, illetve könnyen *azonos nevezőjűvé alakítható törtek összeadása és kivonása* eszközök, rajzos modellek, szemléletes feladatok segítségével. A törtek összegalakja.

Törtek egyszerűsítése, bővítése. Számegyenes. Hosszúságmérés. A téglalap területe. Tizedestörtek összeadása és kivonása.

Tk. 5.28–5.34.; Mgy. 5.24–5.30., 5.32–5.34., 9.58–9.60.; Fgy. 3.3.01–02.

97–98. óra 105–106. óra **Törtek összeadása, kivonása – gyakorlás**

A törtek összeadásáról, kivonásáról tanultak alkalmazása a matematika különböző területein. Egyszerű szöveges feladatok megoldása.

Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Sorozatok folytatása. Hosszúságmérés, tömegmérés, űrtartalommérés, területszámítás.

Tk. 5.35–5.40.; Mgy. 5.35–5.38.; Fgy. 3.3.11., 3.3.13–15., 3.3.22.

99–100. óra 107–108. óra **A törtek szorzása természetes számmal**

A törtek szorzása természetes számmal (eszközök, rajzos modellek, szemléletes feladatok segítségével). Összeg, különbség szorzása. Egyszerű szöveges feladatok.

A szorzás műveleti tulajdonságai. Tizedestörtek szorzása természetes számmal.

Tk. 5.41–5.51.; Mgy. 5.39–5.40., 5.44–5.45.; Fgy. 3.3.26.

101–102. óra 109–110. óra **A törtek osztása természetes számmal**

A törtek osztása természetes számmal (eszközök, rajzos modellek, szemléletes feladatok segítségével). Összeg, különbség osztása. Egyszerű, majd összetett szöveges feladatok.

A műveletek sorrendje, zárójelek használata. Az osztás a szorzás fordított művelete.

Egyenletek, egyenlőtlenségek. Sorozatok.

Mérések, mértékegységek. Kerület-, terület-, felszín-, térfogatszámítás.

Tk. 5.52–5.57.; Mgy. 5.41–5.43., 5.46., 6.52.

103. óra 111–112. óra **Mi a valószínűbb?**

Valószínűségi kísérletek, játékos feladatok. Az adatok rögzítése. Az elemi események (lehetséges kimenetelek) összeszámlálása. „Biztos”, „lehetséges, de nem biztos”, „lehetetlen” események. A relatív gyakoriság és a valószínűség fogalmának előkészítése. A nagy számok törvényének megsejtése.

Mennyiségek törtrésze.

Tk. 5.58–5.59.

113. óra **Törtalakban írt szám tizedestört alakja**

Csak jól haladó csoportban célszerű feldolgozni ezt az anyagrészt.

Tk. B5.01–B5.02.

104–106. óra 114–116. óra **Gyakorlás**

5. dolgozat, témazáró felmérés

Vegyes gyakorló- és fejtörő feladatok.

Az 5. felmérés alapján tapasztalt hiányosságok pótlásának megszervezése.

Műveletek a természetes számok és a pozitív tizedestörtek körében. Mérések, mértékegységek. Szöveges feladatok. Egyenletek, egyenlőtlenségek. Függvények, sorozatok.

Tk. 5.60–5.80., B5.03–B5.31., 5.81.; Mgy. 5.47., 7.42–7.44.

6. Geometriai vizsgálatok, szerkesztések

107–108. óra 117–118. óra **Ponthalmazok, a kör és a gömb**

Két pont távolsága. Ponthalmazok távolságának szemléletes fogalma.

A körvonal, a körlap, a gömbfelület, a gömbtest mint adott tulajdonságú ponthalmaz. A körző és az egyélű vonalzó használata. Szakaszmásolás.

Hosszúságmérés, mértékegységek átváltása Természetes számok és tizedestörtek szorzása 10-zel, 100-zal, 1000-rel.

Környezetismeret: Távolságmérés térképen.

Tk. 6.01–6.09., 6.10.; Mgy. 8.74–8.79., 8.80–81.; Fgy. 6.2.09–10., 6.2.20.

109–111. óra 119–122. óra **Háromszög szerkesztése**

Szakaszfelező merőleges

Téglalap szerkesztése

Háromszög szerkesztése három adott oldalból, a körvonal értelmezéséről, illetve a szakaszmásolásról tanultak alkalmazásaként (a szakaszfelező merőleges szerkesztésének előkészítése). A „szerkesztés” fogalma. A szerkesztéses feladatok megoldásának lépései. A háromszög-egyenlőtlenség felismertetése.

A szakaszfelező merőleges fogalma, szerkesztése. Szakaszfelezés. *A helyi tanterv alapján döntsük el, hogy 5. vagy 6. osztályban tanítjuk ezt az anyagrészt!*

Hosszúságmérés. A hosszúság mértékegységeinek átváltása. A háromszög kerületének meghatározása.

Jobb csoportban: Egyenes adott pontjára merőleges egyenes szerkesztése. Téglalap szerkesztése.

A téglalap kerületének és területének meghatározása.

Tk. 6.11–6.12., 6.13–6.16.; B6.01–B6.02.; Mgy. 8.82–8.88.; Fgy. 6.4.27.

123–124. óra **Testek ábrázolása**

Testek felülnézeti, elölnézeti és oldalnézeti képének értelmezése, megrajzolása.

Térelemek párhuzamossága, merőlegessége. Téglatest ábrázolása, hálója, felszíne, térfogata. Hosszúságmérés.

Tk. B6.03–B6.08.; Mgy. 8.100–8.102.; Fgy. 6.5.07–08.

112–113. óra 125–126. óra **A szögtartomány**
Szögek mérése szögmérővel

Szögtartomány. Elnevezések (a szög csúcsa, szára), jelölések. Az egyenesszög és a derékszög fogalma.

Szögek mérése szögmérővel. A fok, a szögperc és a szögmásodperc fogalma. Adott nagyságú szög megrajzolása.

Törtek összehasonlítása, műveletek törtekkel.

Tk. 6.17., 6.18–6.23.

114–115. óra 127–128. óra **A szögek fajtái**

Elnevezések. A négyszögek szögeinek vizsgálata.

Szögek mérése szögmérővel. Adott nagyságú szög megrajzolása. Időmérés.

Tk. 6.24–6.32.; Mgy. 8.103–8.109., 8.113–8.115.

116. óra 129–130. óra **Tájékozódás a terepen és a térképen**
Tájékozódás iránytűvel, tájolóval

Helymeghatározás, távolságmérés, iránymeghatározás.

Jobb csoportban: Ismerkedés az iránytű vagy a tájoló használatával.

Megjegyzés: A foglalkozást, *természetismeret-órával összevonva,* célszerű terepgyakorlat vagy kirándulás keretében megszervezni.

Szögek mérése szögmérővel. Adott nagyságú szög megrajzolása. Égtájak.

Tk. 6.33–6.34., B6.09.; Mgy. 8.06., 8.72–8.73., 8.110–8.112.

117–118. óra 131–134. óra **Ismétlés, rendszerezés,**
Tájékozódó, fejlesztő értékelés

A geometriai ismeretek rendszerezése, gyakorlása, alkalmazása. Sokszögek vizsgálata a tanult geometriai ismeretek alkalmazásaként.

Fejlesztő értékelés, a felzárkóztatás megszervezése.

Megjegyzés: A gyakorló- és a fejtörő feladatok egy részét célszerű a folyamatos ismétlésre tartalékolnunk.

Tk. 6.35–6.44., B6.10–B6.30., 6.45.

7. Az egész számok

119–121. óra 135–137. óra **Nem elég a természetes szám**
Az egész számok összehasonlítása

Az egész szám fogalmának kialakítása a szemléletre támaszkodva (a hőmérőmodell, a kis autós modell és a készpénz-adósságcédula modell alkalmazása).

Ellentétes mennyiségek; az egész, a természetes, a pozitív, a negatív szám fogalomrendszere. Elnevezések, jelölések. Az egész számok ábrázolása számegyenesen, nagyság szerinti összehasonlításuk.

Természetismeret tantárgy: A hőmérséklet mérése, tengerszint feletti magasság.

Relációk, halmazok.

Tk. 7.01–7.05., 7.06–7.09.; Mgy. 4.01–4.02., 4.03–4.07.; Fgy. 2.1.04–05., 2.1.07–09.

122. óra 138. óra **Az egész számok abszolútértéke**

Az egész számokról tanultak gyakorlása. Ábrázolásuk számegyenesen.

Tk. 7.10–7.11.; Mgy. 4.08–4.13.; Fgy. 2.1.01–03.

123–126. óra 139–141. óra **Az egész számok összeadása, kivonása**

Az egész számok összeadása, kivonása, a műveletek szemléltetése modellekkel (hőmérőmodell, kis autós modell, készpénz-adósságcédula modell), illetve vektorokkal.

Az összeadás és a kivonás közti összefüggések megfigyeltetése.

Az elmozdulás mint vektor.

Tk. 7.12–7.23.; Mgy. 4.14–4.30.; Fgy. 2.2.01–11.

142–143. óra **Az összeadás, kivonás gyakorlása**

Jobb csoportban: Egyszerű egyenletek, egyenlőtlenségek megoldáshalmazának meghatározása következtetéssel, a megoldások ábrázolása számegyenesen. Sorozatok, függvények szabályának felírása, a hiányzó elemek megadása a szabály alapján.

Tk. 7.32–7.35., B7.06–B7.11.; Mgy 6.31., 6.50.

127–128. óra 144–146. óra **A derékszögű koordináta-rendszer**

A derékszögű koordináta-rendszer értelmezése. Elnevezések, jelölések. Tájékozódás a koordináta-rendszer négy síknegyedében.

Egész számok. Ponthalmazok. Relációk, függvények. Geometriai transzformációk.

Tk. 7.24–7.27., B7.01–B7.05.; Mgy. 6.25–6.30.

129–130. óra 147–148. óra **Ismétlés, rendszerezés, gyakorlás**
6. dolgozat, a 6. és a 7. témakör zárása

8. Összefoglaló

131–133. óra 149–151. óra **Számok és műveletek I.**

A tízes számrendszer: természetes számok és tizedestörtek írása, olvasása, kerekítése. Szorzás, osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel, ...

Összetett szám- és szöveges feladatok megoldása. Műveleti sorrend, zárójelek használata. Az összeg, a különbség, illetve a szorzat és a hányados változásai.

A hányados változásai.

Tk. 8.01–8.14.; Mgy. 1.01–1.34., 3.01–3.27., 5.48–5.67., 5.94–5.96.

134–135. óra 152–153. óra **Számok és műveletek II.**

A törtek értelmezése, bővítése, egyszerűsítése.

Műveletek törtekkel: törtek összeadása, kivonása, szorzása, illetve osztása természetes számmal. . . . .

Az egész számok értelmezése, összeadása, kivonása. Grafikonok vizsgálata.

A hányados változásai.

Tk. 8.15–8.22.; Mgy. 3.02–3.03., 4.14–4.30., 5.01–5.47.

136–138. óra 154–156. óra **Mérések, mértékegységek, geometria**

Mérések: a hosszúság, az űrtartalom, a tömeg, az idő és a szög mérése, a mértékegységek átváltása.

A téglalap fogalma, tulajdonságai, kerülete, területe.

A téglatest fogalma, tulajdonságai, hálója, felszíne, térfogata.

Alakzatok tulajdonságainak vizsgálata.

Szorzás, osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel, ... Halmazok. Derékszögű koordináta-rendszer.

Tk. 8.23–8.36.; Mgy. 7.01–7.44., 8.01–8.112.

139–144. óra 157–162. óra **7. dolgozat, összegző tanévzáró értékelés**

Az esetleges hiányosságok pótlása.

Speciális pedagógiai feladatok megoldása.

A TANANYAG FELDOLGOZÁSA

1. Számok, mennyiségek

A fejezet első felében közvetlenül kapcsolódunk, az alsó tagozatos tananyaghoz. Az alsó tagozatban drasztikusan csökkentek az óraszámok, ezért a következő területeken kimutathatóan csökkent a tanulók tudásszintje:

szám- és műveletfogalom,

szöveges feladatok értelmezése, megoldása,

mérőeszközök alkalmazása, mértékegységek átváltása,

a legegyszerűbb geometriai fogalmak ismerete.

A PISA-felmérések hatására hangsúlyeltolódás tapasztalható a matematika követelmények terén, úgy, hogy a követelmények összességében nem csökkentek.

A PISA-vizsgálatban a magyar tanulók „nem tudták alkalmazni a tanultakat" a gyakorlati jellegű feladatokban. Ezért törekednünk kell a mindennapi élet problémáiból kiinduló „gyakorlatorientált" tananyag-feldolgozásra.

A tanulók jelentős hányadából hiányzik a hajlandóság és a képesség a problémák önálló megoldására.

A magyar tanulók (minden felmérésben) gyenge teljesítményt nyújtottak a szöveges feladatok megoldásában.

Előnytelenül változott meg a felső tagozatba lépő tanulók matematikához való viszonya, munkatempója, problémamegoldó képessége. (Lassabban és kevésbé sikeresen dolgoznak.)

A fentiek alapján föltétlenül mérjük fel,

mennyire biztos a tanulók számfogalma,

képesek-e egyszerű (ismereteiktől nem idegen, rövid mondatokat tartalmazó) szöveg elemi információtartalmát önálló néma olvasással értelmezni,

ismerik-e a mérőeszközök használatát és a legalapvetőbb mértékegységeket,

tudják-e a tanultakat a mindennapi gyakorlatban alkalmazni.

A fejezet második részében szemléletes gyakorlati példákra (mértékegységek átváltására, illetve az euró és a cent fogalmára) támaszkodva bevezetjük a tizedestörtek fogalmát.

A tananyag-feldolgozásnak ezt a módját a következőkkel indokolhatjuk:

A tizedestörtek fogalma sokkal inkább kapcsolódik a korábban kialakult számfogalomhoz, mint a törtekhez.

Az életkori sajátosságoknak megfelelően a tárgyi tevékenységből (mérésekből, pénzváltásból) indulunk ki. *A konkréttól haladunk az absztrakt felé, illetve a speciálistól az általános felé.* Ezzel eleget teszünk a gyakorlatorientált megközelítés koncepciójának is.

Egész évben gyakoroltathatjuk a tizedestörtekről tanultakat.

Ezzel a feldolgozási sorrenddel a nehezebben haladó csoportokban akár 10–12 órát is megtakaríthatunk, amely részben kompenzálja a tanulók hiányos felkészültségéből és lassú munkatempójából eredő időveszteséget.

Az 5. fejezetben, a törtek tárgyalása során visszatérünk a tizedestörtek fogalmának pontosításához, megerősítéséhez.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. A természetes számkör bővítése első lépésben százezerig, majd egymillióig. (*Jobb csoportban:* Barátkozás a római számírással.) Pénzhasználat. A természetes számok ábrázolása különböző beosztású számegyenesen, nagyság szerinti összehasonlításuk. Egyszerű egyenlőtlenségek igazsághalmazának meghatározása, az igazsághalmaz szemléltetése számegyenesen. Szorzás, osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel (a korábban tanultak felelevenítése; a mértékegységek átváltásának előkészítése).

2. Hosszúságmérés, tömegmérés. Becslés, összehasonlítás, megmérés, kimérés. A mérőeszközök használatának megismerése, gyakorlása. A mértékegységekről tanultak felelevenítése, kiegészítése. Tudatosítjuk és megerősítjük a (korábban már tanult) tized, század és ezred fogalmát. Ezzel előkészítjük a tizedestörtek tanítását. A mértékegységek átváltása során a 10-zel, 100-zal, 1000-rel való szorzás, osztás gyakorlása. A tanultak alkalmazása a mindennapi élettel kapcsolatos gyakorlati jellegű feladatokban.

3. Az euró és a cent fogalma, használata gyakorlati jellegű feladatokban. A tizedestörtek előkészítése.

4. A tizedestörtek értelmezése szemléletre (euró–cent, mértékegységek átváltása) alapozva. Tizedestörtek ábrázolása számegyenesen. Tizedestörtek egyszerűsítése, bővítése.

5. Pontos érték, közelítő érték. A természetes számok kerekítéséről tanultak felelevenítése, tudatosítása. A tizedestörtek egész, tized, század, ezred szomszédai. Tizedestörtek kerekítése. A mérés pontosságának jelzése.

Kapcsolódási lehetőségek

A fejezet gerince a természetes számokról korábban tanultak átismétlése és kiterjesztése magasabb számkörre, majd a tizedestört alakban írt pozitív racionális számokra. Ehhez kapcsolva minden egyéb témakör átismételhető.

Halmazok, logika

A „kisebb", „nem kisebb", „nagyobb", „nem nagyobb" fogalma, ehhez kapcsolódóan egyszerű nyitott mondatok megoldáshalmaza. A 10-zel, 100-zal, 1000-rel osztható számok halmazának egymáshoz való viszonya. Állítások logikai értékének eldöntése, tagadás, halmaz komplementere, logikai „és", két halmaz metszete, (konkrét feladatokhoz kapcsolódva). A „kisebb vagy egyenlő" stb. reláció értelmezésekor a logikai „vagy" fogalma.

Relációk

A természetes számok, majd a pozitív tizedestörtek nagyság szerinti összehasonlítása.

Mérések, pénzhasználat

A hosszúság- és a tömegmértékegységek, valamint a forint és az euró használata, átváltása központi szerepet kap a természetes számokról korábban tanultak gyakorlásában, a számfogalom kiterjesztésében magasabb számkörre, majd a tizedestörtek fogalmának kialakításában. Táblázatok elemzése (pl. **1.26.** feladat). Az adatok pontosságának, illetve hibájának a kérdése.

Kombinatorika; statisztika

Adott tulajdonságú számok kirakása számkártyákkal (pl. **1.19–1.21.** feladat).

A tananyag-feldolgozás áttekintése

A tízes számrendszer

A véges halmazok számosságát nevezzük természetes számoknak. Van olyan halmaz, az üres halmaz (ilyen például a 4-gyel osztható páratlan számok halmaza), amelynek nincs eleme, vagyis a halmaz számossága 0. Tehát ebben az értelmezésben a 0 is természetes szám.

Megjegyezzük, hogy korábban a 0-t az alsó tagozatban nem számnak, hanem „helypótló jelnek" tekintették. Sajnos ez az értelmezés még ma is kísért! Sokszor tapasztaljuk, hogy a gyermekek következetesen kihagyják a 0-t a vizsgálatokból. Az ebből eredő típushibák közül néhány:

Ha az alaphalmaz a természetes számok halmaza, akkor a gyerek nem sorolja fel az $x \leqq 5$ egyenlőtlenség megoldásai közt a 0-t.

A gyerek úgy véli, hogy „a 0 olyan szám, amelyik se nem páros, se nem páratlan”. A gyerek kihagyja a 0-t a számok többszörösei közül.

Mivel a természetes szám véges halmaz számossága, ezért a természetes számokat használjuk fel a tárgyak *megszámlálásakor* (amikor a halmazhoz számot rendelünk), és a tárgyak *leszámlálásakor* (amikor adott számhoz halmazt rendelünk hozzá).

Ha sok tárgyat vagy jelet kell megszámlálnunk, akkor csoportosítással segítünk magunkon. Így jutunk el a számrendszer, speciálisan *a tízes számrendszer, a helyiértékes írásmód* fogalmához.

Ha alsó tagozatban csak 10 000-es számkörben dolgoztak a tanulók, akkor először 100 000-ig, majd innen 1 000 000-ig lépjünk tovább a számfogalom kialakításában.

Tájékozódás a számegyenesen

A számegyenessel alsó tagozatban sokszor találkoztak a gyerekek, és 5. osztályban valamennyi témakör tárgyalásakor eszközként használhatjuk. Éppen ezért most az év elején gyűjtsük össze azokat a matematikai és módszertani gondolatokat, amelyek egész tanévben segíthetik a munkánkat. A számfogalom, a számkör bővítése, kerekítés, műveletek végzése, becslés, számsorozatok, a derékszögű koordináta-rendszer, grafikon bármelyikének tárgyalásához, az alaphalmaz és az igazsághalmaz szemléltetéséhez nélkülözhetetlen a számegyenes.

Néhány módszertani javaslat, feladatféleség:

Igaz, hogy alsó tagozatban sokszor találkoztak a számegyenessel a gyerekek, de lehet, hogy némelyikük például az 5 helyét nem egy pontnak, hanem a 0 és 5 közötti szakasznak látja.

Ne csak olyan számegyenest lássanak, amelyen a 0 és az egység jól leolvasható, hanem két bármilyen szám helyével adottat is.

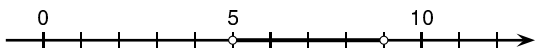
Jelöltessünk meg többféle számsorozatot ugyanazon a számegyenesen, ezzel előkészíthetjük például a közös osztó, a közös többszörös fogalmát.

Lépegessenek a tanulók adott számmal előre, hátra a számegyenesen. Ez egyrészt elősegíti a számfogalom megszilárdulását, másrészt előkészíti az egész számok összeadását és kivonását.

Ne csak „vízszintes helyzetű” számegyenest lássanak. Gondoljunk például a koordinátatengelyek helyzetére, amiről majd később tanulnak.

Jelöltessünk számközt is. Ilyenkor ne feledkezzünk meg az alaphalmaz szerepéről, meghatározó voltáról.
Ha az alaphalmaz a természetes számok halmaza, akkor az 5-nél nagyobb és 10-nél kisebb számok helye a számegyenesen négy pont:

Ha az alaphalmaz a racionális számok halmaza, akkor mindenütt sűrűn helyezkednek el a számok. Ezt a sűrűséget már szakasszal szoktuk jelölni:



Kisebb, nem kisebb; nagyobb, nem nagyobb

A matematikai pontosság miatt tisztáznunk kell, hogy a „kisebb” ($<$) *tagadása* nem a „nagyobb”, hanem a „nagyobb vagy egyenlő”, más szóval „nem kisebb” ($\geqq$). Hasonlóan a „nagyobb” tagadása a „nem nagyobb”.

Ezeket a kapcsolatokat célszerű konkrét halmazokon megjelenítenünk. A *tagadásnak* (negációnak) mint logikai műveletnek a halmaz *kiegészítő halmaza* (komplementere) felel meg. Tisztáznunk kell, hogy ha (nyitott mondattal) megadunk egy halmazt, az azt jelenti, hogy az alaphalmaz minden eleméről eldönthetjük, hogy beletartozik-e a halmazba, vagy sem. Az alaphalmaznak azok az elemei, amelyek nem tartoznak az adott halmazba, alkotják a halmaz kiegészítő halmazát. Halmazábrán ezt úgy jeleníthetjük meg, hogy minden „halmazkarikához” két címke tartozik, a „belső” a halmazt, a „külső” a halmaz kiegészítő halmazát jelöli.

Fontos, hogy számegyenesen is szemléltessük a számok egymáshoz való viszonyát és az egyszerű egyenlőtlenségek megoldáshalmazát. Ha egy-egy beosztás például ezret jelent, akkor már tisztázhatjuk az „üres”, illetve „nem üres karika” szerepét is a szemléltetésben. *Például:*

Szorzás és osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel, …

A címben foglalt ismeretrendszer része az alsó tagozatos követelményeknek. Ennek ellenére – a felmérések tapasztalata szerint – néhány feladat megoldásával nem intézhetjük el ennek a témakörnek a felelevenítését. A tanulók tudása az osztályok egy részében meglehetősen bizonytalan és sajnos mechanikus. Esetleg tudják, hogy hogyan kell, de nem értik, hogy miért úgy kell szorozni, illetve osztani a 10 hatványaival. Mivel az írásbeli szorzás és osztás, majd később a tizedestörtek 10-zel, 100-zal, 1000-rel, … való szorzásának elsajátításához nélkülözhetetlen a most tanultak megértése, ezért súlyos hibának kell tekintenünk a „szabályok” megértés nélküli beszajkóztatását, még ha első pillanatra egyszerűbbnek tűnik is ez a „megoldás”. A mechanikusan betanult, ezért lényegében alkalmazhatatlan ismeretek kedvezőtlen következményeit (a felmérések szerint) még 8. osztályban is tapasztaljuk.

A tanulók a szemlélethez jól kapcsolódó feladatok megoldásával gyűjtsenek minél több tapasztalatot annak az összefüggésnek felismeréséhez, hogy ha például 10-zel szorzunk, akkor az egyesekből tízesek, a tízesekből százasok stb. lesznek a szorzatban. Vagyis ha 10-zel, 100-zal, 1000-rel szorzunk, akkor a szorzandó minden számjegye eggyel, kettővel, hárommal … nagyobb helyiértékű helyre kerül, ezért kell a szorzatban a szorzandó után nullát, illetve nullákat írnunk. Ötödik osztályban elegendő, ha az összefüggést a konkrét szorzóra (például 1000-re) fogalmazza meg a tanuló.

A 10-zel, 100-zal, 1000-rel … való osztás megtanításakor támaszkodhatunk annak a felismertetésére, hogy az osztás a szorzás fordított művelete. A szabályok megfogalmazása helyett (a tizedestörtekről tanítandók miatt) jobb, ha a tanulók képesek felismerni, hogy mely számok oszthatók (maradék nélkül) 10-zel, 100-zal, 1000-rel … .

Hosszúságmérés
Tömegmérés

A matematika gyakorlati alkalmazására nevelés fontos feladata a mérésekkel kapcsolatos ismeretrendszer megszilárdítása, „összeszövése" az aktuális tananyaggal. Ugyanakkor a mérésekről tanultak felelevenítése a tízes számrendszer erősítését is szolgálja. Különösen a hosszúság és a tömeg (majd később az űrtartalom) szabványos mértékegységei tükrözik jól a tízes számrendszer helyiértékeit. Így a mértékegységek közti kapcsolatok átismétlésével mintegy előkészítjük a tizedestörtek fogalmát. Ezért nagyon fontos hogy szemléltessük és tudatosítsuk például a következőket:
„*deci*méter = *tized* méter", „*centi*méter = *század* méter", „*milli*méter = *ezred* méter".

A mértékegységek átváltásakor eszközként alkalmazzuk a 10-zel, 100-zal, 1000-rel ... való szorzásról és osztásról tanultakat.

A hosszúság és tömeg mértékegységeivel együtt átismételjük és kiegészítjük mindazt, amit a mérésről eddig tanultak a gyerekek. Az alsó tagozatban szerzett tapasztalatok felelevenítése és a szemléleti alapozás megszilárdítása céljából *mérjenek meg és mérjenek ki* most is konkrét hosszúságot és tömeget alkalmilag választott és szabványmértékegységgel is. *Például:*

Hány arasz, hány deciméter a pad (az asztal) hossza?

Körülbelül hány kilogramm az iskolatáska tömege?

Hány matematika-tankönyv tömegével egyenlő az iskolatáska tömege?

A konkrét mérések alapján fogalmazódjon meg a mérés lényege: *a mérés mindig összehasonlítás.*

Ha adott mennyiségeket hasonlítunk össze a választott mértékegységgel, akkor azt számoljuk meg, hogy hány egységből áll a mérendő mennyiség.

Ha ismert mennyiséget mérünk ki a választott mértékegységgel, akkor adott mérőszámhoz rendeljük a kimérendő mennyiséget.

Minden mérés pontatlan. Így mind a méréssel megállapított mérőszám, mind a mérőszámhoz rendelt kimért mennyiség csak megközelítően felel meg egymásnak.

A mérendő mennyiség általában nem egészszámszorosa az egységnek. Például a tankönyv hosszúságát deciméterrel mérve azt kapjuk, hogy 2 dm-nél több és 3 dm-nél kevesebb:

$$2 \text{ dm} < \text{a tankönyv hosszúsága} < 3 \text{ dm}.$$

Ezért szükséges, hogy az egységet kisebb részekre osszuk. A decimétert tíz egyenlő részre osztva kapjuk a centimétert. Ezzel is mérve azt kapjuk, hogy a tankönyv hossza 28 és 29 centiméter között van:

$$28 \text{ cm} < \text{a tankönyv hosszúsága} < 29 \text{ cm}.$$

Most kisebb mértékegységgel mértünk, így kisebb lesz *a mérés hibája.* Majd a tizedes törtek tanulásakor a centiméter pontosságú mérést deciméterekkel is kifejezhetjük:

$$2{,}8 \text{ dm} < \text{a tankönyv hosszúsága} < 2{,}9 \text{ dm}.$$

Most a mérőszám nem egész, hanem törtszám.

Általában a mérés kivezet a természetes számok köréből. Az egység kisebb részével, részeivel mérve eljutunk a pozitív törtszámok, sőt a pozitív valós számok körébe. A valós számokról nyilván 5. osztályban nem beszélünk, de azt fontos tudatosítanunk, hogy a gyakorlati mérés sohasem lehet pontos. Ezért gyakran használjuk a közelítést kifejező szavakat: „körülbelül"; „több, mint …"; „kevesebb, mint …"; „majdnem …"; „… és … között van"; stb.

Minden mérést előzzön meg becslés!

Először egyezzünk meg abban, hogy milyen pontossággal érdemes becsülni. Ez a pontosság nemcsak egy-egy mértékegység lehet, hanem esetleg egy mértékegység többszöröse is. (Hangsúlyozzuk, hogy a becslés nem jelenthet parttalan találgatást!) *Például:* Valószínű, hogy az iskolaudvar hosszát nem méter pontossággal, hanem 10 méter pontossággal becsüljük. Ehhez feltétlenül szükséges, hogy konkrét képünk, tapasztalatunk legyen a 10 méter hosszúságról. Esetleg készíttessünk 10 méteres mérőzsinórt is. Igen hasznos lehet, ha a folyosón, udvaron kimérünk és megjelölünk néhány kerek mérőszámú távolságot, például 10 m-t, 20 m-t, 50 m-t, 100 m-t. Ezeknél kisebb hosszúságokat a tanteremben jelöljünk ki. Így ha bármikor a tanév folyamán segíteni akarunk adott hosszúság becslésében, a feladatokban szereplő mennyiségek elképzelésében, összehasonlításában, a köztük lévő összefüggések meglátásában, hivatkozni tudunk a kimért és megjegyzett hosszúságokra. Ily módon elérhetjük, hogy a gyermek tapasztalataiból kiindulva „gondolkozva" becsül, nem csupán találgat.

A becslés eredményét kifejezhetjük egyetlen mennyiséggel (körülbelül 140 m), vagy egy mennyiség-intervallummal (140 m és 150 m között).

Milyen pontossággal érdemes becsülni? A választott pontosság függ a mennyiség (hosszúság, tömeg) nagyságától. *Például:* Becsültessük meg a gyerekkel az iskola és az otthona távolságát. A távolságok között adódhat olyan, amelyet 10 m pontossággal, és lehet olyan is, amelyet 500 m vagy annál is kisebb pontossággal hasznos becsülni. Az az általános tapasztalat, hogy a kielégítően becsült mennyiség mérőszámában az értékes számjegyek száma egy, vagy legfeljebb kettő. A következő példákban az értékes számjegyek száma kettő (az 1 és az 5):

a négyemeletes ház magassága hozzávetőlegesen 15 m;

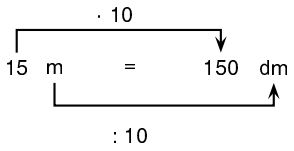
két utcasarok távolsága körülbelül 150 m;

egy út hossza 1500 m körül van.

Ugyanazt a mennyiséget többféle mértékegységgel is mérjük! Sok és sokféle tapasztalat segít az egység, a mennyiség és mérőszám közti kapcsolat tudatosításában. Éppen ezért a tankönyv többi fejezetében is sokszor találkozunk olyan feladattal, amelynek a megoldása újra és újra tudatosítja ezt az összefüggést.

Ha ugyanazzal a mértékegységgel mérünk, akkor a nagyobb mennyiséghez nagyobb mérőszám tartozik.

Például: A tanterem hosszúsága: 15 m; szélessége: 8 m. Ha ugyanazt a mennyiséget kisebb mértékegységgel mérjük, akkor nagyobb lesz a mérőszám.



Majd 6. osztályban még tudatosabban foglalkozunk ezekkel az összefüggésekkel, és felhasználhatjuk az egyenes és fordított arányosság igazolására is.

A tömeggel kapcsolatban is járjuk végig a becslés, mérés felsorolt lépcsőit.

Megjegyezzük, hogy a matematika tanulása során sokkal többször találkoznak a gyerekek a hosszúsággal, mint bármilyen más mennyiséggel. Ennek az az oka, hogy a távolság matematikai fogalom is, míg például a tömeg és az idő fizikai fogalom.

Euróval fizetünk

A tanultak alkalmazása a mindennapi gyakorlatban. Ugyanakkor az euró és váltópénze, a cent jó modellt szolgáltat a tizedestörtek fogalmának kialakításához, majd később a tizedestörtekkel való számolási algoritmusok szemléletre alapozó bevezetéséhez.

A fentiek miatt fontos az euró és a cent közti kapcsolat tisztázása. *Például:*

1 cent = $\frac{1}{100}$ €; 5 cent = $\frac{5}{100}$ €; 10 cent = $\frac{1}{10}$ € = $\frac{10}{100}$ €;

30 cent = $\frac{3}{10}$ € = $\frac{30}{100}$ €; 34 cent = $\frac{34}{100}$ €; 356 cent = $\left(3+\frac{56}{100}\right)$ €

Az alsó tagozatos ismeretekre támaszkodva egyszerű számításos feladatokat is végezzenek a tanulók a pénzhasználathoz kapcsolódóan.

A tizedestörtek értelmezése

Ha az előző három fejezetben a mértékegységek átváltását és az euró és váltópénzének használatát jól begyakoroltatva sikeresen megszilárdítottuk a „tized”, a „század” és az „ezred” fogalmát, akkor ezen ismeretekre támaszkodva bevezethetjük a tizedestörtek fogalmát. Ezzel eleget teszünk a fogalom kialakításakor ránk háruló feladatnak. Egyrészt meg kell mutatnunk, hogy a tizedestörtek is törtek (5. osztályban nem foglalkozunk a végtelen nem szakaszos tizedestörtekkel), másrészt meg kell értetnünk a természetes számoknál tanult tízes számrendszer helyiértékeinek kibővítését.

Mivel a mértékekkel, mértékegységekkel vezetjük be ezt a fogalmat, gyakoroltatjuk a mértékváltást, és kapcsolatot teremtünk a törtekkel (*például:* 1 cm = $\frac{1}{100}$ m), végül az egység különböző megválasztásával az egészrész, törtrész fogalmát készítjük elő. A helyiérték-táblázatot minden esetben használjuk addig, amíg a tanulók bizonytalanok a különböző helyiértékekben. Fordítsunk különös gondot a tizedestörtek pontos kimondására, valamint írására. Ezáltal elkerülhető a „helypótló” nullák szerepének hiányos ismerete miatti hiba. Például ne fogadjuk el az 5,06 ilyen kimondását: „öt egész nulla hat”; követeljük meg a helyes „öt egész hat század” kimondást.

A fogalom bevezetésének ez a szemléletre építkező induktív útja megfelel a tanulók életkori sajátosságainak. Ugyanakkor a törtek tárgyalása során, az 5. fejezetben ismételten visszatérünk a tizedestörtekkel kapcsolatos fogalomrendszerre, és megmutatjuk, hogy a tizedestörtekre tanult eljárások speciális esetei a törtekre tanult megfelelő szabályoknak. A két megközelítés szintézise eredményezi végül azt, hogy meg tudjuk teremteni a racionális szám fogalmának kialakításához az alapot.

Tizedestörtek ábrázolása számegyenesen

Ez a fejezet nem jelent teljesen új anyagot. A természetes számok ábrázolásáról tanultakat kell általánosítanunk. (Ezért alkalmunk nyílik az esetleges korábbi hiányosságok pótlására.) Az egység, majd az egy tized egység stb. beosztása 10 egyenlő részre, elmélyíti a tized, század stb. fogalmát. Ugyanakkor ezzel a fejezettel nem tekinthetjük lezártnak a tizedestörtek ábrázolásának megtanítását. Az 5. fejezetben, a törtek ábrázolásának tanításakor speciális esetként föltétlenül ki kell térnünk a tizedestörtek ábrázolására is.

Tizedestörtek egyszerűsítése, bővítése, összehasonlítása

A tizedestörtek egyszerűsítését, bővítését a mértékváltással tehetjük szemléletessé:

Például: 1 dm 2 cm = 1 dm 20 mm, vagyis 1,2 dm = 1,20 dm

2 és fél kg = 2 kg 50 dkg = 2 kg 500 g, azaz 2,5 kg = 2,50 kg = 2,500 kg

A tizedestörtek nagyság szerinti rendezésére mindhárom módszert – egyszerűsítés, bővítés; számegyenesen való ábrázolás; helyiértékek összehasonlítása – alkalmazzuk.

Gyakori hiba az alaki- és a helyiértékek „keverése". Például ilyen hiba: 0,12 > 0,8; mivel 12 > 8. (Ennek a hibának forrása lehet a helyiérték fogalmának hiányos volta, valamint a helytelen analógia.) Mind a számegyenesen való ábrázolással, mind a helyiértéktáblázatba való beírással kiküszöbölhető, illetve korrigálható ez a hiba.

Például a **1.85.** *k)* feladatban a számpárok közé eső tizedestörtek megkereséséhez bővítsük a tizedestörteket.

$3{,}2 < \square < 3{,}3$ bővítése: $3{,}20 < \square < 3{,}30$; $3{,}200 < \square < 3{,}300$ stb.

Így problémaszituációban mélyíthetjük el a tanultakat.

Tisztázzuk azt, hogy a tizedestört végére írt nullák mást jelentenek akkor, ha pontos értékről, illetve ha közelítő értékről van szó.

Pontos érték esetén: $1{,}6 = 1{,}60 = 1{,}600 = \ldots$;

Közelítő érték esetén: $x \approx 1{,}6$, akkor $1{,}55 \leqq x < 1{,}65$;

$x \approx 1{,}60$, akkor $1{,}595 \leqq x < 1{,}605$; stb.

Pontos érték, közelítő érték, kerekítés

A természetes számok kerekítése

Minden évfolyamban követelmény a számok (dolgok sokaságának), mennyiségek, műveletek eredményeinek megbízható becslése. A megfelelő, célszerű becslés az ellenőrzés alapja. A becsült értéket általában kerekített értékkel adjuk meg. A gyakorlati életben is sokszor találkozunk a kerekített számokkal (értékekkel). A statisztikai adatok rendszerint ilyenek.

A kerekített értéket most se tévesszük össze a közelítő értékkel. Sokszor előfordul, hogy a két fogalom összemosódottan jelenik meg, vagy egymást helyettesítő szavak, vagy azonos tartalom van mögötte. Ötödik osztályban sem tudjuk a kettőt élesen megkülönböztetni egymástól. A közelítő érték fogalma még túlságosan elvont.

A méréssel kapott közelítő értéket rendszerint kerekítjük. Például a Kékes megközelítőleg 1014 méter, ennél pontosabban már nem is célszerű megmérni. Ezt a magasságot kerekíthetjük tízesekre is (1010 m), százasokra is (1000 m). Ez most megegyezik az ezresekre kerekített értékkel is.

A közelítő érték egy intervallumban bármely számot jelenthet. Ezért a számegyenesen egy szakasz bármely pontja megfelelhet a számnak. Szemléletesen úgy is szokták mondani, hogy a közelítő értéknek egy szakasz felel meg a számegyenesen.

A számok kerekítését az alsó tagozatban szerzett tapasztalatok, ismeretek alapján végezzük.

Megállapítjuk, hogy milyen értékre kerekítünk. A kerekítés értékének megállapítását befolyásolhatja a szám, mennyiség nagysága és a kerekítés célja, a kerekített érték felhasználása. Szöveges feladatok, gyakorlati problémák esetén ezt nem nehéz eldönteni. Például, ha Miskolc és Szeged lakosságának számát hasonlítjuk össze, akkor a tízezres pontosság is elegendő. De ha azt szeretnénk megállapítani, hogy egy adott tanévben hány általános iskolai tanulóra lehet számítani, akkor már a népesség pontosabb megállapítására van szükség.

A gyakorlásra nemcsak most, hanem a teljes tanév folyamán érdemes a minden évben megjelenő Statisztikai zsebkönyv adatait felhasználni. Egy-egy területtel kapcsolatos adathalmaz kerekítése, nagyságrendjük megállapítása, esetleg grafikon készítése csoportmunkával is történhet. Minden csoport más-más adathalmazt dolgozhat fel. Így kevesebb idő alatt több oldalról ismerkedhetnek meg a tanulók például Magyarország népességi, földrajzi és gazdasági adataival, mint ha a teljes osztály közös munkájával végeznénk ilyen vizsgálatokat.

Tizedestörtek kerekítése

Kapcsoljuk az egészek kerekítéséhez, így itt is felhasználjuk az ún. „számszomszéd" fogalmát.

Például: 15 tízes szomszédai: $10 < 15 < 20$;

3,8 egyes szomszédai: $3 < 3{,}8 < 4$;

5,28 tized szomszédai: $5{,}2 < 5{,}28 < 5{,}3$

„Eszközként" – amíg problémát jelent a tanulóknak – feltétlenül használjuk a számegyenest. Problematikus lehet tizednek a tized szomszédja, századnak a század szomszédja stb. Az előzőek szerint:

3,6 tized szomszédai: $3{,}5 < 3{,}6 < 3{,}7$;

de 3,65 tized szomszédai: $3{,}6 < 3{,}65 < 3{,}7$

A számszomszédok segítségével meg tudjuk mutatni, hogy ugyanazt az algoritmust alkalmazzuk itt is, mint az egészek körében.

Például: 328 tízesekre kerekítve: a közelebbi tízes szomszéd: 330;

3,28 tizedekre kerekítve: a közelebbi tized szomszéd: 3,3

A mérés pontosságának jelzése

A kerekítést a gyakorlati élet kívánja meg, ezért feltétlenül vizsgáljuk meg azt is, hogy milyen pontosan adtunk meg egy mennyiséget. (Mit jelentenek a szám végére írt nullák?)

Például: Ha $m \approx 120$ kg, akkor (ha mást nem mondunk) $115 \text{ kg} \leqq m < 125 \text{ kg}$;

ha $m \approx 123$ kg, akkor $122{,}5 \text{ kg} \leqq m < 123{,}5 \text{ kg}$;

ha $m \approx 123{,}0$ kg, akkor $122{,}95 \text{ kg} \leqq m < 123{,}05 \text{ kg}$.

Gyakorlófeladatok
Tudáspróba

A gyakorlófeladatok többsége a minimumszintű követelményekhez kapcsolódik.

További gyakorlófeladatokat találhatunk a **Matematika 5. Gyakorló** 1., 5., 7., illetve 9. fejezetében. A tehetséges tanulóknak ajánljuk a **Matematika 5–6. Feladatgyűjtemény** megfelelő feladatsorait.

A tankönyvben található tudáspróba önálló (esetleg otthoni) munkára szánt, önértékelés célját szolgáló feladatsor. Minősítő értékelésre (dolgozatíratásra) alkalmas feladatokat a **Felmérő feladatsorok** című füzetekben találhatunk.

2. Algebrai műveletek

Ebben a fejezetben a négy alapműveletről tanultak felelevenítésével folytatjuk az alsó tagozatban tanult számtan, algebra tananyag ismétlését. Tapasztalatok szerint a korábban tanult ismeretek közül az osztással van legtöbb gondjuk a tanulóknak. Ha 4. osztályban a helyi tanterv szerint csak az egyjegyű osztóval történő osztással ismerkedtek meg a tanulók (esetleg azzal is csak felületesen a tanév végén), akkor a tanmenetben előírtnál több órát fordítsunk ennek az anyagrésznek a tanítására.

Az alsó tagozatban tanultakat kiterjesztjük az egymilliós számkörre, majd a pozitív tizedestörtekre. (Ezzel gyakoroltatjuk a természetes számok, majd a tizedestörtek írásáról, olvasásáról, kerekítéséről tanultakat is.)

A rendelkezésünkre álló tanítási idő mintegy 40%-ában szöveges feladatok megoldásával foglalkozzunk. **Minimumkövetelmény**, hogy az egyszerű szöveges feladatokat a tanulók önálló néma olvasással képesek legyenek értelmezni, tudják kiválasztani a kérdés szempontjából szükséges adatokat, találják meg a megoldás tervét, becsüljék meg, számítsák ki, majd ellenőrizzék az eredményt, fogalmazzák meg a szöveges választ.

A tananyag gyakorlatorientált felépítéséhez nélkülözhetetlen, hogy az új anyag feldolgozása során folyamatosan alkalmazzuk (és az időméréssel bővítsük ki) a mérésekről, mértékegységekről, illetve a pénzhasználatról tanultakat.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. A természetes számok összeadásának, kivonásának fogalma. A két művelet közti kapcsolat. Az írásbeli összeadás, kivonás gyakorlása az egymilliós számkörben. A hiányosságok pótlása. A tanultak kiterjesztése a pozitív tizedestörtekre. A korábban tanult műveleti tulajdonságok tudatosítása. Összeadással és kivonással megoldható szöveges feladatok, illetve egy lépéssel, következtetéssel megoldható egyenletek, egyenlőtlenségek.
2. A természetes számok szorzásának fogalma, a szorzás tulajdonságai. A hiányosságok pótlása. Az írásbeli szorzás gyakorlása az egymilliós számkörben. Tizedestörtek szorzása természetes számmal. Szorzással (következtetéssel) megoldható szöveges feladatok. Az időmérés. A szorzásról tanultak alkalmazásaként egyszerű oszthatósági feladatok megoldása.
3. A természetes számok osztásának fogalma, a szorzás és az osztás kapcsolata. Írásbeli osztás egyjegyű, majd többjegyű osztóval. Tizedestörtek osztása természetes számmal. Osztással megoldható egyszerű szöveges feladatok.
4. A műveletek sorrendje, zárójelek használata. Összetett szám- és szöveges feladatok. A számtani átlag kiszámítása.
5. Kiegészítő anyagként: nem tízes alapú számrendszerek.

Kapcsolódási lehetőségek

Halmazok, logika

Az elemi logikai és halmazelméleti ismeretek eszközszerű alkalmazása egyszerű nyitott mondatok igazsághalmazának vizsgálata, illetve az oszthatósággal kapcsolatos feladatok megoldásában. A feladatok megoldása során a tanulók megsejthetik a halmazműveletek és a logikai műveletek közti összefüggéseket.

A számtan, algebra egyéb témakörei

A fejezet aktuális tananyagának megtanítása mellett folyamatosan gyakoroltatjuk a természetes számok és a tizedestörtek írásáról, olvasásáról, kerekítéséről, nagyság szerinti összehasonlításáról, számegyenesen történő ábrázolásáról tanultakat.

A műveletek közti összefüggések alkalmazásaként egy (esetleg két-három) lépésben megoldható egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása.

Relációk, összefüggések, sorozatok

A „kisebb”, „nagyobb”, „nem kisebb”, „nem nagyobb”, illetve az „osztója”, „többszöröse” relációk vizsgálata, alkalmazása, ábrázolása.

A számolási készségek fejlesztése céljából eszközjelleggel alkalmazzuk a sorozatokat.

A szorzás és az osztás alkalmazásaként adott szöveges feladatok többsége az egyenes arányosság témaköréhez kapcsolódik.

Mérések, pénzhasználat

Az egyes műveletek értelmezése, majd szöveges feladatokban történő alkalmazása során folyamatosan gyakoroltatjuk a mértékegységekről tanultakat.

Statisztika

A tizedestörtek természetes számmal történő osztásának ismerete lehetővé teszi a mennyiségek átlagának kiszámítását. Táblázatba foglalt adatok értelmezése.

A tananyag-feldolgozás áttekintése

A természetes számok összeadása
A természetes számok kivonása

Ebben a részben a hiányok pótlására, a műveletek értelmezéséhez, az eredmény becsléséhez, írásbeli elvégzésükhöz, a szöveges feladatok megoldásának stratégiájához adhatunk segítséget. Ha azt tapasztaljuk, hogy az osztály biztos tudással került 5. osztályba, a gyerekek biztosan oldják meg a feladatokat, akkor ezt a részt esetleg kisebb óraszámban tárgyaljuk.

1. *A műveletek értelmezése során fontos a tartalmi sokoldalúság.*

Az összeadás

Közös elem nélküli halmazok egyesítésének számossága. Ilyenkor az összeadandóknak nincs megkülönböztetett szerepük. Például:

Janinak 30 forintja van, Misinek 40 forintja. Mennyi van kettőjüknek összesen?

Hozzávetés. Például:

Janinak van 30 forintja, még gyűjt hozzá 40 forintot. Mennyi lesz?

„*Valamennyivel több*". Például:

Janinak 30 forintja van, Misinek 40 forinttal több. Mennyi van Misinek?

A kivonás

Az egyesítés megfordítása. Például:

Janinak és Misinek együtt 70 Ft-ja van, Janinak 30 Ft-ja van. Mennyi van Misinek?

A kivonás mint elvétel. Például:

Jani 30 forintjából elköltött 10 forintot. Mennyi maradt?

„Valamennyivel kevesebb". Például:

Misinek 40 Ft-ja van, Janinak 10 Ft-tal kevesebb. Hány forintja van Janinak?

Ezek a gondolatok nyilvánvalónak látszanak, de a gyönge felkészültségű osztályok-

ban érdemes ilyen részletességgel is átismételni a korábban tanultakat. Nemcsak a matematikai gondolatok miatt, hanem a szabatos, érthető matematikai nyelv gyakorlása miatt is. (Még később is sokszor előfordul – különösen szöveges feladatok egyenlettel történő megoldásakor –, hogy a kisebbet hozzáadással akarják kifejezni a nagyobból.)

2. Az összeg és különbség változásait igen részletesen, szemléletesen dolgozza fel a tankönyv **2.06–2.08.** és **2.09–2.11.** feladatsora. Ezekben a feladatokban a komponensek viszonylag kis számok, és fokozatosan változik hol az egyik, hol a másik, majd mind a kettő. Nincs leírva sem az összeg, sem a különbség változásának szabálya, de minden esetben kérjük a gyerekektől a tapasztalatok szóbeli megfogalmazását és esetenként a matematika nyelvére való lefordítását is.
3. *Az írásbeli összeadás és az írásbeli kivonás* lépései, a lépések indoklása.

   A későbbiek – például az írásbeli osztás – miatt hasznos, ha az írásbeli kivonást „kiegészítésnek" tekintjük.
4. *A komponensek elnevezése,* tudatos használata a feladatokban.
5. *Az eredmény becslésének módja.*
6. *Szöveges feladatok* megoldásakor a szükséges és a felesleges adatok megkülönböztetése, a hiányzó adatok megállapítása. Az adatok közötti összefüggés(ek) leírása a matematika nyelvén.
7. *A fordított szövegezésű feladatok értelmezése.*

Tizedestörtek összeadása, kivonása

Többféle utat mutatunk be, mindegyiknek megvan a maga funkciója, így javasoljuk, hogy mindegyiket tanítsuk.

a) Ebben a fejezetben a mértékváltást felhasználva, a tizedestörteket egészekké alakítjuk, elvégezzük a kívánt műveleteket, majd az eredményt visszaalakítjuk tizedestörtekké. Ezáltal az egészekkel való analógiát mutatjuk meg.

b) Az 5. fejezetben a tizedestörteket felírjuk törtalakban, így végezzük el a műveleteket, majd visszaalakítjuk tizedestörtté. Ezáltal a törtekkel való analógiát mutatjuk meg.

Mindkét módszernél szükséges a helyiérték-táblázat. Ebben elhelyezve a számokat tudjuk megalapozni az összeadás, illetve a kivonás algoritmusát. (Mely számok kerülnek egymás alá, miért – helyiérték.)

A többféle módszer bemutatásával egyrészt segíthetjük az absztrakciót és az általánosítást, másrészt elkerülhetjük azt a buktatót, hogy a tanulók nem a megfelelő helyiértékű számjegyeket írják egymás alá.

Ebben a fejezetben a mértékegységeken kívül gyakoroltathatjuk a sorozatokról, a műveleti tulajdonságokról, a nyitott mondatokról korábban tanultakat stb.

Az összeadás és kivonás tulajdonságai

„Az összeadás és kivonás tulajdonságai" című részben a két művelet azonosságait dolgozza föl a tankönyv.

Az összeg tagjainak *felcserélhetőségével, csoportosíthatóságával* már alsó tagozatban is sokat foglalkoztak a gyerekek. Valószínű, hogy nemcsak értik, hanem alkalmazni is tudják ezeket az összefüggéseket.

Az itt tanult azonosságok egyik célja a számolási eljárások gyorsítása, könnyítése, másik célja az algebrai átalakítások előkészítése, alkalmazásuk az egyenletek megoldásában. Fejszámolás során adjunk sok olyan feladatot, amelyeknek a megoldása a tanult összefüggések alkalmazásával egyszerűbben oldható meg. Például:

$$329 + 98 = 429 - 2 = 427; \qquad 329 - 98 = 229 + 2 = 231$$

A természetes számok szorzása

A szorzás értelmezése

1. *Ismételt összeadás.*

$$8 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 \quad \text{vagy} \quad 8 \cdot 5 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8$$

2. *Két halmaz elemeiből alkotható párok száma.*

A második értelmezéssel ritkábban találkozunk, a tankönyv sem tér ki erre. A kombinatorikai (**Tk. 2.45–2.46.**) feladatokhoz kapcsolódva *ismerjék föl* a gyerekek ezt az értelmezést.

Mindkét értelmezésből felismerhető, hogy *a szorzat tényezői felcserélhetők.* Alsó tagozatban (a programtól függően különböző sorrendben) az egyik tényezőt szorzandónak, a másikat szorzónak nevezték. Felső tagozatban a tényezők felcserélhetősége és az algebrai kifejezések előkészítése miatt fokozatosan megszüntetjük ezt a megkülönböztetést. Esetleg a szöveges feladatok megoldásakor, az összefüggések matematika nyelvére való lefordításakor különböztetjük meg a tényezőket.

Ha a szorzó 0 vagy 1, akkor a szorzás nem tekinthető ismételt összeadásnak, ilyenkor jól alkalmazható a második értelmezés. Ha *akárhány tényező közül az egyik* 0, *akkor a szorzat is* 0. Ha két tényező közül az egyik 1, akkor a szorzat a másik tényező. Annak ellenére, hogy egyszerűnek tűnnek ezek a gondolatok, a későbbiek miatt (például az összeg szorzattá alakítása) foglalkoznunk kell velük.

A tankönyv szemléletesen dolgozza fel az összeg és különbség szorzásának lehetőségeit. Az összeggel való szorzás az írásbeli szorzást készíti elő.

Írásbeli szorzás többjegyű szorzóval

Az írásbeli szorzást csak akkor tárgyaljuk a tankönyvben található részletességgel, ha a tanulók felkészültsége miatt szükségesnek tartjuk. Arról feltétlenül győződjünk meg, hogy értik-e a mechanikussá vált lépések okait.

Az írásbeli szorzás megbízható, gyors elvégzésének feltétele a biztos fejszámolás. Minél többet gyakoroltassuk a szorzótáblát, a 10 hatványaival és egyéb többszöröseivel való szorzás szóbeli elvégzését (például az óra eleji „előkészítés” keretében is).

Tizedestörtek szorzása, osztása 10-zel, 100-zal, 1000-rel, …

Itt ismét hangsúlyozzuk az analógiát a természetes számok szorzásával, osztásával.

Fontos a visszacsatolás, hiszen, „összeg szorzása természetes számmal", illetve „egészek szorzása 10 hatványaival" ismerete nélkül ez az anyagrész nem tanítható meg.

Bár korábban azt tanítottuk, hogy „természetes számot 10-zel úgy szorzunk, hogy a természetes számban minden számjegy eggyel magasabb helyiértékű helyre kerül", ez a tanulók tudatában úgy csapódott (vagy csapódhatott) le, hogy a természetes szám után írtunk egy nullát. A megszokás és a helytelen analógia mint hibaforrás eredményezheti azt, hogy így szoroz a tanuló: $1{,}28 \cdot 10 = 1{,}280$

Többek közt az ilyen hibák kiküszöbölése végett is szükséges a többféle módszer bemutatása, minden esetben kapcsolva a helyiérték-táblázathoz.

A 10 hatványaival való osztásra hasonlóak érvényesek.

Tizedestörtek szorzása természetes számmal

A korábbiakhoz hasonlóan itt is olyan módszereket mutatunk be, amelyek épülnek az eddig tanultakra, ugyanakkor érzékeltetik az analógiát az egészekkel, illetve a törtekkel.

a) A természetes számmal való szorzás visszavezethető azonos tagok összeadására.

b) A mértékegységek átváltását felhasználva a tizedestörtet egésszé alakítjuk, elvégezzük a szorzást, majd visszaalakítjuk tizedestörtté.

c) Alkalmazzuk a szorzat változásairól tanultakat.

d) Beírjuk a tizedestörtet helyiérték-táblázatba, felírjuk a számot összegalakban, elvégezzük a szorzást, ismét visszaírjuk – a táblázat segítségével – tizedestört alakba.

e) Az 5. fejezetben a törtek szorzásához kapcsolódva megerősítjük az itt tanultakat. A tizedestörtet törtté alakítjuk, majd a szorzás elvégzése után ismét tizedestörtté alakítjuk.

Az utóbbi két módszer arra épül, hogy a tanuló tud összeget, illetve törtet természetes számmal szorozni.

Célunk a legegyszerűbb módszer – az egészekkel való analógia – algoritmusának elsajátíttatása. Az általánosítással nem szabad sietnünk, mert a tanulók ismerete – megfelelő alap nélkül – formális marad. (Jó, ha a tanuló maga fogalmazza meg a szabályt.)

Az idő mérése

Legalább 1 órát fordítsunk az idő méréséről tanultak felelevenítésére és kiegészítésére. A tankönyv tartalmazza. A különböző mennyiségek közül az idő becslésében vagyunk még mi felnőttek is a legbizonytalanabbak. Az időérzék fejlesztésére fordítsunk gondot most is és a tanév folyamán rendszeresen. Becsüljenek és mérjenek meg a gyerekek időközöket.

Például: Mérjék meg, mennyi idő alatt érnek haza, mennyi idő alatt mondanak el egy tanult verset. Mérjenek ki másodpercet is mutató órával 30 másodpercet, 1 percet, másfél percet stb. Tanulmányozzuk a rádió- és televízióműsort, valamint a vasúti menetrendet. Mennyi ideig tart a mese (vagy bármilyen más műsor) a rádióban, mennyi ideig a televízióban? Mennyi idő alatt ér a személyvonat Miskolcról Budapestre? Mennyi idő szükséges a gyorsvonatnak, az expresszvonatnak? Miskolcról indulva Budapest felé hol lesz 1 óra múlva a személy-, a gyors-, az expresszvonat? Budapestről indulva

hol lesz 1 óra múlva? Körülbelül hány kilométert tesznek meg a különböző sebességű vonatok fél óra alatt?

Az idő mértékegységei nem a tízes számrendszert tükrözik, hanem részben a hatvanast, ez a tény jó példa annak igazolására, hogy a gyakorlatban más számrendszerek is létezhetnek. A törtekkel, törtszámokkal majd később foglalkozunk részletesen, de az alsó tagozatos tapasztalatok alapján már most is beszélhetünk fél, negyed, háromnegyed, másfél, harmad stb. óráról, percről is.

Osztó, többszörös

A gyerekek számára sem az osztó, sem a többszörös nem új kifejezés. Mindkettővel gyakran találkoztak az alsó tagozatban is. Például soralkotással, szorzótáblával, számegyenesen való lépegetéssel, szorzattá alakítással kapcsolatos feladatokban. Új gondolat, hogy az osztó–többszörös fogalmát az osztópárokkal és nem az osztás műveletével értelmezzük.

Tudatosítsuk, hogy az oszthatóságot csak egész számok, jelen esetben csak a természetes számok körében értelmezzük. Ezt azért kell most hangsúlyoznunk, mert később, a racionális számok körében maradéktalanul elvégezhető az osztás olyankor is, amikor az osztandó nem többszöröse az osztónak. *Például:* $5 : 2 = 2{,}5$, de a hányados most nem egész szám.

A számok tulajdonságaival, a számelmélettel 6. osztályban majd részletesebben is foglalkozunk. Most minél több és minél többféle tapasztalatot gyűjtünk olyan fogalmakról, amelyek a szorzással, osztással kapcsolatban különösen nagyon fontosak.

A természetes számok osztása

Eddig is, most is és a későbbiek folyamán is nagyon sok előny származik abból, ha az osztást a szorzás inverzeként kezeljük. Így az osztásról tanultakat a szorzásról tanultakkal tudjuk magyarázni, igazolni.

Ha alsó tagozatban ugyanebből a tankönyvcsaládból tanultak a tanulók, akkor a szorzás értelmezésekor azonnal, újra és újra „felfedezték” a tényezők felcserélhetőségét. Így már kezdetben sem különböztették meg a szorzót és a szorzandót. *A szorzás kommutativitásából következett, hogy csak egyféle osztást értelmeztek*, nem tekintették különböző műveletnek a „bennfoglalást”, illetve a „részekre osztást”. Ezekben az osztályokban a tankönyv **1. példájának** feldolgozásakor (Tk. 83. oldal) sem érdemes foglalkoznunk a „kétféle osztás” értelmezésével.

Alsó tagozatban vannak olyan programok, amelyek szerint műveleti jellel is megkülönböztetik az osztás kétféle értelmezését. A bennfoglaláskor ismeretlen szorzót, a részekre osztáskor ismeretlen szorzandót keresnek.

A szöveges feladatok megoldása során ismét felvetődik az osztás kétféle értelmezése:

Bennfoglaláskor az osztó ugyanolyan mennyiség, mint az osztandó, és a hányados egy szám, majd később tanítjuk, egy arány. *Például:* 24 km : 4 km = 6. (A 24 km-ben a 4 km **6-szor** van meg.)

Részekre osztáskor az osztó egy szám, a hányados az osztóval azonos mennyiség. *Például:* 24 km : 4 = 6 km, vagy 24 km / 4 = 6 km. (A 24 km egynegyede 6 km.)

Fordítsunk gondot a 0 szerepére. A gyerek számára nem természetes az, hogy például a 0 : 6 hányados értelmezhető, a 6 : 0 hányados pedig nem.

A hányados változásait a **Tk. 2.82.** feladatsorával vizsgálhatjuk. A szerzett tapasztalatokat fogalmaztassuk meg a gyerekekkel. A tankönyvben ezzel kapcsolatban nem találunk szabályt, de anélkül is érteniük kell és jól kell alkalmazniuk a tapasztalt összefüggéseket.

A hányados változásairól tanultakra fogunk majd építeni a tizedestörtek osztásának tanításakor.

Osztás egyjegyű osztóval

Ebben a fejezetben ismételjük át az egyjegyű osztóval való osztást. Ha a tanulók ezt az algoritmust már 3. osztályban tanulták, akkor néhány feladat megoldásával kellően feleleveníthetjük a tanultakat. Ha csak 4. osztály végén foglalkoztak vele, akkor több órát kell szánnunk a begyakorlására.

Az összeg és különbség osztása

Most a szemléletes példák után a tankönyvben szabályok is találhatók. De ezeket a szabályokat csak feladatok megoldásával kapcsolatban kérjük a tanulóktól. Ezeket az azonosságokat most azért tartjuk fontosnak, mert mind a műveletek sorrendjének megállapításakor, mind az írásbeli osztás elvégzésekor alkalmazzuk az összeg és különbség osztásáról tanultakat.

Adjunk sok olyan szóbeli számolási feladatot, amely egyszerűbben megoldható a most tanultak felhasználásával. *Például:* 396 : 4; 2016 : 4 – 16 : 4.

Osztás többjegyű osztóval

Már korábban is fehívtuk a figyelmet arra, hogy a helyi tanterv alsó tagozatos és felső tagozatos matematikaprogramját az alsó tagozatos kollégákkal közösen célszerű kidolgozni. Az egyik kényes kérdés lehet, hogy az alsó tagozatban megtanítsuk-e a többjegyűvel való osztást. Ha úgy döntünk, hogy nem, akkor erre a témára több időt kell fordítanunk, mint amennyit a tanmenetjavaslat ajánl.

Ha az alsó tagozatos programban szerepel a többjegyű számmal való osztás, akkor sem várhatjuk, hogy minden tanuló begyakorolt tudással rendelkezzék ezen a téren.

Lehet, hogy az osztály tudása nem teszi szükségessé, hogy olyan részletességgel foglalkozzunk az írásbeli osztással, mint ahogyan a tankönyv teszi. Ebben az esetben is az osztás végzése során minél többször kérjünk magyarázatot az egyes lépésekről.

Az írásbeli osztás végzésekor a „0” okozza a legtöbb problémát, tévedést. Például:

9708 : 48 = 2**0**2	9648 : 48 = 2**0**1	9624 : 48 = 2**00**
108	048	024
12	0	

Ilyen esetben van igen nagy szerepe az *előzetes becslésnek,* a becsült és a kapott hányados összehasonlításának és az ellenőrzésnek. A bizonytalankodóktól még több alkalommal kívánjuk meg, hogy a „részletosztandó” és a kapott „részlethányados” valódi értékét hangsúlyozzák, úgy ahogyan a mintapéldában is van.

Tizedestörtek osztása természetes számmal

Míg a szorzásnál több módszer követését javasoljuk, addig itt csak az egészekkel való analógiát hangsúlyozzuk. A többi nem vezetne el az algoritmus felismeréséhez.

Tanulóinknak komoly gondot okoz ez a témakör, így szükséges az alapos előkészítés, a sok gyakorlás. Több példán, frontális munkában, aprólékosan, minden lépést indokolva szereztessünk tapasztalatokat, fogalmaztassunk meg sejtéseket.

Minden esetben végeztessük el az ellenőrzést. Ha a maradék 0, az ellenőrzés a legtöbb tanulónak nem okoz gondot. Ha nem 0 a maradék, akkor komoly problémát jelenthet az ellenőrzés:

52,8 : 7 = 7,5 *Ellenőrzés:* 7,5 · 7 = 52,5; 52,5 + 0,3 = 52,8

3 8
3

A maradék: 0,3

52,8 : 7 = 7,54 *Ellenőrzés:* 7,54 · 7 = 52,78; 52,78 + 0,02 = 52,80

3 8
30
2

A maradék: 0,02

A végtelen szakaszos tizedestörtekkel ebben a fejezetben nem foglalkozunk. Ehhez olyan fogalmak hiányoznak, amelyekkel csak az 5. fejezetben találkozik a tanuló. Ott, a Törtalakban írt szám tizedestört alakja című alfejezet tárgyalja ezt a témakört, amely ötödik osztályban kiegészítő anyag. Ennek a fogalomkörnek az egzakt tárgyalása középiskolai tananyag.

A tizedestörtek osztásáról tanultakat jól gyakoroltassuk be (otthoni munkában, folyamatos ismétlésként stb.) különböző típusú szám- és szöveges feladatok megoldatásával. Mindenképpen oldassuk meg a tankönyv **2.99.** „új típusú” szöveges feladatát, amelyben a szöveget és a táblázatot egyszerre kell áttekinteniük a tanulóknak. Az ilyen jellegű feladatokkal nehezen boldogultak a magyar tanulók a nemzetközi, illetve a hazai felmérésekben.

A műveletek sorrendje

A négy alapművelet értelmezésének áttekintése és az algoritmusok begyakorlása után feladhatunk olyan összetett szám- és szöveges feladatokat, amelyekben oda kell figyelnünk a műveletvégzés sorrendjére, valamint a zárójelek helyes alkalmazására. Ez az anyagrész is alsó tagozatos követelmény, de a felmérések szerint sokszor a középiskolában is gondot okoz a helyes műveleti sorrend meghatározása (*például* egyenletmegoldás közben vagy az algebrai kifejezések helyettesítési értékének kiszámításakor). Ezért a felső tagozat minden évfolyamán tudatosítanunk kell a műveletvégzés sorrendjének szabályait, és olyan szokást kell kialakítanunk, hogy a tanulók előbb állapítsák meg a műveletvégzés sorrendjét, és csak azután kezdjék meg a számításokat (lásd a tankönyv **2.101.** feladatsorának feladatait).

A **2.104.** és a **2.105.** feladatok megoldásakor mutassunk rá, hogy mennyire nélkülözhetetlen a helyes műveleti sorrend biztos alkalmazása az összetett feladatok megoldási tervének felírásakor.

A helyes műveleti sorrend begyakoroltatására nem elegendő az az egy-két óra, amelyet elkülöníthetünk erre a témára. Házi feladatként, a folyamatos ismétlés során újra és újra adjunk fel olyan feladatokat, amelyekkel gyakoroltathatjuk az itt tanultakat.

Az átlag kiszámítása

Az átlag (számtani közép) egzakt értelmezése és tulajdonságainak vizsgálata csak a középiskolában válik követelménnyé. Ötödik osztályban az átlag kiszámításának módját kell megtanítanunk (támaszkodva a műveleti sorrendről tanultakra) és az átlag gyakorlati vonatkozásait kell elsősorban kiemelnünk. Azt is meg kell mutatnunk, hogy az átlagos érték lehet, hogy nem is szerepel a felsorolt értékek között. (De az is lehet, hogy szerepel.) *Például:* Egy nap átlagosan 1,89 t papírt gyűjtöttek, de pontosan ennyit egyik nap sem gyűjtöttek.

Az átlag bizonyos következtetések levonásában, hosszú távú tervek készítésében stb. segít. *Például:* Ha délelőtt 10 órára kell Budapestre érnem Nyíregyházáról, és 60 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ átlagsebességgel tudok haladni, akkor meg tudom mondani, hogy mikor kell elindulnom, hogy el ne késsek.

Felhívjuk a figyelmet a tankönyv **2.107.** tréfás feladatára. A megoldás diszkussziója során megsejthetik a tanulók, hogy az átlag önmagában nem jellemzi kellően az adatsort. Figyelembe kell vennünk, hogy az egyes adatok mennyire térnek el az átlagtól.

Gyakorlófeladatok

A fejezet mindegyik feladata kicsit más, mint amilyenek korábban a tananyag feldolgozásánál szerepeltek: összetettebbek, vagy más összefüggéseit világítják meg az adott fogalomnak stb. Ezért feltétlenül javasoljuk, hogy ezekből is válogasson a tanár.

A feladatokkal segítséget szeretnénk nyújtani

- a tanultak begyakorlásához és az ismeretek elmélyítéséhez;
- a differenciált egyéni munkához;
- ahhoz, hogy a tanultak beépüljenek a gyermek matematikai műveltségébe;
- a folyamatos ismétlés során a hiányosságok pótlásához.

Nem tízes számrendszerek

A gyerekek csoportosítással, „leltározással” jutnak el a különböző számrendszerekhez. A tárgyakat például ötösével csoportosítják, majd a csoportokat ismét csoportosítják, és így tovább, míg a csoportosításra lehetőség van. Felismertetjük, hogy a természetes szám leírásához annyiféle számjegyre van szükség, mint a számrendszer alapszáma. A kettes számrendszerben kettőre: 0, 1; a hármasban háromra: 0, 1, 2; a tízesben tízre stb.

A különböző számrendszerekkel azért foglalkozunk, hogy a tanuló mélyebben megértse a tízes számrendszer fogalomrendszerét. Esetleg szakköri feldolgozásban kibővíthetjük és elvontabb szintre fejleszthetjük a tanultakat. Követelményeket semmiképp se támasszunk ehhez az anyagrészhez kapcsolódva.

Törd a fejed!

A fejezet feladatai közül több meghaladja az 5. osztályos követelmények szintjét, tehát nem csak azok érdemelnek jelest, akik ezeket is meg tudják oldani.

3. Összefüggések, nyitott mondatok

A követelményekben bekövetkezett hangsúlyeltolódás miatt alakítottuk ki ezt a fejezetet. Olyan anyagrészeket soroltunk ide, amelyek egyre nagyobb szerepet kapnak a nemzetközi és a hazai felmérésekben. Ugyanis ezeknek az anyagrészeknek a feldolgozása hatékonyan fejlesztheti a tanulók matematikai készségeit, problémameglátó és problémamegoldó képességét, kreativitását, szövegértelmező képességét stb.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. Mérési adatok táblázatba rendezése, grafikonok, diagramok elkészítése. Táblázattal, grafikonnal adott adatsor értelmezése.
2. Függvénytáblázatok kitöltése, sorozatok folytatása adott szabály alapján. Néhány összetartozó számpárral adott táblázathoz, néhány elemével adott sorozathoz szabály keresése.
3. Egyenes arányossági következtetések egyről többre, többről egyre, többről többre gyakorlati jellegű feladatokban. Ismerkedés a fordított arányossággal.
4. Egyszerű egyenletetek, egyenlőtlenségek megoldása során korábban szerzett tapasztalatok tudatosítása, rendszerezése.

Kapcsolódási lehetőségek

Halmazok, logika

Nyitott mondatok alaphalmazának, megoldáshalmazának megadása.

Számtan algebra

A természetes számokkal és a pozitív tizedestörtekkel végzett négy alapművelet és a műveleti tulajdonságok eszközszerű alkalmazása.

Mérések

A tanult mértékegységek átváltásának gyakorlása, a tanultak alkalmazása gyakorlati jellegű feladatokban. A hőmérséklet mérése.

Statisztika

Adatrendezés, grafikonok, diagramok készítése, elemzése. Átlagszámítás.

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Grafikonok, táblázatok

A grafikonok két halmaz elemei (adatsorok) közti összefüggéseket, vagyis relációkat szemléltetnek. Az összetartozó elempárokat táblázatba is rendezhetjük. Fontos, hogy a tanulók képesek legyenek a táblázattal vagy grafikonnal, diagrammal adott összefüggéseket értelmezni. Tudjanak mérési eredményeket táblázatba rendezni, grafikonon ábrázolni.

Ötödik osztályban pontdiagrammal, oszlopdiagrammal, illetve vonaldiagrammal foglalkozunk. Ez utóbbi esetén a pontdiagram pontjait kötjük össze vonalakkal függetlenül attól, hogy értelmezhető-e a közbülső értékekre az összefüggés. Az általános iskolában (a fogalomkialakítás céljából) a vonaldiagramot csak akkor célszerű alkalmaznunk, ha nem diszkrét, hanem folyamatosan változó mennyiségek közti kapcsolatról van szó, lásd például a tankönyv **3.02.**, **3.05.**, **3.07.**, **3.08**. feladatait. Így tulajdonképpen az összefüggés grafikonját adjuk meg, amelyről többé-kevésbé pontosan leolvashatók az összetartozó adatpárok.

A nemzetközi és a hazai felmérésekben a magyar tanulók nehezen boldogultak azokkal a feladatokkal, amelyekben az adatokat szöveg, táblázat és grafikon is tartalmazta (lásd **3.01.**, **3.04.** feladat). Föltétlenül foglalkozzunk az ilyen típusú feladatokkal.

Készíthetünk a gyerekek jellemző adatairól is grafikonokat. Például a magasságukról. Ha ezt év végén is elkészítjük, érdekes lesz összehasonlítani, megállapítani, hogyan változott egy-egy gyerek magassága az év folyamán, hogyan változott az osztály magasságrendje. Könnyen előállíthatunk ilyen grafikont: egy kartonra rajzolt tengelyen minden gyereknek megjelöljük a helyét. Ide a gyermek olyan ragasztószalagot ragaszt, amelynek a hossza annyi milliméter, ahány centiméter a tanuló magassága.

A gyakorlatra nevelés miatt igen hasznos, ha a gyerekek újságból, folyóiratból, statisztikai zsebkönyvből maguk is gyűjtenek grafikonokat. A szükségesnél kevesebb szerepel a tankönyvben. Ennek az az oka, hogy a gazdasági és kulturális élet adatai egy-két éven belül megváltoznak. Az aktuális adatok vizsgálata jobban megfelel nevelési céljainknak.

Összefüggések, sorozatok

A szabállyal adott összefüggések összetartozó számpárainak meghatározása a függvények (továbbá algebrai kifejezések, egyenletek) tanítását készíti elő, ugyanakkor kiváló gyakorlási lehetőséget ad a műveletek, műveleti sorrend, zárójelhasználat problémahelyzetben történő gyakorlására. Hasonlókat mondhatunk el a szabállyal adott sorozatok elemeinek meghatározásáról is.

Tudatosítsuk, hogy ha az összefüggést néhány számpárral, a sorozatot néhány elemével adjuk meg, akkor ehhez (a tanulók tudásszintjén is) nagyon sok szabály fogalmazható meg. A különböző szabályok keresése fejleszti a tanulók kreativitását.

A relációkat, sorozatokat a későbbi fejezetekben is eszközjelleggel alkalmazzuk az aktuális tananyag begyakorlásában.

Arányos következtetés

Arányossági következtetésekkel korábban is találkoztak a gyerekek. A szorzás fogalmának értelmezéséhez nélkülözhetetlenek azok a feladatok, amelyekben „egyről többre" következtetünk, míg az osztás értelmezésekor azok, amelyekben „többről egyre". A fejezet kidolgozott példái tulajdonképpen összegzik a korábbi tapasztalatokat.

A szöveges feladatok megoldása során vizsgálhatjuk, hogy az egyik mennyiség változása maga után vonja-e a másik mennyiség változását, vagy sem. Ha igen, akkor hogyan. Lehet, hogy arányosan, lehet, hogy nem arányosan. Ha arányosan, akkor a két mennyiség ugyanannyiszorosára változik-e, vagy sem. (Egyenes arányosság áll-e fenn, vagy fordított arányosság.)

Mindegyik feladatféleség megjelenik a feladatokban. Most is igen nagy szerepe van a becslésnek és az ellenőrzésnek. Legyen gondunk arra is, hogy a gyakorlati életben az arányosságnak van határa!

Ötödik osztályban nem akarjuk az egyenes és fordított arányosságot definiálni. Majd hatodik osztályban mindkettőt mint függvényt is tárgyaljuk, és a hányadost arányként is értelmezzük.

Egyenlet, egyenlőtlenség

Az eddigi fejezetekben, az aktuális feladatokhoz kapcsolódóan folyamatosan foglalkoztunk egyszerű egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásával.

Ebben a fejezetben tudatosítjuk, pontosítjuk és elmélyítjük az eddig tanultakat.

Hasonlóan járunk el majd az 5. fejezet tárgyalása során is, ezért a nehezebben haladó csoportokban későbbre halaszthatjuk az egyenletek, egyenlőtlenségek alaposabb feldolgozását.

Gyakorló- és fejtörő feladatok
Tudáspróba

A gyakorló-, illetve a fejtörő feladatsorok segítségével, differenciált munkában egyaránt megoldható a felzárkóztatás, illetve a tehetséggondozás.

A tudáspróba feladatsora nem minősítő, hanem fejlesztő ellenőrzés céljából készült. Például a tanulók önállóan dolgozva megoldják a feladatokat, majd közösen javítjuk és pontozzuk a megoldást, megbeszéljük az esetleges hiányosságokat. Végül a tanulók egyénileg összegzik az elért pontszámokat, és értékelik saját munkájukat.

4. Geometriai alakzatok

Olyan ismeretek tartoznak ehhez a részhez, amelyek közvetlenül kapcsolódnak az alsó tagozatos tananyaghoz, és föltétlenül szükségesek a további geometriai tananyag elsajátításához. Ezért tanmenetünkben biztosítsunk elegendő időt ezen fejezet tananyagának feldolgozásához. Minden egyes fejezetben aprólékosan áttekintve elevenítsük föl, tegyük tudatossá és gyakoroltassuk be a korábban tanultakat. A geometriai számításokban alkalmazzák a tanulók az előző három fejezetben tanultakat, így integrálva az aktuális tananyagot a meglévő ismeretrendszerükbe. Ezeknek a számításoknak jelentős hányada mindennapi élettel kapcsolatos problémát vet fel, így megvalósulhat a gyakorlatorientált tananyag-feldolgozás. Időigényes, de a későbbiek szempontjából nagyon fontos a tanulók manuális készségeinek fejlesztése, a körző és a vonalzó helyes használatának gyakorlása is.

Ehhez a részhez kapcsolódik a **Matematika 5. Gyakorló** 7. és 8. fejezetének sok feladatsora. Az így kialakított bő keret messzemenően biztosítja és kiszolgálja a különböző helyi tantervek törekvéseit, a kollégák egyéni elképzeléseit, az osztályra, sőt az egyes gyermekekre szabott tervezést.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. A geometriai alakzatokról tanultak áttekintése, elnevezések, jelölések tudatosítása. A körző és a vonalzó használatának gyakorlása. Szakaszmásolás, hosszúságmérés. Egyenesek kölcsönös helyzete a síkban. Egymással párhuzamos, illetve egymásra merőleges egyenesek fogalma, előállítása háromszög- és egy másik vonalzó segítségével.
2. Síkidomok vizsgálata, csoportosításuk különböző szempontok szerint. A sokszög szemléletes fogalma, elnevezések, jelölések. A sokszög kerületének fogalma, meghatározása. A síkidomok egybevágóságának szemléletes fogalma: „ugyanolyan alakú és méretű”.
3. A téglalap és a négyzet fogalmának felelevenítése, tulajdonságainak vizsgálata a szemléletre támaszkodva. A téglalap (négyzet) kerülete.
4. A terület szemléletes fogalma, mértékegységei. A téglalap (négyzet) területe. A terület mértékegységeinek átváltásánál a természetes számokról és a tizedestörtekről tanultak alkalmazása. Területmérés.
5. Testek vizsgálata, építése. A téglatest (kocka) fogalmának felelevenítése, tulajdonságainak vizsgálata a szemléletre támaszkodva. A téglatest (kocka) hálója, felszíne. *Jobb képességű csoportban:* síkok és síkok, síkok és egyenesek kölcsönös helyzete a térben.
6. A térfogat szemléletes fogalma. A téglatest (kocka) térfogata. A térfogat mértékegységei. Űrtartalommérés.

Kapcsolódási lehetőségek

A korszerű matematikatanításban az egyes témaköröket nem egymástól elszigetelten tárgyaljuk. A tankönyv, a **Matematika 5. Gyakorló** és a **Matematika 5–6. Feladatgyűjtemény** feladatait úgy szerkesztettük meg, hogy a gyakorló pedagógus nevelési és oktatási célkitűzéseinek, a tanulók felkészültségének, érdeklődési körének figyelembevételével, megfelelő mélységben és tartalommal kapcsolatot teremthessen a matematika különböző területei között. Ez a kapcsolatteremtés a következő célokat szolgálhatja:

A korábban tanultak új szempontok szerinti megvilágítása, rendszerezése, folyamatos ismétlése, kiegészítése, begyakorlása, a hiányosságok pótlása.

A későbbiekben tanítandó anyagrészek előkészítése a tapasztalatszerzés szintjén.

A tanultak alkalmazása új területeken. Az újonnan és a korábban tanultak „összeszövése". Ezzel elkerülhetjük az ismeretek megmerevedését, vagyis azt a nem kívánt jelenséget, hogy a tanuló csak a tanult körülmények között képes alkalmazni tudását.

Komplex matematikai problémák megoldásával az ötletgazdagság, a rugalmasság, a problémameglátó és problémamegoldó képesség fejlesztése.

Egyes témakörökkel (halmazok, logika; relációk, függvények, sorozatok; kombinatorika, számítástechnika), illetve anyagrészekkel (például: egybevágósági transzformációk, hasonlóság, tengelyes szimmetria) az ötödik osztályban nem foglalkozunk külön tanórákon, hanem az aktuális tananyag elmélyítésére, a matematikai képességek fejlesztésére szinte minden tanórán eszközjelleggel alkalmazzuk ezeket.

Halmazok, logika

A halmazelmélet és logika ismeretrendszerét, eszköztárát a konkrét osztály felkészültségének megfelelő mélységben alkalmazzuk a felfedezett összefüggések tudatosítására, a tanultak rendszerezésére.

Az alakzatokat *ponthalmazoknak* tekintjük. Két alakzat közös pontjai a két ponthalmaz közös részének elemei. Ezt a szemléletet a 6. fejezet feladatainak megoldása során gyümölcsöztethetjük.

Az alakzatok különböző szempontok szerinti csoportosítása során alkalmazhatjuk a részhalmaz, az osztályozás fogalmát, a logikai és halmazműveleteket. Tisztáznunk kell például a négyszögek halmazának, a téglalapok halmazának és a négyzetek halmazának a viszonyát; hasonló módon a téglatestek halmazának és a kockák halmazának a viszonyát.

Számtan, számelmélet, algebra

Ezt az anyagrészt azért is tárgyaljuk az év eleji ismétlés után, hogy elősegítsük a számolási készségek és képességek fejlesztését, az ezen a téren észlelt hiányosságok pótlását. Ha a tanulók gyakorlottak a fejszámolásban és az írásbeli műveletvégzésben, akkor a számítások egy részében használhatják a **zsebszámológépet**. Ez időt szabadít fel az érdekesebb matematikai problémák számára.

A kerületszámítással az összeadást, a terület- és térfogatszámítással a szorzást gyakoroltathatjuk. A mértékegységek átváltása a 10-zel, 100-zal stb. való szorzás és osztás gyakorlására ad lehetőséget.

A kerületszámításhoz kapcsolódva felismertethetjük az összeg tagjainak a felcserélhetőségét (az összeadás kommutativitását). A téglalap területének négyzetlapokkal való lefedésekor kétféleképpen választhatjuk meg az első lefedendő sort, ezzel a tényezők felcserélhetőségét (a szorzás kommutativitását) szemléltethetjük. Hasonló módon a téglatest térfogatszámítása esetén a tényezők tetszőleges csoportosítására (a szorzás asszociativitására) mutathatunk rá. A téglalap kerületének és a téglatest felszínének a kiszámításakor felelevenítheti jük a műveletek sorrendjéről és a zárójelek használatáról (az összeg szorzásáról) tanultakat. Szemléltethetjük a szorzat változását az olyan feladatokban, amelyekben a téglalap oldalainak változásával vizsgáljuk a terület változását.

A szorzás és az osztás közti összefüggésekre világít rá a **Tk. 4.30.** feladat. Hasonló feladatokkal folyamatosan gyakoroltathatjuk az írásbeli osztást, továbbá a tapasztalatszerzés szintjén előkészíthetjük az egyenletek megoldásának tanítását is.

Gyakoroltatjuk a *tizedestörtekkel végzendő műveleteket* az olyan kerület- és területszámításos feladatok megoldásával, amelyekben az adatokat nem egyetlen mértékegységgel adjuk meg (pl. $a = 7$ m 5 dm; $b = 2$ m 32 cm).

Több olyan feladatot fogalmaztunk meg (**Tk. 4.19., 4.48.**), amelyekben az adatok közti összefüggést felírhatjuk *egyenlet* formájában is, majd a szemléletre támaszkodva következtetéssel (két, három lépésben) eljuthatunk a megoldáshoz. Ezekkel a feladatokkal előkészíthetjük az egyenletek megoldásának tanítását.

Az *osztó, többszörös, osztópárok, tényezőkre bontás* fogalomrendszerét elmélyíthetjük például a **Tk. 4.43.** feladat diszkussziója során.

Relációk, függvények, sorozatok

A függvénytani ismeretek alkalmazásával hatékonyan elősegíthetjük azt, hogy a tanulók „felfedezzék” a különböző összefüggéseket, önállóan jussanak el az általános formulák megfogalmazásához, továbbá tapasztalatot szerezzenek később tanulandó anyagrészekkel kapcsolatosan. Ugyanakkor ezekkel a feladatokkal gyakoroltathatjuk a grafikonok használatát és a szabályjátékokat is.

Ismerjék fel a tanulók, hogy a mértékegység és a mérőszám változása között fordított arányosság van (az elnevezést és a fogalmat itt még nem tudatosítjuk).

Felismerhetik, hogy hasonló síkidomok, testek esetén a hosszúságegység valahányszoros változásával a hozzá tartozó területegység négyzetesen, míg a hozzá tartozó térfogategység köbösen változik (**Tk. 4.24., 4.66., B4.25., B4.26.**).

A téglalap területképletének felismeréséhez az egyenes arányosságot és a „szabályjátékokat” hívhatjuk segítségül.

Geometriai szélsőérték-feladatok megoldásával színesebbé tehetjük óráinkat, ugyanakkor a számelméleti ismeretek, a fejszámolás gyakorlásával, a grafikonok alkalmazásával, a négyzetről és a kockáról szerzett ismeretek elmélyítésével nagyon összetett nevelési és képzési feladatokat oldhatunk meg.

A sorozatokhoz is kapcsolódik a **Tk. 4.66.** és a **4.24.** feladat.

A geometria, mérések egyéb témakörei

Hosszúságmérés, a hosszúság mértékegységei.

A síkidomok, sokszögek különböző szempontok szerinti csoportosítása során a tanulók felismerhetik a tengelyes szimmetriát.

Hasonlóság, hasonló alakzatok kerületének, területének, illetve felszínének és térfogatának az aránya (**Tk. 4.24., 4.28., 4.66.** feladat).

Kombinatorika

Egyes geometriai feladatok lehetséges megoldásainak a megkeresése kombinatorikai látásmódot is feltételez (**Tk. 4.43** *c)* **B4.05–B4.06., 2.39.** *c)* feladat).

Kevésbé szokványos kombinatorikai problémát fogalmazhatunk meg a **B4.30.** feladattal kapcsolatosan.

Ha az osztály felkészültsége olyan, hogy az elemi rutinfeladatok gyakorlására nem kell sok időt fordítanunk, akkor érdemes külön csokorba kötni ilyen feladatokat, és a kerület-, terület-, felszín- és térfogatszámítás előkészítéseként teljes órában foglalkozhatunk a kombinatorikai problémákkal.

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Ismerkedés testekkel, felületekkel, vonalakkal

A tankönyvben a fejezetek elején felsoroljuk a korábban tanult és az ötödik osztályos geometria tanulásához nélkülözhetetlen fogalmakat, elnevezéseket, jelöléseket.

A geometriai fogalomrendszer **alapfogalmai** a *pont,* az *egyenes,* a *sík,* és a *tér.* Ezeket nem definiáljuk, vagyis nem vezetjük vissza egyszerűbb fogalmakra. A tankönyvben az alapfogalmakhoz fűzött megjegyzések nem értelmezik, csupán szemléletessé teszik ezeket a fogalmakat. Az általános iskolában a *vonal* és a *felület* fogalmát is alapfogalomnak tekintjük.

Ha az egyenest feldaraboljuk, *szakaszokat,* illetve *félegyeneseket* kapunk. Már ötödik osztályban jelölhetjük a szakaszt két végpontjával (*AB* szakasz), illetve a félegyenest a kezdőpontjával és egy belső pontjával. Ezek a jelölések lényegesen egyszerűbbé teszik majd a szerkesztések leírását, illetve az összefüggések igazolását. Ugyanakkor az *AB* szimbólum az *A* és a *B* pont távolságát (az *AB* szakasz hosszát) is jelenheti. A szimbólum nem egyértelmű jelentése kezdetben gondot okozhat. (Tudatosítsuk, a szövegtől függ, hogy az *AB* szimbólum mikor mit jelent!)

A *síkidom* és a *test* fogalmára a szakirodalomban többféle értelmezést találunk:

1. A sík (tér) tetszőleges ponthalmazát síkidomnak (testnek) nevezzük.
2. A sík (tér) tetszőleges tartományát síkidomnak (testnek) nevezzük.
3. A sík (tér) korlátos tartományát síkidomnak (testnek) nevezzük.

A korábbi tankönyvek az utolsó definíció szemléletes változatát tartalmazták:

A síkidom a síknak zárt görbével (görbékkel) körülhatárolt része.

A test a térnek zárt felülettel (felületekkel) körülhatárolt része.

Ezek a meghatározások a korlátosság viszonylag nehéz fogalmát matematikailag vitathatóan fordították le a gyerekek nyelvére. Ezért javasoljuk a **2.** definíció szemléletes változatát:

A sík (tér) feldarabolásakor síkidomok (testek) keletkeznek. (*Hajós György:* Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, 7. kiadás, 1984. 7–8., ill. 38–39. old.)

Ez az értelmezés rendkívül szemléletes, ezért a gyermek számára is azonnal érthető, ugyanakkor matematikailag egzakttá tehető. Ebből az értelmezésből kiindulva leegyszerűsödik néhány témakör tárgyalása. Így például a szögtartomány speciális síkidom, ezért a konvex szög speciális esete a konvex síkidomnak.

Javasoljuk, hogy az előbbi fogalmakat a feladatok megoldása közben tudatosítsuk, sokoldalú szemléltetésre támaszkodva. Kiscsoportos foglalkozás keretében egy-egy csoportnak tálcán előkészíthetjük a különböző modelleket, eszközöket. A sík- és térgeometriai modellezőkészletet kiegészíthetjük papírlapokkal, félbevágott pingponglabdával, golyókkal, fonaldarabkákkal, szívószállal, gyurmával stb. Így a tanulók kiválaszthatják, illetve elkészíthetik a szóba kerülő alakzatok modelljét.

Türelmes munkával érhetjük el, hogy tanulóink biztosan használják a körzőt és a vonalzót. A szakaszmásolás legyen **minimumkövetelmény**. Ezért esetenként körzővel másoltatva méressük meg a szakasz hosszát. A körző használatának gyakorlására játékos keretet biztosít a tankönyv **4.53.** feladata. Ha a számtan, algebra tárgyalása során házi feladatként vonalzóval előre elkészíttetjük a táblázatokat, számegyeneseket, koordináta-rendszereket, és minden esetben megköveteljük a pontos és esztétikus munkát, akkor ez nemcsak a kérdéses órát teheti zökkenőmentesebbé és hatékonyabbá, hanem a későbbi geometriai foglalkozásokat is.

Egyenesek kölcsönös helyzete

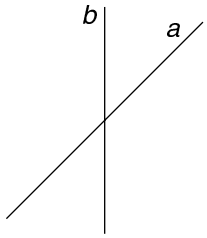
Ötödik osztályban a derékszögű vonalzó használatát is célszerű szerkesztésnek tekintenünk. Ez egyrészt megállapodás kérdése, másrészt nem lépi át az euklideszi szerkesztés határait. Hiszen a derékszögű vonalzóval megrajzolt alakzatok az euklideszi szerkesztés szabályai szerint is megszerkeszthetők. (Az előzőek alapján a „szerkeszteni” szó nem zárja ki a derékszögű vonalzó használatát.)

A következő célokat kell elérnünk:

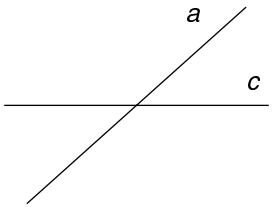
1. Alakuljon ki minden tanulóban, szemléletes szinten a merőlegesség és a párhuzamosság fogalma. Ismerjék fel és alkalmazzák a megfelelő jelöléseket. Legyenek képesek ezeket a fogalmakat geometriai vizsgálatokban alkalmazni.
2. Ismerjék meg és gyakorolják be a tanulók a *derékszögű vonalzó használatát.* Legyenek képesek egyenes adott pontjába; egyenesre külső pontból merőleges egyenest szerkeszteni. Szerkesszék meg egyenes és pont, illetve két párhuzamos egyenes távolságát. Legyenek képesek egyenessel adott ponton keresztül párhuzamos egyenest szerkeszteni.

A merőlegesség és párhuzamosság fogalmával már 3. osztályban találkoznak a tanulók, ennek ellenére gyakori típushiba a következő.

A *b* merőleges az *a*-ra:



A *c* párhuzamos az *a*-val:



A hiba valószínűsíthető oka, hogy a tanulóknak rendszeresen csak a füzetlap aljával párhuzamos egyenesre (egyenessel) kellett merőleges (párhuzamos) egyenest szerkeszteniük.

A ponthalmazok távolságának alkalmazásaként a *merőlegesség* (szemléletes szinten már esetleg ismert) fogalmát a pont és az egyenes távolságából kiindulva értelmezhetjük. A szög fogalmának bevezetésével új értelmezésre is lehetőség nyílik. Ezért *semmiképp se sulykoltassuk be az adott definíciót.* Ennél lényegesen fontosabb, hogy a tanulók önálló munkával fedezzék fel az összefüggést.

A merőlegesség fogalmának általánosításaként jutunk el a síkra merőleges egyenes, illetve az egymásra merőleges síkok fogalmához.

A párhuzamossággal kapcsolatosan a következő összefüggéseket ismerhetik fel a feladatok megoldása közben:

Az egyenestől adott távolságra lévő pontok halmaza párhuzamos egyenespár.

Az egyenessel párhuzamos egyenes minden pontja ugyanakkora távolságra van az egyenestől. Ez a távolság a két párhuzamos egyenes távolsága.

A síkban egy egyenestől adott (0-nál nagyobb) távolságra két párhuzamos egyenes húzható. A térben végtelen sok (ezek egy hengerfelületet alkotnak).

A síkban két (különböző) egyenes vagy metszi egymást egy pontban, vagy párhuzamos. A metsző, illetve a párhuzamos egyenesek egyértelműen meghatároznak egy síkot. Ha két egyenes nem egy síkban van, akkor az kitérő.

Párhuzamos két egyenes, ha egy síkban vannak és nem metszik egymást.

Egy egyenessel egy rajta kívül fekvő ponton át pontosan egy párhuzamos egyenes húzható.

A párhuzamosságot kétféleképpen definiálják a szakkönyvekben. Az egyik féle értelmezés szerint az egyenes párhuzamos saját magával, a másik szerint nem. Az első értelmezést javasoljuk. Ennek gondolatmenete a következő:

Két egyenes metsző, ha egy közös pontjuk van;

párhuzamos, ha egy síkban vannak, de nem metszők (ebben az esetben vagy nincs közös pontjuk, vagy legalább két közös pontjuk van).

Nem lehet célunk a párhuzamosság fogalmának deduktív megközelítése. Ötödik osztályban *a szemléletes szinten megismert fogalom minél több tartalmi jegyét „fedezzék fel" a tanulók* a logikai rendezés igénye nélkül.

Síkidomok, sokszögek

A *töröttvonal* és a *záródó töröttvonal* fogalmát feladathoz kapcsolódva, szemléltetéssel és megnevezéssel alakítjuk ki. Ezekre a fogalmakra azért van szükségünk, hogy a sokszög tulajdonságait minél teljesebben feltárhassuk és a kerületszámítást előkészíthessük.

Nem várhatjuk, hogy tanulóink egyik óráról a másikra képesek legyenek önállóan alkalmazni ezeket az elnevezéseket és jelöléseket. Ezért azt ajánljuk, hogy a további anyagrészek tanulása során újra és újra elevenítsük fel, és fokozatosan mélyítsük el ezt a fogalomrendszert.

A tanulók ismerik a háromszöget, a négyszöget, az ötszöget stb. A *sokszög* fogalmát legegyszerűbben (és az életkori sajátosságoknak leginkább megfelelő módon) általánosítással „közelíthetjük meg": a háromszög, négyszög, ötszög mintájára előállíthatunk akárhány oldalú sokszöget, majd az így létrehozott síkidomokat egy halmazba foglalva kapjuk a sokszögek halmazát.

Az általános iskolában az egyszerű sokszögekkel foglalkozunk. Megkülönböztetjük a sokszöglapot mint síktartományt és a sokszöget határoló sokszögvonalat. Az (egyszerű) sokszögvonal tulajdonságai:

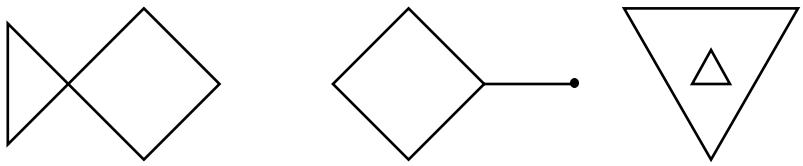
Egyetlen záródó töröttvonalból áll.

Ugyanannyi *oldala* van, mint ahány *csúcsa*, és minden csúcsában pontosan két oldal találkozik.

Az oldalai csak a csúcsokban találkoznak, ami azt jelenti, hogy az oldalai nem keresztezhetik egymást, illetve egyetlen csúcsa sem lehet valamely oldal belső pontja.

Szomszédos oldalai nem zárhatnak be egyenesszöget.

Ez az értelmezés kizárja a sokszögvonalak közül a következő alakzatokat:

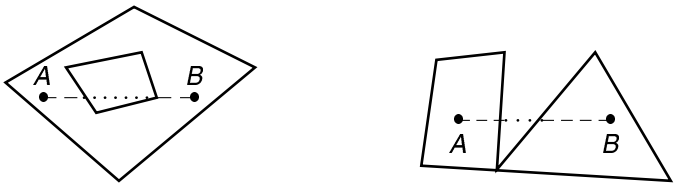


A sokszögvonal a síkot két tartományra bontja. A sokszögvonal és a belsejében lévő pontok halmaza a sokszög (sokszöglap).

A *helyi tanterv* szerkesztésekor gondoljuk meg, hogy ötödik osztályban tudatosítsuk-e a *konvex síkidom* (konvex sokszög, konvex szögtartomány) fogalmát, illetve az alsó tagozatos program előkészítse-e ezt a fogalmat.

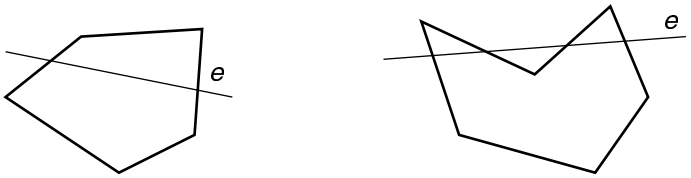
Konvexnek nevezzük a síkidomot, ha bármelyik két pontját összekötő egyenes szakasz teljes egészében a síkidomhoz tartozik. Mint már említettük, ez a definíció a szögtartományra is érvényes.

Ha egy sokszög nem egyszerű, akkor nem lehet konvex.



Egyszerű sokszög akkor és csak akkor konvex, ha bármely egyenessel szétvágva legfeljebb két darabra esik szét.

A konvex sokszög minden belső szöge konvex.



A fogalomrendszert fokozatosan építjük fel. Már az alsó tagozatban vizsgálják az alakzatokat a tanulók, de a meghatározásokat legfeljebb 7. osztályban kérjük számon. Ugyanakkor a feladatok megoldásában, a szemléletre támaszkodva már az 5. és 6. osztályban is elvárjuk ezeknek az ismereteknek az alkalmazását. Ötödik osztályban a tanárnak kell eldöntenie, hogy az osztály képességének, illetve nevelési és oktatási célkitűzéseinek függvényében milyen mélyen és milyen részletességgel foglalkozik ezzel a témakörrel.

A következő felépítést javasoljuk.

A tanulók különböző szempontok szerint csoportosítják a síkidomokat:

a végtelenbe nyúlik-e (nem korlátos);

csak egyenes szakaszok határolják-e;

egyetlen határvonala van-e;

tengelyesen tükrös-e;

oldalai keresztezik-e egymást;

oldalai csak a csúcspontokban találkoznak-e; stb.

Ha a helyi tanterv előírja, vagy jobb osztályban – differenciált munkában – szemléletes példához kapcsolódva megismerkednek a tanulók a konvex síkidomokkal, és ezen szempont szerint is csoportosítják a síkidomokat.

A háromszög, a négyszög vizsgálatából kiindulva „felfedezik” azokat a tulajdonságokat, amelyek a különböző (egyszerű) sokszögekben közösek. Csoportosítják a sokszögeket a felismert tulajdonságok szerint. Nyírással, rajzzal előállítanak adott tulajdonságú sokszögeket. *Ellenpéldák* vizsgálatával tudatosítják a felismert tulajdonságokat.

A háromszög és a négyszög tulajdonságainak vizsgálata mellett megismerkednek a tanulók a háromszög és a négyszög oldalainak és csúcsainak szokványos jelölésével, illetve a *szomszédos* oldal (csúcs), a *szemközti* oldal (csúcs), továbbá az *átló* fogalmával.

Megállapodhatunk, hogy háromszög csúcsait általában latin betűkkel jelöljük. Ha a csúcsokat *A*-val, *B*-vel és *C*-vel jelöljük, akkor a csúcsokkal szemben fekvő oldalait az *a*, *b*, *c* kisbetűkkel vagy a *BC*, *AC*, *AB* szimbólumokkal.

Az elnevezések és jelölések megtanításának pedagógiailag egyedül indokolható módja az ismeretek sokszorosan ismétlődő alkalmazása különböző feladatokban.

A *kerület* fogalmát tetszőleges síkidomokra csak magasabb matematikai ismeretek birtokában értelmezhetnénk. Ezért ötödik osztályban meg kell elégednünk a *sokszög kerületének* fogalmával. Ezen belül a téglalap (és speciálisan a négyzet) kerületének a kiszámítását majd *be kell gyakoroltatnunk.* Fontosnak tartjuk, hogy a tanulók a gyakorlati életből vett példákra is legyenek képesek alkalmazni a kerületszámítást. Felméréseink szerint a felső tagozatba lépő tanulók jelentős hányada „keveri" a téglalap kerületének és területének a kiszámítását. Ez annak a következménye, hogy nem az életkornak megfelelő szinten, a szemléletre és a mérési gyakorlatokra támaszkodva alakították ki ezeket a fogalmakat, hanem megelégedtek a képletek megtanításával.

Egybevágó síkidomok

Alsó tagozatban a hasonló síkidomokkal mint „ugyanolyan alakú" alakzatokkal foglalkoztak a tanulók, míg az egybevágó síkidomokkal mint „ugyanolyan alakú és ugyanolyan méretű" alakzatokkal. Egy adott síkidomhoz hasonló alakzatok az alapul vett síkidom kicsinyített vagy nagyított vagy ugyanakkorára lemásolt képei. Ebben a megközelítésben az egybevágóságot (helyesen) speciális hasonlóságként értelmezték. Ötödik, sőt hatodik osztályban nem lépünk tovább, megelégszünk ezekkel a szemléletes fogalmakkal. Ugyanakkor ezekre a szemléletes fogalmakra szükségünk van a további vizsgálatokban.

A tankönyv mintapéldája jól szemlélteti a fogalom magyar elnevezését, az „egybevágóságot". A 146. oldalon olyan feladatokat találunk, amilyenekkel alsó tagozatban találkoztak a tanulók. A **4.15.** feladattal felhívhatjuk a tanulók figyelmét arra, hogy a síkidomok egybevágóságához nem elegendő néhány méret megegyezése. Ebben a feladatban például az átlók hossza már nem egyezik meg.

Téglalap, négyzet

A téglalap, speciálisan a négyzet tulajdonságait második osztálytól kezdve vizsgálták a gyerekek a szemléletre támaszkodva. Ebben a fejezetben felidézzük ezeket a vizsgálatokat, tudatosítva a téglalap (négyzet) legfontosabb tulajdonságait. Felismertethetjük (hajtogatással, vagy tükör segítségével), hogy a téglalap átlóegyenese pontosan abban az esetben tükörtengely, ha a téglalap négyzet.

A tanulók számára új, hogy a téglalap (négyzet) kerületét képlettel is megfogalmazzuk. Ez az általánosítás sok tanulónak még nehézséget okozhat. Ezért a tanulóktól ne az általános képlet mechanikus alkalmazását várjuk el. Sokkal értékesebb, ha a gyermekek megértik a fogalmat, és annak alapján számolnak a konkrét feladatokban. A megértést elősegíti, ha szemléletessé tesszük a fogalmat. Például a „kerület" elnevezés jól kapcsolható a „kerítés" szóhoz (lásd **4.16.** feladat).

A terület mérése, mértékegységei

A területmérés első lépéseként azt vizsgáljuk, hogy a kiválasztott területegység hány példányával fedhetjük le *hézagtalanul és átfedés nélkül* a mérendő területet. Átismételjük és kibővítjük az alsó tagozatban tanultakat. A 3. és 4. osztályban ténylegesen lefedték a területet az egységül választott lapokkal (parkettázás), megszámlálták különböző hálózatokon, hogy hány területegység fér a síkidomra, adott területű síkidomokat rajzoltak különböző hálózatokra (például milliméterpapírra), megvizsgálták, hogy a területegység változásával hogyan változik a terület mérőszáma. Ezeket a vizsgálatokat idézi fel ez a fejezet.

Miután elfogadtattuk a gyerekekkel, hogy területméréskor az egységül választott *sokszöglap* területével hasonlítjuk össze a mérendő sokszög területét megállapodunk, hogy ha nem mondunk mást, akkor a területegység olyan *négyzetlap területe* lesz, amelynek az oldala 1 mm, 1 cm, 1 dm, 1 m, 100 m vagy 1 km. Például az 1 cm oldalú négyzet területe: 1 cm^2.

Az előzőek alapján **matematikailag hibás** és didaktikailag is megalapozatlan a következő értelmezés: (1 cm) · (1 cm) = 1 cm^2, hiszen a hosszúságok mint mennyiségek szorzását nem értelmezhetjük. Hasonlóan értelmezhetetlen például a következő egyenlet is: 1 dm^2 = (10 cm) · (10 cm) = 100 cm^2. A terület-mértékegységek átváltásának gondolatmenetét a négyzetlapokkal történő kirakásra vezetjük vissza (tankönyv 151–152. oldal).

A tankönyvben szemléltetjük a területmérés szabványos egységei közül a négyzetmillimétert, a négyzetcentimétert és a négyzetdecimétert. Emellett mutassunk be 1 m^2 területű négyzetet, és képzeltessük el az 1 hektáros, illetve az 1 km^2 területű négyzetet is.

A területmérés szabványos egységeinek használata feltételezi a hosszúság mértékegységeinek és átváltásuknak begyakorolt alkalmazását, a négyzet területének kiszámítását, továbbá a 10-zel, 100-zal stb. való szorzás és osztás biztos elvégzését. Ezeket ilyen szinten nem követelheti meg az alsó tagozatos tanterv. Ebből következik, hogy egy-két óra alatt nem taníthatjuk meg a terület mértékegységeinek használatát, átváltásukat. Az év végéig vissza-vissza kell térnünk ilyen feladatok megoldására.

A téglalap területe

A téglalap területének kiszámítása a kirakást felidéző magyarázat kíséretében 4. osztályos követelmény. Elegendő számú feladat megoldásával elvezethetjük a tanulót az általános összefüggés felismeréséig. A területszámítást gyakorló feladatok megoldásakor is célszerű ismételten felidéztetni a kiszámítás módját igazoló gondolatmenetet. Előfordulhat, hogy az alsó tagozatos előkészítést nem érezzük megfelelőnek, akkor több órát szánjunk ennek a fejezetnek a feldolgozására.

Ezt a szintet meghaladva (arányos következtetéssel) juthatunk el a tankönyv 154.oldal 2. mintapéldájának megoldásához. Itt már olyan téglalapokkal is találkozik a gyerek, amelyek egyik oldalának mérőszáma nem egész szám. Végeredményben azt fogadtatjuk el (bizonyítás nélkül), hogy a téglalap egyik oldalának és területének változása között egyenes arányosság van, ha a másik oldal változatlan.

Téglatest, kocka

A téglatesttel, speciálisan a kockával az alsó tagozat második osztályától kezdve foglalkoztak a gyerekek. A szemléletre támaszkodva (az értelmezés igénye nélkül) vizsgálták különböző téglatestek tulajdonságait.

A téglatest tulajdonságait különböző modelleken vizsgálhatják a gyerekek. Vegyék észre, hogy a téglatest alapvető tulajdonságaival rendelkezik a négyzetes oszlop és a kocka is, ezért ezek a testek speciális téglatestek. A *lap*, az *él* és a *csúcs* fogalmát megnevezéssel alakítjuk ki. Következetesen ragaszkodjunk ezeknek a fogalmaknak a helyes használatához. Típushiba az él–oldal, illetve a lap–oldal fogalompárok felcserélése.

Síkok és egyenesek, síkok és síkok kölcsönös helyzete a térben

A téglatest modellek tulajdonságainak vizsgálatakor az egyenesekről tanultak általánosításaként felismertetjük két lap, illetve egy lap és egy él kölcsönös helyzetét. A legtöbb osztályban meg kell elégednünk azzal, hogy a szemléletre támaszkodva használjuk ezeket a fogalmakat.

Jobb képességű csoportban (részben) értelmezhetjük ezeket a fogalmakat.

A **B4.03.** feladat megoldásának megbeszélésekor ismerkedhetnek a tanulók a szokásos elnevezések (*AB* él, *ABFE* sík, . . .) használatával.

A téglatest hálója, felszíne

A test felszínét általánosan csak magasabb matematikai eszközökkel értelmezhetnénk, ezért az általános iskolában mindig az éppen tanult testek felszínéről beszélünk. Az átlagos, illetve az annál gyengébb felkészültségű osztályokban nem ajánljuk a téglatest és a kocka felszínképletének a megtanítását. A konkrét téglatestek felszínét a területszámítás alkalmazásaként határozzák meg a tanulók. Ha a jobb osztályokkal, illetve a jobb tanulókkal el kívánunk jutni az általánosításig, akkor az tényleg általánosítás legyen, vagyis több konkrét feladat megoldására támaszkodjunk. A deduktív út ebben az életkorban – általában – igen bizonytalan és nehezen alkalmazható tudást eredményez.

Felméréseink arra figyelmeztetnek, hogy az osztályok többségében az ötödik osztály végére a tanulók nem tudják elkészíteni adott téglatest hálóját, mintegy 50%-uk még azzal sincs tisztában, hogy hány lapja van a téglatestnek. Egyes osztályokban viszont szinte minden tanuló hibátlanul megoldja a téglatest hálójával és a felszínszámítással kapcsolatos feladatokat. Ezekből a felmérési eredményekből arra következtetünk, hogy a hiányosságok tanítási hibából erednek. A tízéves gyereknek bemutatással, magyarázattal, közléssel nem lehet biztonságosan megtanítani ezeket az ismereteket. Rá kell szánnunk legalább egy órát a téglatestek építésére, szétbontására, a testhálók megrajzolására (**Tk. 4.34–4.38.; Matematika 5. gyakorló 8.40–8.45., 8.53., 8.60.**). Ezeknek a feladatoknak a felszínszámítás megtanításán túl a térszemlélet fejlesztésében van szerepük. *A térszemlélet csak a tényleges térbeli tevékenység közben alakulhat ki,* azt pedig magyarázattal nem pótolhatjuk.

A téglatest térfogata

Alsó tagozatban téglatesteket építettek színes rudakból. Összeszámlálták, hogy hány fehér kockából, rózsaszín rúdból stb. építhető fel a test. Tapasztalatokat szereztek, de a téglatest térfogatszámításának, illetve a térfogat mértékegységeinek ismeretét nem várhatjuk el az ötödik osztályba lépő tanulóktól. Itt is érvényes, amit a felszínszámítás tanításával kapcsolatban elmondtunk. *Szemléletileg megalapozott, alkalmazásképes ismereteket magyarázattal nem közvetíthetünk.*

A kísérletezésből kiinduló *irányított felfedeztető tanulás* mozzanatai ebben a témakörben:

1. A tanulók kiscsoportos munka keretében testeket építenek fel, összeszámlálják a testet felépítő színes rudakat, egységkockákat. (Ez a szakasz lényegében az alsó tagozatos tapasztalatszerzés folyamata. Ötödik osztályban néhány feladattal felidézzük a korábbi élményeket. Ha hiányzik ez a feltételezett előkészítő folyamat, akkor több ilyen feladatot kell megoldatnunk az összefüggések felismerésének, a logikai rendezésnek az igénye nélkül.)
2. Különböző összefüggéseket ismernek fel. *Például:*

   A 64 egységkockából kirakható téglatest minden élének hosszúsága osztója a 64-nek.

   Ugyanannyi egységkocka fér el a téglatest egy éle mentén, mint amennyi az él hosszúságának a mérőszáma.

   Ugyanannyi egységkocka fér a téglatest alapjára, mint amennyi az alaplap területének mérőszáma.

   Ebben a szakaszban még nem célszerű meghatározott irányba terelni a „felfedezéseket".
3. Felismerik (a területszámításnál tanultak mintájára) az összeszámlálás ésszerűsítésének lehetőségét. Konkrét téglatestek esetén, a kirakást felidézve, az összeszámlálást gondolatban is képesek elvégezni.
4. A testépítésnél szerzett tapasztalatokat, a kirakást felidéző gondolatmenetet alkalmazzák a térfogat-mértékegységek közti összefüggések felismerésére.
5. A tanulók a tanár irányításával (közös munkával) eljutnak az általános összefüggések felismeréséhez és alkalmazásához.
6. A térfogatszámításról és az űrmértékekről tanultak összekapcsolása. Az összefüggések tudatosítása. Gyakorlati jellegű feladatok megoldása; szoba, szekrény, akvárium stb. térfogatának és űrtartalmának *becslése*, majd a szükséges adatok *mérése* után a *kiszámítása*.
7. A tanultak begyakorlása, „összeszövése" a korábbi, illetve a későbbi anyagrészekkel. (Bár a téglatest térfogatának kiszámítását az ötödik osztály végére minden tanulótól elvárjuk, ez a szakasz lényegében az általános iskola végéig tart.)

   A tapasztaltak megbeszélése során követeljük meg az elnevezések (csúcs, él, lap) pontos használatát. A mértékegységek átváltásakor gyakoroltatjuk a természetes számok és a tizedestörtek szorzását 10-zel, 100-zal, 1000-rel; a térfogatszámításkor a természetes számmal való szorzást (esetenként az osztást). Folyamatos ismétlés gyanánt határoztassuk meg a testek felszínét is.

A térfogatszámítás alkalmas a szorzás műveleti tulajdonságainak (felcserélhetőség, csoportosíthatóság) szemléltetésére, e tulajdonságok ismételt tudatosítására.

A tanultak gyakorlati alkalmazásaként határoztassuk meg kézbe adott, különböző méretű dobozok, a tanterem stb. térfogatát.

Azoknak a tanulóknak, akiknél hiányosságokat figyeltünk meg ezen a téren, több órán adhatunk ilyen feladatokat (esetleg házi feladatként, amelyet viszont ellenőrzünk). Ám a rutinfeladatok sulykoltatása ne vegye el az időt a térszemlélet és a problémamegoldó képességet fejlesztő érdekes feladatok megoldásától. A feladatmegoldások során ismételten idéztessük fel a kirakás gondolatmenetét, ezzel mintegy *bizonyíttatjuk* a számításokat.

Az űrtartalom mérése

Ismertessük fel, hogy az „űrtartalom” és a „térfogat” elnevezés ugyanazt a fogalmat jelöli. Sok tanulót megzavarhat a köb**deci**méter–**deci**liter, a köb**centi**méter–**centi**liter stb. elnevezésekben meglévő közös tag. A tankönyv 167. oldalán lévő ábrák elemzésével próbáljuk megelőzni ezt a típushibát.

A tanulók ténylegesen hajtsanak végre méréseket (**4.52.** feladat), hogy tapasztalatokat szerezhessenek különböző poharak, edények űrtartalmával kapcsolatosan, és képesek legyenek hasonló űrtartalmak becslésére.

A tankönyv 168. oldalán lévő táblázat áttekintésével alkalmunk nyílik a különböző mértékegységekről tanultak rendszerezésére.

Gyakorlófeladatok

A fejezet elegendő feladatot biztosít az összefoglaláshoz, rendszerezéshez, de a folyamatos ismétléshez, a hiányosságok pótlásához célszerű válogatnunk a **Matematika 5. Gyakorló 7.** és **8.** fejezetének feladataiból is.

A **4.53.** feladat ábráinak megrajzolásával a tanulók fejleszthetik a manuális készségeiket. Ezeket nem föltétlenül célszerű egyszerre megrajzoltatnunk. Hatásosabb (és a tanulók sem unják meg), ha naponként csak egy-két ábra megrajzolását kérjük tőlük.

A gyakorlati jellegű szöveges feladatok (**4.62–4.65., 4.67.**) fontos szerepet játszanak a tanulók képességeinek fejlesztésében. Föltétlenül oldassuk meg ezeket a feladatokat, és beszéljük is meg a megoldást. A **4.66.** feladat megoldásával nemcsak gyakoroltatjuk a felszín-, illetve a térfogatszámítást, hanem mélyebb geometriai összefüggéseket fedeztethetünk fel.

Törd a fejed!

A feladatokat például pontverseny keretében adhatjuk fel.

Tehetséges tanulóinkkal oldassuk meg a **Matematika 5–6. Feladatgyűjtemény** feladatait is.

5. A törtek

Elsőrendű feladatunk, hogy a számok (aritmetika) tanítása korszerű matematikai szemlélet megalapozásához vezessen.

A törtek tanításánál (de a többi matematikai fogalomnál is) ez kétirányú tervezést feltételez. Egyrészt a törteket be kell építeni a számok fogalomrendszerébe, fel kell tárni az egymásra épülő részfogalmakat, kapcsolatot kell teremteni a matematika egyéb fogalomrendszereivel, valamint más tantárgyakkal (fizika, kémia, technika stb.). Ez a rész az ún. tartalmi tervezés. (Tehát az, hogy mit milyen mélységig, milyen összefüggések feltárásával akarunk megtanítani.)

Másrészt fel kell tárnunk a környezeti ún. „kiszolgáló" elemeket, amelyek segítségével tartalmi céljainkat megvalósítjuk. Így meg kell találnunk az életkori sajátosságoknak megfelelő motivációt, a tárgyi tevékenység lehetőségét, a tanítási egységnek a fogalomalkotásban elfoglalt helyét, a leghatékonyabb munkaformákat, módszereket, s mindezeket úgy kell tervezni, hogy a tananyag elsajátítása mellett elérjük nevelési céljainkat is. Mindezek hangsúlyozottan mutatják a rendszerszemlélet szükségességét a matematikatanításban.

A törtek fogalmának kialakítása alsó tagozaton kezdődik. Ezt az időszakot a manipulációnak és a tapasztalatgyűjtésnek kell jellemeznie. Sem a ráfordítható óraszám, sem a tanulók fejlettsége, előképzettsége nem teszi lehetővé az absztrakciót. Az elsietett fogalomalkotás hátrányát igazából a felső tagozaton éreznénk, elsősorban akkor, amikor a tanulók olyan ismérveket is a törtek fogalomjegyei közé sorolnának, amelyek nem tartoznak oda, illetve több fogalmi jegyet elhagynának. A nem kellően megalapozott ismereteket a tanuló könnyen elfelejti, nem képes újszerű feladatban alkalmazni (transzferálni).

5. osztályban a törtek értelmezéséből az azonos nevezőjű – illetve könnyen azonos nevezőjűvé alakítható – törtek összeadásáig, kivonásáig, valamint természetes számmal való szorzásukig, osztásukig jutunk el.

Mindegyik alfejezetben elevenítsük fel a tizedestörtekről tanultakat. Ismertessük fel a tanulókkal, mivel a tizedestörtek is törtek, ezért a tizedestörtek esetén tanult eljárások (egyszerűsítés, bővítés, összehasonlítás, műveletek) speciális esetei a törtek esetén tanultaknak.

Ha az alsó tagozaton nem halmozódtak fel súlyos hiányosságok, és az első négy fejezet feldolgozására nem kellett túl sok órát fordítanunk, akkor célszerű a törtek tizedestört alakjával is foglalkoznunk. (Lásd a tankönyv bővített változatának megfelelő fejezetét.)

6. osztályban el kell érnünk, hogy a törtek körében mind a négy alapműveletet el tudják végezni a tanulók.

7., 8. osztályban a racionális számokról tanultakat folyamatosan ismételjük, és egyre összetettebb feladatokban gyakoroltatjuk. Minden tanulótól követeljük meg a racionális szám fogalmának biztos ismeretét, s e számok halmazán végzett műveletek készség szintjén való végzését.

A törtekről tanultak begyakoroltatását a **Matematika 5. Gyakorló 5.** fejezet feladatainak megoldatásával érhetjük el.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. Az alsó tagozatban szemléletes szinten kialakított törtfogalom tudatosítása továbbra is a szemléletre támaszkodva; elnevezések, jelölések, definíciók. *A tört kétféle értelmezésének ekvivalenciája. A tört mint szám* fogalmának kialakítása. A törtek ábrázolása számegyenesen. Mennyiségek törtrészének meghatározása.
2. *A törtek bővítése, egyszerűsítése.* A számok végtelen sokféleképpen írhatók fel törtalakban. Azonos nevezőjű, azonos számlálójú, majd különböző nevezőjű és számlálójú *törtek nagyság szerinti összehasonlítása.* (Még nem tudatosíthatjuk, hogy például a nevezők legkisebb közös többszörösét kell meghatároznunk.)
3. Egyenlő nevezőjű, illetve (a szemléletre támaszkodva) könnyen egyenlő nevezőre hozható *törtek összeadása, kivonása*. Az összeadás tulajdonságairól tanultak kiterjesztése a törtekre. Az összeadás és a kivonás összefüggésének tudatosítása.
4. *A törtek szorzása, osztása természetes számmal.* A szorzás tulajdonságairól tanultak kiterjesztése a törtekre. A szorzás és az osztás összefüggésének tudatosítása. A zárójelek alkalmazásáról, valamint a műveleti sorrendről tanultak kiterjesztése a törtekre.
5. A tört fogalomrendszere kiépítésének minden lépésében annak tudatosítása, hogy a tizedestörtek is törtek. A tizedestörtek bővítése, egyszerűsítése, nagyság szerinti összehasonlítása, illetve a tizedestörtekkel végzett műveleti eljárások értelmezhetők a törtekről tanultak alapján. *Jobb csoportban:* A törtek tizedestört alakja.
6. A tanultak alkalmazása egyszerű szöveges feladatok, egyszerű egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásában, sorozatok, függvénytáblázatok hiányzó elemeinek meghatározásában.
7. A mennyiségek törtrészéről tanultak alkalmazása események valószínűségének összehasonlításában. *A relatív gyakoriság, illetve a valószínűség fogalmának előkészítése.*

Kapcsolódási lehetőségek

Halmazok, logika

Az elemi logikai és halmazelméleti ismeretek eszközszerű alkalmazása a „természetes szám”, „törtszám”, „törtalakban írható szám” fogalmak közti kapcsolatok áttekintésében. A pozitív számok és a természetes számok egymás kiegészítő halmazai a törtalakban írható nemnegatív számok halmazában. Később az egész számok, majd hatodik osztályban a negatív törtek értelmezésével a „tanult számok halmaza” a racionális számhalmaz lesz.

Az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása során vizsgáljuk az alaphalmazt, illetve meghatározzuk a nyitott mondat igazsághalmazát.

A számtan, algebra egyéb témakörei

A szám-, illetve a műveletfogalom kiterjesztése, a műveleti tulajdonságok vizsgálata során az eddig tanult ismereteket eszközszerűen alkalmazzuk, illetve általánosítjuk. Fontos a zárójelek használatáról és a műveleti sorrendről tanultak gyakorlása. A törtek egyszerűsítése, illetve bővítése során elemi számelméleti ismeretekre (oszthatóság, osztó, többszörös), illetve a hányados változásairól tanultakra támaszkodhatunk.

Az egyszerű egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásakor a műveletek közti kapcsolatokról tanultakat alkalmazzuk.

Relációk, függvények, sorozatok

Sorozat, illetve függvénytáblázat kitöltésének folytatása adott szabály alapján. Néhány elemével megadott sorozathoz, táblázattal adott függvényhez szabály(ok) keresése.

Mennyiségek törtrészének kiszámítása az arányos következtetésekhez kapcsolódik.

Mérés, geometria

A törtek szemléltetésekor szakaszokat, téglalapokat, köröket osztunk fel egyenlő részekre. A mértékegységek átváltása során tudatosítjuk a tized, század, ezred fogalmát.

Statisztika, valószínűség

A tört fogalmának kialakítása, illetve a törtek nagyság szerinti összehasonlítása megteremti az alapot a relatív gyakoriság meghatározására, a valószínűség fogalmának előkészítésére (a valószínűség mint az esemény bekövetkezésének esélye), események valószínűségének összehasonlítására.

A tananyag-feldolgozás áttekintése

A törtek értelmezése

Bár alsó tagozatból bizonyos elemi törtfogalmat hoznak magukkal a tanulók, mégis szükséges a bőséges tapasztalatszerzés 5. osztályban is.

Az ismeretszerzés fázisai:

- cselekvés, kísérletezés, tapasztalatgyűjtés;
- sejtések, felfedezések (heuréka);
- lényeges fogalmi jegyek megkeresése;
- lényegtelen, esetleg hibás jegyek („zajok”) kiszűrése;
- egyszerű fogalmak kialakítása, elnevezések;
- manipuláció az egyszerű fogalmakkal;
- magasabb rendű fogalmak kialakítása;
- fogalomrendszerek kialakulása;
- kapcsolatok egyéb fogalomrendszerekkel.

Ezek a fázisok magukban foglalják az alkalmazást, a gyakorlást, a külső-belső koncentrációt, a transzfert (új területen való alkalmazást) és az ismétlést is. Ebből következően minden fogalom kialakítását – így a törtekét is, még ha időigényesebb, akkor is – feltétlenül kísérletezéssel, konkrét tárgyi tevékenységgel kell kezdenünk. Fontos, hogy minél többféle modellt kapjanak a gyermekek a kezükbe, hogy ne egy eszközhöz kössék a törtfogalmat, hiszen akkor eseleg a modell jellemző jegyeit („zaj") is a tört fogalmi jegyeinek tekintik. A tankönyvben a színesrúdkészlet, területmodellek, szakaszmodellek, korongok, logikai készlet stb. szerepelnek javasolt eszközként.

A törtek kétféle értelmezését tárgyaljuk.

A tört mint a törzstört többszöröse. (Törzstört számlálója 1, a nevezője pozitív egész.) *Például:*

$\frac{3}{4}$ az $\frac{1}{4}$ (az egység negyedének) háromszorosa.

A tört mint valamely mennyiség valamekkora része. *Például:*

$\frac{3}{4}$ a 3 egésznek az $\frac{1}{4}$ része.

Mindkét értelmezés magában foglalja a tört mint osztás, vagy másképpen, *a tört mint hányados* fogalmát is. Erre még később – a tizedestörteknél – visszatérünk, s akkor részletesebben tárgyaljuk. Itt csak alaposan előkészítjük.

Kövessük végig az ismeretszerzés fázisait!

Kezdetben tanulópárokban vagy 3-4 fős csoportokban különböző eszközökkel kísérleteket végeznek a tanulók. Az eszközök használatát a tanár szemlélteti, ezután önálló munka folyik. Érjük el, hogy a tanulók annyit fedezzenek fel a törtek értelmezéséből, amennyit képesek. (A szemléletileg nem alátámasztott, túl gyors absztrakciónak későbbi munkánk során látjuk kárát.) Később ugyancsak csoportmunkában dolgoznak, tanári demonstráció nélkül, viszont tanári utasításra – a tanár irányítja a tapasztalatszerzést.

A csoportmunka több szempontból kívánatos. Egyrészt így többféle tapasztalatot szereztethetünk (különböző csoportok például más-más eszközzel, más-más törtrészt keresnek meg), másrészt a jobb képességű tanulók segítik a tanár munkáját, irányítják a csoportban lévő gyengébb képességű tanulók tevékenységét.

A sejtések kimondása föltétlenül frontális munkát igényel, a tanulók összevetik saját tapasztalatukat társaikéval. A sejtések megfogalmazása olyan legyen – úgy irányítsa a tanár –, hogy a lényeges, jellemző jegyeket meg tudják állapítani. Felhívjuk a figyelmet néhány gyakran előforduló hibára:

A tanulók keverik a számláló és a nevező fogalmát.

Rosszul olvassák ki a törteket.

Pontatlanok a meghatározások. *Például:*
„Ötödöt kapunk, ha egy egészet 5 részre osztunk." A példában is benne van, de a tanárnak is mindig javítani, illetve javíttatni kell: „Ötödöket kapunk, ha egy egészet 5 egyenlő részre osztunk."

Nem ismerik föl, hogy egy tört egynél kisebb, nagyobb, vagy egyenlő eggyel.

Amennyiben a tapasztalatszerzéskor, az eszközhasználatnál következetesek vagyunk, ezeket a hibákat elkerülhetjük.

Míg a törtek írását, olvasását; számláló, nevező, törtvonal fogalmát, az egynél nagyobb, egynél kisebb, eggyel egyenlő törtek fogalmát nem sajátították el a tanulók, addig nem szabad továbblépnünk, mert ezek olyan alapismeretek (egyszerű fogalmak), amelyek nélkül a továbbiakban nem tudunk dolgozni.

A „törtszám", illetve a „tört" mint tört alakú szám fogalmát az irodalomban és a pedagógiai gyakorlatban nem egységesen használják. Mi törtszámoknak nevezzük azokat a törteket, amelyek nem írhatók fel egész szám alakban.

A $\frac{4}{2}$ például tört alakú szám, röviden tört, mert két szám hányadosaként írtuk föl, de $\frac{4}{2} = 2$, ezért nem törtszám. A $\frac{3}{7}$ viszont törtszám.

Mindig fel kell hívni a tanulók figyelmét, hogy *például:* $\frac{1}{3}$ rész $\neq \frac{1}{3}$.
Dimenzionális különbség van köztük.
Így egy 12 cm-es szakasz $\frac{1}{3}$ része 4 cm, és nem 4, illetve 12 cm $\frac{1}{3}$ része = 4 cm $\neq \frac{1}{3}$.
(Később a százalékszámításnál is gondot jelent majd, hogy valamely mennyiség 80%-a nem $\frac{80}{100}$, hanem a mennyiség $\frac{80}{100}$ része.)

Törtek bővítése, egyszerűsítése

A törtek különböző szemléltetése (téglalapok, körök, szakaszok különböző egyenlő részekre osztása) során már korábban is célszerű megfigyeltetnünk, hogy egy-egy adott törtrész különböző módon leírható.

Például a téglalap területének az $\frac{1}{3}$, a $\frac{2}{6}$, a $\frac{3}{9}$ stb. része ugyanazt a törtrészt jelenti. Tudatosíthatjuk ezeket a megfigyeléseket, ha a törteket egymás alá helyezett, különböző beosztású számegyeneseken szemléltetjük. A megfigyelteket általánosítva eljuthatnak a tanulók annak a felismeréséhez, hogy bármely tört végtelen sokféleképpen felírható.

Az ilyen tárgyalásmód egyben kiszűri azt a hibalehetőséget is, hogy a törtek bővítését keverjék a tanulók a törtek természetes számmal való szorzásával. Csak megfelelő számú feladat megoldása után fogalmaztassuk meg azt a szabályt, amely a hányados változásával való kapcsolatot mutatja. („A tört értéke nem változik, ha mind a számlálóját, mind a nevezőjét ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk vagy osztjuk.")

Ha a szabályt korábban ismertetjük velük – s nem maguktól jönnek rá –, ismeretük formális lesz, nem látják az algoritmus mögött a tartalmat.

Az egymás alá helyezett számegyenesek jól modellezhetők a színesrúdkészlettel. A színesrúdkészlet azonban még sokoldalúbban is felhasználható, mert más-más rudat választva egységnek, a többi rúd is más-más törtet jelent, míg a számegyeneseknél ez újabb ábrát kíván.

A törtek bővítését és egyszerűsítését a következő fejezetek feldolgozásakor, a különböző nevezőjű és számlálójú törtek összehasonlítása, illetve a különböző nevezőjű törtek összeadása és kivonása alkalmával gyakoroltatjuk be. Ott újra és újra tudatosítanunk kell a törtek bővítésének, illetve egyszerűsítésének algoritmusát.

Törtek összehasonlítása

Eddig a törteket legtöbbször valamilyen mennyiséghez kapcsoltuk és törtrész mérőszámát jelöltük vele (akár a törzstört többszöröseként, akár valamely mennyiség valamekkora részeként értelmeztük).

Ebben a fejezetben már sokszor eltekintünk magától a mennyiségtől, és csak a mérőszámmal dolgozunk.

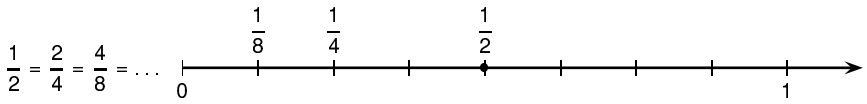
A konkrét mennyiségektől (hosszúság, terület, tömeg, darabszám stb.) való elszakadás nem jelenti azt, hogy itt már felesleges lenne a tárgyi tevékenység. A bevezető feladatok ebben a fejezetben is konkrét mennyiségek valamekkora részeinek mérőszámai összehasonlítására vonatkoznak.

Egyenlő nevezőjű törtek összehasonlításakor azt ismertetjük fel, hogy ha az egészet azonos nagyságú részekre osztjuk, akkor az a törtrész nagyobb, amely több egyenlő nagyságú részt tartalmaz, vagyis a számlálója nagyobb. Egyenlő számlálójú törtek összehasonlítása esetén azt kell megértetnünk, hogy ugyanannyi számú rész választásakor kisebb törtrészt kapunk, ha az egészet több egyenlő részre osztjuk, vagyis a nevező nagyobb. (Itt tört alakú számokat hasonlítunk össze, tehát például $\frac{16}{8}$ is előfordulhat a törtek között.)

A különböző nevezőjű és számlálójú törtek összehasonlítására háromféle módot ismerjenek meg a gyerekek:

- egyenlő számlálójú törtekké alakítva döntsük el a nagysági viszonyokat (építünk a manipulatív tevékenység tapasztalataira);
- egyenlő nevezőjű törtekké alakítjuk őket;
- ugyanolyan egységű, de különböző beosztású számegyeneseket helyezünk egymás alá, s az egyes osztópontok „vetítésével” eldönthetik a nagysági viszonyokat.

Mindhárom összehasonlítási módnak az az alapja, hogy bizonyos modelleken valamilyen törtrészt többféle formában is elő tudjanak állítani a tanulók. Ez ismét a konkrét tárgyi tevékenység fontosságát támasztja alá. *Például:*



Enélkül gondunk lehet mind az egyszerűsítéssel, mind a bővítéssel, ebből eredően a törtek sorba rendezésével, összeadásával, kivonásával.

Egyenlő nevezőjű törtek összeadása, kivonása

A tapasztalatok azt mutatják, hogy ez a fejezet nem okoz gondot a tanulóknak. Mégis tanácsoljuk, hogy a tankönyvben ajánlott manipulatív tevékenységet végeztessük el a tanulókkal, mert így megértik, miért kell azonos nevezőjűvé alakítani a törteket. A leghasznosabb a színesrúdkészlet és a területmodell.

Egyenlő nevezőjű törtek összeadását, kivonását maximális begyakorlottság (készség) szintjén kell tudniuk a tanulóknak.

Különböző nevezőjű törtek összeadása, kivonása

A könnyen azonos nevezőjűvé alakítható törtek összeadása, kivonása a követelmény (*például:* az egyik nevező többszöröse a másiknak vagy kis számok a nevezők, ezért látszik a legkisebb közös többszörös).

Ebben a fejezetben előtérbe kerül a belső koncentráció. Egyrészt motivál (érdekes), másrészt egyéb anyagrészt is gyakoroltatunk vele. Például mértékek, mértékegységek, sorozatok, nyitott mondatok.

A gyakorlófeladatok megválasztásában is szükségesnek tartjuk a differenciálást. Némely tanulónak a minimumkövetelmény teljesítése is komoly erőpróba. Velük elsősorban az összeadást és a kivonást gyakoroltassuk. A jobb képességűek optimális fejlődését ugyanakkor már csak a nehezebb, összetettebb feladatokkal biztosíthatjuk.

Az egyenleteket, egyenlőtlenségeket (**Tk. 5.36., B5.27.** feladat) elsősorban próbálgatással vagy lebontogatással oldassuk meg. *Például:* $1 - y = \frac{4}{9}$; 1-ből, azaz $\frac{9}{9}$-ből mennyit kell elvennünk, hogy $\frac{4}{9}$ maradjon?

A „zajok" kiszűrésére szolgál az ún. „Hűbele Balázs"-os feladat (**Tk. B5.26.**). Mindenképpen frontális munkában javasoljuk megoldatni. A leggyakrabban előforduló tanulói hibákat „rejtettük" el benne.

Bár a törtek bővítését, egyszerűsítését tanulták a tanulók, így elvileg minden alap megvan arra, hogy ezeket a feladatokat eszköz nélkül is megoldják, mégis javasoljuk, hogy azoknak a tanulóknak, akiknek problémát jelent az egyszerű numerikus feladat megoldása, engedjük meg az eszközhasználatot vagy a rajzos modell készítését.

Törtek szorzása természetes számmal

A törtek természetes számmal való szorzását kétféle módon vezetjük be. Mindkét út a korábbi anyag ismétlése is egyben.

Egyrészt a törzstörtek többszöröseként: $\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$; másrészt azonos tagokból álló összegeként: $\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Itt most komoly funkciója van a szorzótényezőknek. (Szorzandó, szorzó.) Ha felcseréljük őket, akkor (didaktikailag) más műveletet végzünk. A törttel való szorzás 6. osztályos követelmény.

Adnunk kell olyan példát is, ahol a szorzás mindkét formáját meg tudjuk mutatni. *Például:* $\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; vagy $\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{4 : 2} = \frac{3}{2}$.

Azaz: „… szorozzuk a tört számlálóját …", vagy: „… osztjuk a tört nevezőjét …". Ez utóbbit csak akkor célszerű alkalmazni, ha a nevező osztható az egésszel.

Sok példa megoldása során a tanulók felfedezhetik, hogy ha a törtet szorozzuk a nevezőjével, akkor a szorzat a tört számlálója lesz. Ezzel a felismeréssel mélyebbé válik a tört értelmezése is. *Például:* $\frac{3}{7} \cdot 7 = 3$; $\frac{5}{3} \cdot 3 = 5$; stb.

Később (7–8. osztályban, majd gimnáziumban) az algebrai kifejezéseknél, az egyenleteknél veszik ennek nagy hasznát.

Ebben a fejezetben is megvan a lehetőség a belső koncentrációra. Így kapcsolódhatunk *a műveleti tulajdonságokhoz, a műveletek sorrendjéhez, egyenletekhez, sorozatokhoz, terület-, kerületszámításhoz.* Az egyenletek megoldása során is tudatosíthatjuk a szorzás és osztás kapcsolatát.

Törtek osztása természetes számmal

A tanulók számára sokkal nehezebb ez az anyagrész, mint a törtek természetes számmal való szorzása, tehát szükséges a konkrét tárgyi tevékenység. Ha a tankönyv bevezető példái kevésnek tűnnek – nem tudják a tanulók megsejteni az osztás algoritmusát –, akkor még ne általánosítsunk, ne közöljük az algoritmust, hanem iktassunk az első két feladathoz hasonló feladatokat a begyakorlást szolgáló feladatok elé.

Itt is célszerű mindkét szabályt megtanítani, s példákon illusztrálni, hogy mikor melyiket érdemes alkalmazni.

A tizedestörtek természetes számmal való osztásának algoritmusát is magyarázhatnánk a törteknél tanultak alapján, ám a legtöbb tanuló számára túlságosan elvontnak tűnne ez az okoskodás. Ugyanakkor ennek a fejezetnek a tárgyalásakor is fordítsunk időt a tizedestörtek osztásának gyakorlására.

Mi a valószínűbb?

A nemzetközi, illetve a hazai felmérések minden esetben kimutatták, hogy a magyar tanulók közül csak nagyon kevesen boldogulnak a statisztika, illetve a valószínűségszámítás körébe tartozó feladatokkal. Ebben a témakörben sokkal gyengébb teljesítményt nyújtanak, mint a fejlett országokban tanuló kortársaik. Ez az eredménytelenség a következőkre figyelmeztet:

- Tanulóinknak sokkal több valószínűségi kísérletet kell önállóan vagy kiscsoportos munka keretében végrehajtani, hogy kellő tapasztalatra tegyenek szert.
- Meg kell tanulniuk az adatok rögzítését, rendezését, különböző szempontok szerinti elemzését.

A fentiek alapján fontos, hogy ennek a fejezetnek a feldolgozása során ténylegesen végezzék el a gyermekek a kísérleteket. A tapasztalatok alapján alakul ki a tanulókban a „biztos”, a „lehetséges, de nem biztos”, illetve a „lehetetlen” *esemény* fogalma. Tapasztalati szinten eljuthatnak a *nagy számok törvényének* megsejtéséhez.

Például a tankönyv 2. mintapéldájának feldolgozásakor először célszerű kiscsoportokban 20-20 dobást végrehajtani, és az eredményeket lejegyeztetni, majd a csoportok adatait összegezni. Az eredmények összehasonlítása során vizsgálhatjuk, hogy a kérdéses események a megfigyelt események mekkora hányadában következtek be, vagyis mekkora a relatív gyakoriságuk. Ez után megmutathatjuk, hogy a kísérletekben szerzett tapasztalatok hogyan igazolhatók az esemény szempontjából kedvező esetek és a lehetséges esetek arányának összehasonlításával.

Törtalakban írt szám tizedestört alakja

A fejezet a bővített tankönyvben található, ami jelzi, hogy az anyagrész 5. osztályban nem tantervi követelmény.

Ez a fejezet nem új anyag, hanem az eddigiek szintézise. A tört mint hányados; a törtvonal mint osztás; egyszerűsíthető, nem egyszerűsíthető törtek; egészek törtalakja; véges, végtelen tizedestörtek stb. fogalmakkal már korábban foglalkoztak. Ezekre a fogalmakra építve alakíthatjuk ki a racionális szám fogalmát.

Kezdjük a tizeddé, századdá, ezreddé stb. bővíthető törtekkel, ezeket könnyen fel tudják írni tizedestört alakban. Folytatjuk olyan törtekkel, ahol a bővítés már nem vezet eredményre, csak az osztás. (Egyébként meg kell mutatnunk, hogy az osztás akkor is eredményre vezet, ha tizeddé stb. bővíthető törtről van szó.)

Megsejtetjük a tanulókkal, hogy azok a törtek írhatók véges tizedestört alakban, amelyek nevezőjében – a lehetséges egyszerűsítések elvégzése után – csak 2-nek és 5-nek természetes szám hatványai vannak. (Ez nem követelmény, és csak konkrét esetekben kérjük a jobb képességű tanulóktól.)

A véges tizedestörtek törtté való visszaírását megköveteljük a tanulóktól (még a gyengébb képességűektől is), de a végtelen szakaszos tizedestörtek visszaírását nem.

Tisztáznunk kell, hogy ha egy törtalakban írt számot végtelen szakaszos tizedestört alakban írunk fel, akkor a szakasz hossza kisebb, mint a tört nevezője. (Mivel az osztás maradéka mindig kisebb, mint az osztó, ezért az osztó értékénél kevesebb különböző maradéka lehet az osztásnak.)

Gyakorlófeladatok

Ez a fejezet kettős célt szolgál. Egyrészt, ha kevés az adott órára a feladat, akkor innen lehet válogatni, másrészt ha a tudáspróba bizonyos hiányosságokat tárt fel, akkor ezekből a feladatokból válogathatunk olyanokat, amelyekkel a hiányokat megszüntethetjük. Mindkét esetben lehetőséget teremt a differenciálásra is.

Törd a fejed!

Ezeket a feladatokat differenciálási céllal, a tehetséggondozás szándékával szerepeltetjük a tankönyv bővített változatában. Kifejezetten azoknak a tanulóknak szánjuk, akik a törtek fogalmával rendelkeznek, biztosak a műveletek végzésében, és a korábbi feladatok nem terhelik le őket eléggé.

6. Geometriai vizsgálatok, szerkesztések

A tananyag „spirális felépítésének” koncepcióját követve a 4. fejezetben felelevenítettük, tudatosítottuk, absztraktabb szintre emeltük és esetenként általánosítottuk az alsó tagozatban már tanult geometriai tananyagot. Ennek a fejezetnek az első felében viszont a későbbi geometriai tananyag megalapozása történik. Az itt tanult új ismeretekkel, szerkesztési eljárásokkal az elkövetkező években még sokszor találkoznak a tanulók. Ezért *ennek a résznek a feldolgozását elsősorban szemléletformálásnak, készségfejlesztésnek tekintsük.* Tulajdonképpen csupán a szögmérést célszerű begyakoroltatnunk, a többi ismeret „készre tanítását” a nehezebben haladó tanulókkal ne erőltessük.

Minden órán törekedjünk a korábban tanult geometriai tananyag folyamatos ismétlésére. Alkalmazzuk a tanult elnevezéseket, fogalmakat, mértékegység-átváltásokat, számításokat.

A fentiek alapján belátható, hogy *a különböző képességű osztályokban különböző színvonalon kell feldolgoznunk a tananyagot.* Sőt, még azt is célszerű átgondolnunk, hogy egyes tanulóinktól mit várjunk (mit várhatunk) el. Például az ügyesebb tanulók körzővel és vonalzóval szerkesszenek, a nehezebben haladók derékszögű vonalzó segítségével.

Fontosnak tartjuk, hogy minden tanulóval felismertessük tanultak gyakorlati alkalmazhatóságát (térképhasználat, látszati képek értelmezése, geometriai számítások).

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. Ponthalmazok vizsgálata síkban és térben. Pontok, ponthalmazok távolsága. *A körvonal és a körlap, illetve a gömbfelület és a gömbtest mint ponthalmaz.* Körzőhasználat gyakorlása.
2. Ismerkedés egyszerű szerkesztésekkel. Háromszög szerkesztése három oldalából, a körvonalról tanultak alkalmazása. A háromszög-egyenlőtlenség felismertetése. Szakaszfelező merőleges fogalma, szerkesztése. *Jobb csoportban:* Téglalap szerkesztése. *Folyamatos ismétlés:* A téglalap kerülete és területe. A korábban és az újonnan tanultak integrálása („összeszövése” egységes, alkalmazásra képes ismeretrendszerré).
3. *Testek ábrázolása.* Kapcsolat a technika tantárggyal. Egyszerű testek nézeti képének értelmezése, a nézeti képek megrajzolása. *Folyamatos ismétlés:* Téglatest hálója, felszíne, térfogata.
4. *A szögtartomány fogalma, a szögek mérése szögmérővel, szögfajták.* Sokszögek, speciálisan négyszögek szögeinek vizsgálata.
5. *A geometriai ismeretek alkalmazása a mindennapi életben:* Térképhasználat, távolságmérés és iránymérés térképen, terepen. Tájékozódás iránytűvel, tájolóval. Kapcsolat a technika és a természetismeret tantárggyal.

Kapcsolódási lehetőségek

Halmazok, logika

Ponthalmaznak tekintjük az alakzatot távolságuk meghatározásakor, illetve a kör, gömb stb. értelmezésekor (a sík vagy a tér pontjainak halmaza az alaphalmaz). Ebben a felfogásban az alakzatok metszéspontjai a két ponthalmaz közös részének (metszetének) tekinthetők.

A négyszögek tulajdonságainak feltárása, a fogalomrendszer kialakítása során elengedhetetlen a vizsgált négyszögek részhalmazainak áttekintése, illetve a négyszögekkel kapcsolatos állítások igazságának eldöntése (**Tk. 6.41–6.42.**).

Számtan, algebra

A mértékegységek alkalmazása, átváltása során gyakoroljuk a természetes számok írását, olvasását, a 10-zel, 100-zal, … való szorzást. Összetettebb feladatok megoldásakor a természetes számok összeadását, kivonását (ha kapcsolódunk a terület- és térfogatszámításhoz, akkor a szorzását is).

A törtekről tanultakat alkalmazva értelmezzük a fokot mint az egyenesszög $\frac{1}{180}$ részét.

Vizsgáljuk az egyenesszög (π), illetve a derékszög törtrészeit (**Tk. 6.17., 6.22.**).

Relációk

A pontok és alakzatok között vizsgáljuk az *illeszkedés* (rajta van) relációt. Ez a kapcsolat – halmazelméleti szempontból – megfelel az elem és a halmaz közti „eleme” relációnak.

A mérés, geometria egyéb témakörei

Felelevenítjük az alapvető geometriai ismereteket, fogalmakat, továbbá a hosszúságmérést. Következetesen elvárjuk a terminológia helyes használatát (félegyenes, merőlegesség, párhuzamosság, síkidom, sokszög stb.). A sokszögek vizsgálatát (tapasztalatgyűjtés szintjén) kiegészítjük szögeik vizsgálatával. Az időméréssel (és a törtekkel) teremthetünk kapcsolatot az óramutatók által bezárt szögek vizsgálatával (**Tk. B6.13 – B6.15.**).

A szerkesztési feladatokban, illetve a négyszögek vizsgálatakor kiszámíttathatjuk a sokszög kerületét, illetve a téglalapok területét, téglatestek felszínét és térfogatát.

Kombinatorika

Esetenként a feladat megoldásának áttekintéséhez (például a **Tk. B6.06.** *a)* feladat tizenhat megoldásának megtalálásához) szükséges a kombinatorikai modell felismerése.

Tantárgyak közti kapcsolat (környezetismeret, technika)

Tereptárgyak távolságának mérése térképen. Testek ábrázolása.

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Ponthalmazok, a kör és a gömb

A feladatok megoldása során, az aktuális geometriai tartalom tudatosítása mellett, felelevenítjük a szakasz, félegyenes fogalmát és jelölését, gyakoroltatjuk adott hosszúságú szakasz kijelölését *szakaszmásolással.* Ráirányítjuk a tanulók figyelmét a *pontos fogalmazás* szükségességére.

Az ötödik osztályos tantárgyak közül a környezetismerettel (földrajzzal) kell elsősorban megteremtenünk a koncentrációt. Ezt sokan feleslegesnek tartják, pedig a matematika gyakorlati alkalmazása mellett a valódi távolságok kiszámításával a mértékváltást és a 10-zel, 100-zal, 1000-rel való szorzást gyakoroltathatjuk, továbbá szemléletes szinten előkészíthetjük a hasonlóság tanítását.

Két ponthalmaz távolságának fogalmához gyakorlati mérésekből kiindulva, kötetlen felfedező munka eredményeként, az elképzelések megvitatásával juthatnak el a tanulók. Ezért *ne magyarázzuk meg előre ezt a fogalmat.*

A **Tk. 6.02–6.03.** feladat feldolgozását *csoportmunkában* javasoljuk. A kiscsoport tagjai vitathassák meg, hogyan érdemes értelmezni a távolságot, majd a csoportok ismertessék az osztály előtt az elképzeléseiket. Ezzel elősegíthetjük, hogy a felfedezett ismeretek a szemléletesség szintjéről a fogalmi szintre fejlődjenek. El kell érni, hogy (az általános iskolában elfogadható pontossággal) önállóan értelmezzék a ponthalmazok távolságát, és felismerjék, hogy 0 a távolság, ha a két ponthalmaznak van közös része. Megvizsgáltathatjuk azt is, hogy miért nem célszerű más értelmezésben megállapodnunk.

Két ponthalmaz távolságát egzaktan csak a felsőbb matematikában, a határértékszámítás fogalmaival definiálhatjuk, hiszen a két ponthalmaz pontjait összekötő szakaszok között nem biztos, hogy van legrövidebb. Ez a pontatlanság az általános iskolában nem jelent gondot sem a fogalomrendszer további kiépítésében, sem a gyakorlati alkalmazásában.

A geometriában a kör és a gömb különlegesen fontos szerepet játszik. Ötödik osztályban az a feladatunk, hogy a korábbi években a gömbről és a körről szerzett (szemléletes) tapasztalatokat és ismereteket bővítsük. A következő években tovább gyarapodnak ezek az ismeretek. Hatodikban a körív, a szelő és a körcikk fogalmával, hetedik osztályban, illetve nyolcadikban a kör kerületének és területének a kiszámításával, később a gömb térfogatának és felszínének a meghatározásával. Vizsgáljuk továbbá ezeknek az alakzatoknak a szimmetriaviszonyait is.

Ha olyan tulajdonságot adunk meg, amellyel pontok rendelkezhetnek, akkor beszélhetünk az ilyen tulajdonságú pontok halmazáról. Az adott tulajdonságú ponthalmaz az alaphalmaz (például egyenes, sík, illetve tér) egy alakzata. Ennek az alakzatnak minden pontja rendelkezik a megadott tulajdonsággal, az alaphalmaz más pontja azonban nem. Ötödik osztályban a körvonalat, a körlapot, a gömbfelületet és a gömbtestet adott tulajdonságú ponthalmazként értelmezzük.

Az adott tulajdonságú ponthalmazok vizsgálata korábban a gimnáziumi geometria egyik legnehezebben tanítható anyagrésze volt. Nyilván az általános iskolai tanulótól még nyolcadikban sem várhatjuk el, hogy a korábbi gimnáziumi tananyaggal megegyező abszt-

rakciós szinten és egzaktsággal sajátítsa el ezeket a fogalmakat. Még kevésbé követelhetjük meg, hogy minden tanuló alkalmazza ezeket az ismereteket bonyolult szerkesztési problémák megoldásában. Ugyanakkor ez a témakör (a geometriai transzformációkkal együtt), a gyermek életkori sajátosságainak és érdeklődési körének megfelelő absztrakciós szinten és módszerekkel tanítva, rendkívül alkalmas a geometriai szemléletmód és a vizuális problémamegoldó képesség fejlesztésére.

A következő tanítási tervet javasoljuk a kör és a gömb mint adott tulajdonságú ponthalmaz fogalomrendszerének az elsajátíttatására:

1. *Tapasztalatszerzés eszközhasználattal, kísérletezgetéssel*
   Az eszközhasználat elősegítheti a hiba folyamatos korrigálását, ezért dinamikusabban támogatja a tanuló szemléletét, mint a nehezebben javítható (ezért statikusabb) rajzos vázlat. A javítási lehetőségek miatt a tanuló magabiztosabban végzi a kísérleteket. A pontokat modellező sárgaborsószemek, illetve az egyeneseket modellező szívószálak mozgatása belsővé válik (interiorizálódik), ezzel fejlődik a vizuális gondolkodás.
2. Áttérés a *rajzos vázlat* készítésére
   A különböző tulajdonságú ponthalmazok (a körvonal pontjainak, a körlap belső pontjainak stb.) megkülönböztetése színezéssel.
   A tanuló felismeri, hogy a sík egy pontjából adott távolságra lévő pontok egy körvonalon helyezkednek el a síkon. Ez az adott távolság a kör sugara. Fordítva, azt is belátja, hogy a körvonal minden pontja sugárnyi távolságra van a kör középpontjától, a körvonalon belül levő pontok ennél kisebb, a körvonalon kívül lévő pontok nagyobb távolságra vannak a középponttól.
3. *A vizsgálatok kiterjesztése a térre*
   A gömbfelület, illetve a gömbtest (tömör golyó) pontjainak jellemzése eszközhasználatra támaszkodva.
4. *Az összefüggések tudatosítása, logikai rendezése*
   A körvonal, a körlap értelmezése.
   A gömbfelület, illetve a gömbtest értelmezése az előző két fogalom térbeli általánosításaként.
   Megvizsgálhatjuk a körlap és gömbtest megfelelőjét, ha az alaphalmaz az egyenes.
5. *Az összefüggések alkotó alkalmazása új összefüggések feltárásában*
   Háromszög szerkesztése három oldalból. A szakasz felezőmerőlegesének „felfedezése”.

Jobb képességű csoportban az előző tanulási folyamat modellként szolgálhat a következő adott tulajdonságú ponthalmazok vizsgálatában is:

a) Egyenestől adott távolságra lévő pontok halmaza a síkban az egyenessel párhuzamos egyenespár.
   Ezt a vizsgálatot kétféleképp terjeszthetjük ki a térre:

   vizsgáljuk az egyenestől adott távolságra lévő pontok halmazát a térben (végtelen hengerfelület);

   megkeressük adott síktól meghatározott távolságra lévő pontok halmazát a térben (a síkkal párhuzamos síkpár).

b) Szakasztól, illetve félegyenestől adott távolságra lévő pontok halmaza a síkban (esetleg az előző ismeretek alkalmazásaként; **Tk. B6.10.**).

c) Körvonaltól (körlaptól) adott távolságra lévő pontok halmaza a síkban, a körvonallal közös középpontú kör, körpár, illetve kör és a középpont, a távolságok viszonyától függően (**Tk. 6.07–6.08.**).

d) Adott ponttól adott irányban fekvő pontok halmaza egy félegyenes.

e) Párhuzamos egyenespártól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkban (**Tk. B6.11.**).

Ezt a vizsgálatot is kétféleképp terjeszthetjük ki a térre:

vizsgáljuk a párhuzamos egyenespártól egyenlő távolságra lévő pontok halmazát a térben (a párhuzamos egyenespártól egyenlő távolságra fekvő, az egyenesek síkjára merőleges sík);

megkeressük adott párhuzamos síkpártól egyenlő távolságra lévő pontok halmazát a térben (a síkpártól egyenlő távolságban fekvő, azokkal párhuzamos sík).

Megjegyzések

Ötödik osztályban (a kör és a gömb kivételével) a tanulóknak nem kell értelmezniük a különböző alakzatokat mint ponthalmazokat, de a felfedeztető tanulás során eljuthatnak erre a szintre. Semmiképp se várjuk azonban, hogy az adott feladathelyzettől függetlenül megtanulják ezeket az értelmezéseket. Célunk, hogy a tárgyi tevékenység, rajzos kísérletezgetés eredményeként fejlődjön az elemző, elvonatkoztató és általánosító képességük, illetve a problémaérzékenységük. Sajátítsák el az összefüggések keresésének a stratégiáját, a geometriai problémák megoldásának az elemeit.

Fontosnak tartjuk síkgeometriai problémák kiterjesztését a térbeli vizsgálatokra:

a térszemlélet fejlesztését folyamatosan szem előtt kell tartanunk;

a probléma új megvilágításba helyezése (a síkon megfogalmazott feladat átfogalmazása a térre) fejleszti a gondolkodás rugalmasságát, előkészíti a tanulót a megoldások több szempontból történő elemzésére;

az ismereteket magasabb szintű rendszerbe foglaljuk az általánosítással.

Ebben a témakörben a 10–11 éves gyermek életkori sajátosságai miatt csupán magyarázatokkal, tanári szemléltetéssel még minimális eredményt sem érhetünk el. Javasoljuk, hogy legalább három órán keresztül tevékenykedhessenek a tanulók a különböző eszközökkel, önállóan ismerhessék föl a keresett alakzatokat. Szabadon vitathassák meg észrevételeiket, sejtéseiket. Jól bevált a kiscsoportos foglalkozás.

A matematikai nevelés szempontjából kiemelkedően fontos célkitűzéseink (a kreativitás, a térszemlélet fejlesztése) mellett ne feledkezzünk meg a „prózaibb” oktatási, nevelési feladatok megoldásáról sem.

Következetesen (de türelmesen) kérjük számon a pontos fogalmazást, az elnevezések és jelölések helyes használatát.

Szilárdítsuk meg a merőlegesség és a párhuzamosság fogalmát. A tanulók tudatosan alkalmazzák a ponthalmazok távolságáról tanultakat a pont és egyenes, illetve két párhuzamos egyenes távolságának a meghatározására.

Ellenőrizzük, hogy tanulóink kellően begyakorolták-e a derékszögű vonalzó, a körző

és a szögmérő használatát. (Szakaszmásolás; egyenessel adott ponton keresztül párhuzamos egyenes; egyenes adott pontjára, illetve egyenesre adott pontból merőleges egyenes szerkesztése.) Ha bizonytalanságot tapasztalunk, akkor szervezzük meg a felzárkóztatást.

Következetesen kérjük számon a fegyelmezett, pontos és esztétikus munkát.

Háromszögek szerkesztése

A háromszögek szerkesztésével kapcsolatos ismeretek tudatosítása 7. osztályos tananyag. Az adott tulajdonságú ponthalmazok alkalmazásaként, tapasztalatgyűjtés szinten előkészíthetjük ezt a témakört.

A szerkesztési feladatok megoldása az általános iskolai matematikatanítás talán legtöbb gondot okozó területe. Ezért azt javasoljuk, hogy ötödik osztálytól kezdve foglalkozzanak a tanulók ezekkel a feladatokkal. Természetesen *követelményeket nem támaszthatunk ezen a téren,* és a feladatok, illetve a módszerek megválasztásánál körültekintően figyelembe kell vennünk a tanulók fejlettségét. Elképzelhetőnek tartjuk azt, hogy a differenciáltan megtervezett órákon csak a jobbak foglalkoznak a szerkesztéssel, a témához nehezebben kapcsolódó tanulók pedig elemi gyakorlófeladatokat oldanak meg.

A három oldalával adott háromszög *megszerkesztése* csupán a szakaszmásolás közvetlen alkalmazását tételezi fel, tehát a leggyengébbek számára sem jelenthet gondot. Ugyanakkor a szerkesztés „miértjének" a felismerése magas szintű analizáló és szintetizáló tevékenységet, fejlett problémameglátó és -megoldó képességet vár el a tanulótól. A tankönyv szemléletes példájának megoldása mintegy *modellt* ad a szerkesztési problémák megoldására.

Pólya György magyar származású matematikus és tantárgy-pszichológus vizsgálatai megmutatták, hogy a tanulók lényegesen jobban boldogulnak a feladatok megoldásával, ha a tananyag mellett elsajátítják a problémamegoldás stratégiáját is. Ez a stratégia nem a megoldás kulcsát nyújtja a tanuló kezébe, hanem az ötletek felkutatásához, a megoldás megtervezéséhez, igazolásához és a diszkussziához ad vezérfonalat.

A tankönyvben bemutatott változat a 10–12 éves tanulók életkori sajátosságait figyelembe véve kíván segítséget nyújtani a kezdő lépések megtételéhez. *Hetedik osztályra kell elérnünk,* hogy (a leggyengébbek kivételével) a tanulók ismerjék azt az utat, amelyet a feladat megértésétől a megoldás bizonyításáig és a diszkusszióig be kell járnunk.

(1) *Értelmezzük a feladatot!*

A feladatok megoldása során a tanulók mintegy fele nehezen boldogul a matematikai szöveg értelmezésével. Ezért javasoljuk:

a szöveg tagolását ceruzával berajzolt vonalakkal (mintapéldánkban most még megadtuk a tagolást);

az ismert adatok aláhúzását, bekarikázását esetleg különböző színű ceruzával;

a meghatározandó adatok kiemelését piros színnel;

annak a tudatosítását, hogy mit jelentenek a feladatban előforduló (az előbbiekben kiemelt) elnevezések;

egy olyan vázlat elkészítését, amelyre ráírhatók vagy színezéssel jelezhetők az ismert, illetve a meghatározandó adatok; jelölések bevezetését.

(2) *Keressünk összefüggéseket az adatok között!*

Elemeztessük az adatok jelentését.

Kötetlenül soroltassuk fel azokat a tulajdonságokat, amelyekkel a megszerkesztendő síkidom rendelkezhet. Az ötletgazdagság fejlesztése érdekében minél több ötlet megszületését segítsük elő, engedjük meg az ötletek szabad áramlását. Szelektáljuk a felismerni vélt összefüggéseket, de a tanulókat semmiképp se marasztaljuk el tévedéseikért.

Szükség esetén eszközhasználattal, rajzos kísérletekkel segítsük elő a megoldáshoz vezető ötlet megszületését, illetve kiválasztását.

Ha elegendő összefüggést ismertek fel a tanulók, akkor vizsgáltassuk meg, hogy mely tulajdonságokból, ötletekből indulhatunk ki.

A tanuló *problémaérzékenységének a fejlesztését* csak akkor érhetjük el, ha ebben a szakaszban biztosítjuk önálló munkáját.

(3) *Készítsünk tervet!*

A rajzos terv nem tévesztendő össze az (1), illetve a (2) szakaszban megrajzolt vázlatokkal! Míg azok szerepe a feladat elemzése (analízis), addig a tervben a tanuló összefoglalja, logikailag rendezi a felismeréseit (szintézis).

Szoktassuk rá tanulóinkat arra, hogy elég nagy, az adatoknak megfelelő méretű vagy azokkal arányos vázlatokat készítsenek. A vázlat és a terv legyen áttekinthető és tartalmilag, formailag legalább annyira pontos, hogy a tanár és a tanuló eligazodjon rajta. Ez az esztétikai és a munkafegyelemre nevelés mellett a fegyelmezett gondolkodást is fejlesztheti, továbbá elősegítheti a hibák elkerülését. Frontális munkában *fogalmaztassuk meg* a terv lépéseit.

(4) *Végezzük el a szerkesztést!*

Az ötödik osztályban az euklideszi szerkesztésben megengedett eszközök, vagyis az egyélű vonalzó és a körző mellett a derékszögű vonalzót is használhatják a tanulók.

A szerkesztéseknél csak akkor kérhetjük számon az esztétikus és pontos munkát, ha előzőleg begyakoroltattuk a körző és a vonalzók használatát. Erre a geometriai feladatok megoldásán kívül a táblázatok, díszítőminták rajzoltatása is lehetőséget ad.

(5) *Bizonyítsuk a szerkesztés helyességét!*

A bizonyítást a terv lépéseinek ismertetésével párhuzamosan is elvégeztethetjük. Lényeges, hogy kezdetben szóban, később egyre többször írásban is rögzítve indokoltassuk a megoldást. A bizonyítás rendszeres elhagyása súlyos oktatási és nevelési hiba.

A megoldás *kidolgozásának a képessége,* vagyis a megoldás megtervezésének, végrehajtásának és igazolásának a képessége ugyanolyan fontos a kreativitásra nevelés szempontjából, mint az ötletgazdagság, illetve a problémaérzékenység.

Az összefüggések felismerésével, logikai rendezésével a matematikai ismeretek is alaposabbak és tudatosabbak lesznek.

Ki kell alakítanunk (nem csak a matematikában) a jó minőségben elvégzett munka igényét. Ezt a nevelési célt csak példaadással és gyakoroltatással érhetjük el.

A fentiek miatt nem indokolható az a tanári gyakorlat, amely a feladatok megoldásának teljes kidolgozása helyett, időhiányra hivatkozva újabb és újabb feladatok felületes megoldásával kívánja oktatási céljait elérni.

(6) *Mi mondható még el a feladatról?* (Diszkusszió)

Ennek a szakasznak az elhagyására sem szolgálhat mentségül az időhiány, mert a matematikatanítás célját éppen az ilyen elemzésekkel érhetjük el leghatékonyabban. Megvizsgálható, hogy

- az adatok értelmezhetők-e másképpen is,
- hogyan változik a megoldás akkor, ha megváltoztatunk egy-egy feltételt,
- megkerestünk-e minden megoldást,
- felfedezhetünk-e a megoldás eredményeként valamilyen általános érvényű összefüggést,
- van-e más megoldási mód, melyik a célszerűbb, „szellemesebb", egyszerűbb,
- megvizsgáltuk-e a speciális eseteket,
- lehet-e a problémát, a megoldási módot általánosítani, más feladatok megoldására alkalmazni.

A diszkusszió fejleszti az ötletgazdagságot, a gondolkodás rugalmasságát, a problémaérzékenységet, az eredetiséget és a kidolgozási képességet, ezért a kreativitás fejlesztésének egyik legfontosabb eszköze.

Szakaszfelező merőleges

Ezt az anyagrészt a 6. osztályos tankönyv is feldolgozza. A helyi tanterv alapján dönthetünk úgy, hogy ebben az évben nem foglalkozunk ezzel a fejezettel.

Fontos, hogy a fogalmat a szemléletből kiindulva alapozzuk meg, ne elégedjünk meg a szerkesztési eljárás mechanikus elsajátításával.

Az egyenes adott pontjában az egyenesre merőleges egyenes szerkesztését téglalapok szerkesztésével gyakoroltathatjuk be.

Téglalap szerkesztése

A tankönyv bővített változatában található fejezet.

Az előző alfejezetek feldolgozása során megismert szerkesztési eljárásokat kell alkalmazni a tanulóknak. Ha önállóan dolgozhatnak, akkor többféle megoldási tervet találhatnak, amelyek eltérhetnek a tankönyvi mintapélda megoldásától (lásd **B6.13.** feladat).

Testek ábrázolása

A technika és a rajz tantárgyakkal koncentrálva ábrázolhatjuk a testek elöl-, felül- és oldalnézetét. A bővített tankönyvben található fejezet.

Az általános iskolai tananyag viszonylag kevés alkalmat biztosít a térszemlélet fejlesztésére, ezért minden lehetőséget ki kell aknáznunk.

Pszichológiai vizsgálatok szerint a képi gondolkodás fejleszthetősége (főképp a lányoknál) viszonylag korán lezárul. Ezért ha 10–12 éves korban mellőzzük a térgeometriai feladatok megoldását, az a későbbiekben behozhatatlan hátrányt jelent a tanulóknak.

A térgeometriai feladatok megoldását ebben az életkorban csak eszközhasználattal, tényleges tárgyi tevékenységgel várhatjuk el. Ezt *nem helyettesíthetjük* tanári szemléltetéssel, táblai rajzzal, még kevésbé szemléltetés nélküli magyarázattal.

A pszichológiai vizsgálatok azt is megmutatták, hogy *a vizuális gondolkodásnak más a szerepe a fiúknál, mint a lányoknál.* Ezért a férfiak hajlamosak túlbecsülni a szerepét, a (tanár)nők viszont általában nem érzik a szükségességét, ami már az ötödik osztályban is hátráltatja a sikeres matematikatanulást, és később komoly gondok forrásává válhat, hiszen a térszemlélet, a fejlett képi gondolkodás nemcsak a geometriában, hanem a műszaki gyakorlat számos területén is nélkülözhetetlen.

A feladatok egy részét úgy szerkesztettük, hogy megoldásuk eredményeként, eszközhasználatra támaszkodva a legkülönbözőbb mélységű és tartalmú matematikai összefüggések felismeréséhez juthasson el a tanuló. *Például* a **B6.06.** *a)* feladatban, az önmagában is érdekes kombinatorikai modell (és a 16 megoldás) megtalálása mellett, a testek egybevágósági transzformációit vizsgálva felfedezheti, hogy vannak olyan egybevágó testek, amelyek mozgással nem hozhatók fedésbe, csak síktükörre való tükrözéssel.

A szögtartomány

Többféleképp eljuthatunk a szög fogalmához:

1. A síkot a P kezdőpontból kiinduló két félegyenes két tartományra darabolja. (A két félegyenes által alkotott töröttvonal mindkét tartományhoz hozzá tartozik.) Ezeket a tartományokat nevezzük szögeknek, a P pontot a szög csúcsának, a két félegyenest a szög szárainak. Ebben az értelmezésben a szöget síkidomnak tekintjük. Abban a határhelyzetben, amikor a két félegyenes egybeesik (az előbbi értelmezés kiegészítéseként), bevezethetjük a nullszög, illetve a teljesszög fogalmát.

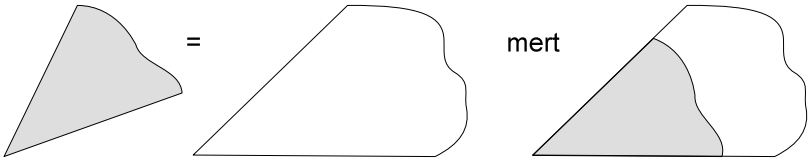
   Két szög egyenlő, ha egybevágó, vagyis mozgással fedésbe hozható. Két nem egyenlő szög közül az a nagyobb, amelyik tartalmaz azonos csúcsú és a másikkal egybevágó szögtartományt. Ha egy szöget egységül választunk, akkor a szögeket mérhetjük. Ebben az értelmezésben a szög értéke nemnegatív valós szám.
2. Ha a síkban egy P kezdőpontú félegyenes a P pont körül elforgatva egy kezdőhelyzetből egy véghelyzetbe jut, akkor (forgás)szöget súrol.

Az alsó tagozatos foglalkozások inkább a 2. értelmezést készítik elő, ötödik osztályban viszont az 1. értelmezést tudatosítjuk, ugyanis az kapcsolódik jobban a fogalomrendszerhez. Ugyanakkor a tapasztalatgyűjtés szintjén (síklapok feldarabolása, szívószálak, óramutatók elforgatása) célszerű mindkét értelmezéshez kapcsolódnunk. Sok olyan feladatot oldatunk meg, amely tárgyi tevékenységből kiindulva elvezeti a tanulót a fenti fogalmak szemléletes megalapozásához, továbbá az első értelmezés tudatosításához.

A két értelmezés között úgy teremtjük meg a kapcsolatot, hogy az elforgatott félegyenes által súrolt tartományt vizsgáljuk.

A szögtartomány egybevágóságának alkalmazásaként újra értelmezhetjük a *merőlegeseket* (négy egybevágó szögre darabolják a síkot) és a derékszöget.

A szögek nagyság szerinti összehasonlításának tanításánál, a hibás fogalomalkotás elkerülése céljából föltétlenül javasoljuk az eszközhasználatot. A tanulóknak az okozhat nehézséget, hogy a végtelen szögtartományok egybevágóságát véges modellel kell felismernie. Ezért a tapasztaltak helyes értelmezéséhez tanári magyarázatra is szükség lehet. Típushiba, hogy a tanuló azt a szöget tekinti nagyobbnak, amelyiknek a szárát hosszabbra húzta meg, vagy amelyiket nagyobb sugarú körívvel jelölt meg.



Javasoljuk, hogy az *egyenesszög* jelölésére már most vezessük be a π szimbólumot. Ha a szögmérés egységének nem csak a fokot (és kisebb részeit) választjuk (**Tk. 6.17.**), akkor elkerülhetjük azt a típushibát, hogy a gyermek a szöget csak fokokban mérve tudja elképzelni.

Szögek mérése szögmérővel

Hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a régi babilóniai csillagászok 60-as számrendszerének maradványaként a szögmérésnél nem 10, 100 stb. a váltószám (hasonlóan az időméréshez).

A szögek nagyságának a becslése, a becslés ellenőrzése méréssel elősegítheti az ismeretek alkalmazhatóságának fejlődését. A szögmérő használatát a feladatokban leírt egyszerű segédeszközökkel minden tanuló néhány perc alatt elsajátíthatja, és egy-két óra alatt maximálisan begyakorolhatja.

Az egyik felmérésünk szerint ötödik osztály végén a tanulók egyharmada nem tudta megmérni az adott hegyesszöget, ezért célszerű végiggondolnunk a szögmérés „lépéseit”.

Tudatos becslés: A tanuló megállapítja, hogy az adott szög kisebb vagy nagyobb a derékszögnél, illetve az egyenesszögnél (később, hogy hegyesszög-e, tompaszög-e stb.). Tudatosítja például, „ha a derékszögnél nagyobb, de az egyenesszögnél kisebb, akkor 90°-nál nagyobb, de 180°-nál kisebb”.

Mérés, az eszköz használata, a mérési eredmény leolvasása.

A szög nagyságának meghatározása a becsült és a mért eredmény összevetésével.

Jó módszertani fogás a papír szögmérő két skálájának különböző színűre színezése (például sorkiemelő filctollal).

A homorúszögek mérését csak a konvex szögek mérésének begyakorlása után célszerű gyakoroltatni. Homorúszög esetén még azt is célszerű előre megállapíttatnunk, hogy a szög 270°-nál nagyobb-e vagy kisebb.

A szögperccel, szögmásodperccel kapcsolatos feladatokból elegendő néhányat megoldani. Ebből felesleges szigorú követelményt támasztanunk. A fogalomalkotáshoz fontosabb az egyenesszöggel mint egységgel mért szögek átszámítása fokokba, és viszont.

Ezzel előkészíthetjük az ívmérték tanítását (a középiskolában sok gondot okoz), ismételhetjük a törtrész kiszámítását.

A tanulók ismerjék föl a mértékegység és a mérőszám változása közti összefüggést.

A szögek fajtái

A szögféleségeket csak akkor értelmezhetjük, ha a tanuló megbízhatóan és alkalmazhatóan ismeri a derékszög fogalmát, és képes a különböző szögek nagyság szerinti összehasonlítására. A tapasztalatok szerint jól bevált a **Tk. 6.24–6.25.** feladatban alkalmazott eszköz.

Az elnevezések megtanítását a feladatok megoldásához kapcsolódva a vizsgált szögek ismételt megnevezésével érhetjük el. „Melléktermékként" elmélyíthetjük, kiegészíthetjük a háromszögekről, négyszögekről tanultakat.

Ha az osztály színvonala megengedi a törzsanyag kibővítését, akkor itt külön foglalkozhatunk a konvex síkidomokkal, ezen belül speciális esetként a konvex szögekkel, illetve a konvex sokszögekkel. A tanulók felismerhetik a következőket:

A hegyesszög, a derékszög, a tompaszög, az egyenesszög konvex.

A konvex sokszög minden szöge konvex. A nem konvex sokszögnek van homorúszöge.

Tájékozódás a terepen és a térképen

Tájékozódás iránytűvel, tájolóval. (A bővített tankönyvben található alfejezet)

A követelményekben bekövetkezett változások miatt a geometriában tanultak gyakorlati alkalmazása a korábbiaknál nagyobb hangsúlyt kapott. Ezért rendkívül fontos, hogy ezt az anyagrészt a súlyának megfelelő gondossággal dolgozzuk fel.

Semmiképp sem javasoljuk, hogy ezzel a témakörrel tanórán foglalkozzunk. A környezetismeret és a testnevelés tantárggyal közösen célszerű megszervezni félnapos, egynapos tanulmányi kirándulást, és ennek keretében játékos versenyeken megtanulhatják a tanulók a térkép és a tájoló használatát. Az ilyen rendhagyó matematikaórák meglepő hatékonyságáról több ízben megbizonyosodhattunk.

Matematikából a következőket gyakoroltathatjuk:

1. Tereptárgyak helyének megkeresése betűből és számból álló rendezett jelpárral azonosítható mezőkre osztott térképen.
2. Útszakasz, kerítés stb. hosszúságának, épület, kisebb fa magasságának becslése, majd (a lehetőségekhez mérten) megmérése.
3. Távolságok meghatározása térkép segítségével. A térképen kijelölt és megmért útszakasz végigjárása.
4. Adott területek becslése, a becslés pontosságának ellenőrzése méréssel és számítással.
5. Az égtájak kijelölése tájolóval. Az északi iránytól mért irányszögek meghatározása. Annak felismertetése, hogy kétféleképp fordulhatunk a megjelölt irány felé.
6. Tereptárgyak azonosítása térkép, tájoló segítségével és távolságbecsléssel.

Mivel vannak olyan iskolák, amelyek nincsenek kellő mértékben ellátva a szükséges *mérőszalagokkal, laptájolókkal, turistatérképekkel,* ezért célszerű a foglalkozásokat legfeljebb 10 fős csoportokban szervezni, az eszközöket és a feladatokat pedig ciklikusan cserélni a csoportok között. A foglalkozásokat egy akadályversennyel zárhatjuk, amelyben a csoportok bemutatják a frissen szerzett tudásukat. (A pálya a tanár számára legyen belátható.)

A matematikai ismeretrendszer szemléleti megalapozása szempontjából is sok haszna van ezeknek a komplex foglalkozásoknak:

1. Előkészítjük a derékszögű koordináta-rendszer tanítását.
2. Gyakoroltatjuk a hosszúságmérést (terepen és térképen), a térképhasználat során a hosszúság mértékegységeinek átváltását. Előkészítjük a ponthalmazok távolságának fogalmát. Gyakoroltathatjuk a kerület- és a területszámítást.
3. A szögmérés gyakorlása, a pozitív, illetve a negatív elfordulás fogalmának előkészítése.
4. A hasonlóság fogalmának előkészítése

Gyakorlófeladatok
Törd a fejed!

A tankönyv bőséges választékot kínál a tanultak rendszerezésére, illetve a más témakörökkel való koncentráció megteremtésére. A feladatok egy részéhez a folyamatos ismétlés során is visszatérhetünk.

Ez a fejezet tartalmilag több helyen túlmutat az előző órákon tanultak egyszerű begyakorlásán, összeszövésén.

A téglatest élvázmodelljén (**6.37.** feladat) végzett vizsgálatok ráirányítják a figyelmet a térelemek kölcsönös helyzetére, távolságuk (szemléletes) meghatározására.

Átdarabolási problémaként foglalkozunk a trapéz és a paralelogramma területének kiszámításával. (**B6.18., B6.30.**) A területszámítás képleteinek megtanítása nem ötödikes követelmény.

A merőlegesség és a párhuzamosság tulajdonságait vizsgálva a relációkkal kapcsolatos tapasztalatok kibővülését is várhatjuk.

Javasoljuk, hogy a gyakorlóórákon a tanulóknak az egyéni fejlődésüknek optimálisan megfelelő feladatokat adjunk. Ügyeljünk rá, hogy a minimumkövetelményekben előírt ismereteket minden tanuló sajátítsa el és gyakorolja be.

7. Az egész számok

Az egész számokkal kapcsolatosan a különböző osztályokban körülbelül egyforma előképzettségre számíthatunk, ezért ebben a fejezetben valószínűleg kevésbé szükséges a tananyag variálása, szelektálása, mint az előző két fejezetben. A folyamatos ismétlés és a koncentráció megtervezésében, illetve a feladatok nehézségi fokának megválasztásában már jelentősebb különbségek lehetnek az egyes osztályok között.

Az átlagosnál gyengébb osztályokban föltétlenül biztosítsuk a kisebb lépésekben történő előrehaladást, akár a tananyag óvatos redukciójával is. Például az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásával ne foglalkozzunk külön órán. Az egy lépésben következtetéssel megoldható egyenleteket (hiányzik az összeg, illetve a különbség egy komponense: **Tk. 7.20.**) az összeadás, kivonás gyakorlása során oldják meg a gyerekek.

Jobb osztályokban külön órákat szánhatunk a koordináta-rendszer alkalmazására geometriai feladatok megoldásában, *a geometriai transzformációk* és a műveletek kapcsolatának elemzésére (**Tk. 7.38., B7.01–B7.05.**), az egész számokon értelmezett függvények vizsgálatára, néhány elemével adott sorozatok folytatására **Tk. 7.34–7.35.**, illetve egyszerű nyitott mondatok megoldására (**Tk. B7.06–B7.11.**).

Felméréseink az mutatják, hogy a tanulók jelentős hányada a 8. osztály végére sem sajátítja el szilárdan a racionális számkörrel kapcsolatos ismeretrendszert, és ezen belül a negatív számokkal végzett műveletek okozzák az egyik legnagyobb gondot. Ez kedvezőtlenül befolyásolja az egyenletek, az algebrai kifejezések, a függvények és sorozatok tanítását is. Végső soron sikertelenné teheti a tanuló további matematikai tanulmányait. Vizsgálatainkból az is kitűnik, hogy vannak osztályok, amelyekben a leggyengébb tanulók is keveset hibáznak ezekben a feladatokban, más osztályokban a legjobbak sem boldogulnak a viszonylag egyszerű számításokkal. Következésképp megállapíthatjuk, hogy ez a hiányosság nagyon erősen függ a tanártól, pontosabban a tanítási módszertől.

Beigazolódott, hogy a 10–11 éves gyermekek többsége deduktív úton még sikeresnek tűnő tanári magyarázattal sem képes tartósan és alkalmazásképesen elsajátítani ezeket az ismereteket. Az ilyen módszerrel tanított tanuló úgy végzi el például a negatív szám kivonását, hogy előzőleg megkísérli felidézni a tanult összefüggést, majd alkalmazza azt a konkrét számokra. Nyilvánvaló, hogy ez az út a gyerek számára nehézkes és sok buktatót rejt magában. Az a tanuló, aki az életkorának megfelelő, játékos tevékenységből kiindulva (például a kis autós modellel) sajátította el az ismereteket, azonnal „látja” az eredmény kiszámításának módját, de szükség esetén képes az összefüggés megfogalmazására is.

Egyes kerettentervek 6. osztályos követelményrendszere szerint *a negatív számokkal végzett műveleteket tanítanunk kell, de nem minimumkövetelmény*. Ugyanakkor *az egyszerű elsőfokú egyenleteket minimumszinten is meg kell oldaniuk* a tanulóknak. Ez utóbbi követelményt csak úgy teljesíthetik, ha negatív számokkal is végre tudják hajtani a műveleteket.

A tananyag-feldolgozás csomópontjai

1. A negatív egész számok mint ellentétes mennyiségek mérőszámai; értelmezés, elnevezések, jelölések, ábrázolás számegyenesen, nagysági viszonyok. Az egész szám fogalma, az egész számok ellentettje, abszolútértéke.
2. Kis abszolútértékű egész számok összeadása, kivonása szemléletre támaszkodva, modellekkel kísérletezve. A modellkísérletek során az összefüggések felismerése, (jobb csoportban) megfogalmazása.
3. Az öszeadás, kivonás legegyszerűbb tulajdonságainak vizsgálata, a természetes számok körében ismert azonosságok kiterjesztése az egész számok halmazára. Az összeadás és a kivonás közti kapcsolatok megfogalmazása.
4. Az egész számokról tanultak alkalmazása próbálgatással vagy egy-két lépésben következtetéssel megoldható egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásában, függvények, sorozatok vizsgálatában.
5. A derékszögű koordináta-rendszer értelmezése, alkalmazása függvények ábrázolásában, vizsgálatában, valamint geometriai problémák megoldásában.

Kapcsolódási lehetőségek

Halmazok, logika

A „pozitív szám”, „nempozitív szám”, „negatív szám”, „nemnegatív szám”, „természetes szám”, „egész szám” fogalmát a megfelelő halmazok, illetve ezeknek a halmazoknak az elemeiről megfogalmazott állítások vizsgálatával mélyíthetjük el (**Tk. 7.09.**). A fogalomrendszer pontosítását további logikai feladatok segítik (**Tk. 7.29., 7.36–7.37.**).

Nyitott mondatok igazsághalmazai (**Tk. B7.06–B7.09.**). Több egyenlet, egyenlőtlenség igazsághalmazának együttes vizsgálata (amellyel az egyenlőtlenség-rendszerek tanítását alapozzuk meg) feltételezi a logikai, illetve a halmazműveletek alkalmazását (**Tk. B7.10–B7.11.**).

Számtan, algebra egyéb témakörei

Elemi (szóbeli) számolási képességek folyamatos fejlesztése az összeadás és a kivonás gyakorlása során.

Az összeadás műveleti tulajdonságai, az összeadás és a kivonás kapcsolata, zárójelek használata.

Jobb csoportban a nyitott mondatról, egyenletről, egyenlőtlenségről tanultak alkalmazása az egész számok körében. (Részletesen lásd a tananyag-felépítés ismertetésénél.)

Relációk, sorozatok, függvények

Ötödik osztályban nem az a célunk, hogy a reláció, a függvény, illetve a sorozat fogalmát pontosítsuk, csupán a gyermek által korábban elsajátított szemléletes ismeretrendszer eszközszerű alkalmazását terjesztjük ki az egész számok körére, illetve fordítva, az egész számok körében tanultakat alkalmazzuk a sorozatokra, függvényekre.

Alkalmasan megválasztott sorozattal (**Tk. 7.02., 7.23.; 7.35.**) támaszthatjuk alá az egész számok nagyság szerinti összehasonlítását, az összeadás és kivonás, illetve a szorzás értelmezését.

A *koordináta-rendszer* bevezetésével, egyelőre csak tapasztalatgyűjtés szintjén, előkészíthetjük a reláció fogalmának pontosítását. Jobb csoportban továbbléphetünk a függvények vizsgálatában, derékszögű koordináta-rendszerben történő ábrázolásában (**Tk. 7.34.; Mgy. 6.29., 6.31.**). Ezen a téren azonban csak 6. és 7. osztályban támaszthatunk követelményeket.

Megtehetjük a kezdő lépéseket a függvénytranszformáció tanításának előkészítésére (**Tk. 7.26–7.27., 7.38., B7.01.; Mgy. 6.24., 6.30.**). Ezek a feladatok egyúttal a koordinátageometria tanítását is előkészítik, továbbá kapcsolódnak a geometriai transzformációk tanításához.

Geometria, koordinátageometria

A koordináta-rendszer megismerése során a tanulók vizsgálják az egyenestől, illetve két egyenestől adott távolságra (adottnál nagyobb, adottnál kisebb távolságra) lévő pontok halmazát.

A koordináta-rendszerben végzett transzformációk geometriai tartalmának, sokszögek tulajdonságainak vizsgálata (**Tk. 7.26–7.27., B7.02–B7.05.**).

Javasolt eszközök és modellek

A következőkben ismertetjük azokat az eszközöket, illetve módszereket, amelyek legjobban beváltak a kísérleteink során. Természetesen ez nem azt jelenti, hogy a kollégáknak egyedül üdvözítő módszereket akarunk sugallni, csupán bő választékot kívánunk nyújtani munkájuk megtervezéséhez.

A hőmérőmodell

A gyermek mindennapi tapasztalataihoz kapcsolja a számkörbővítést. A hőmérő skáláján felismeri és gyakorolja az egész számok számegyenesen való ábrázolását. A hőmérséklet csökkenése, illetve növekedése szemléletes rendszerét adja a mérőszámoknak. (Kapcsolat a környezetismeret tantárggyal és a technikával.)

Tengerszint alatti mélység, tengerszint feletti magasság

Az ellentétes mennyiségek szemléltetése, az abszolútérték fogalmának kialakítására alkalmas modell. (Kapcsolat a földrajzzal.)

A folyó vízállása

Az előző modellnél azért szemléletesebb, mert a változások nyomon követésére ad lehetőséget.

Készpénz–adósságcédula

Az ellentétes mennyiségek szemléltetése mellett tudatosul a tanulókban, hogy bármely vagyoni helyzet végtelen sokféleképpen állítható elő készpénz és adósságcédula segítségével. Konkrét esetekben megvizsgálhatják, hogy kinek jobb az anyagi helyzete, vagyis kinek nagyobb a „vagyona". Az előző modellekkel együtt, a többféle tapasztalattól elvonatkoztatva alakul ki az „ellentétes mennyiségek" szemléletes fogalma, majd további elvonatkoztatással a szám ellentettjének a fogalma.

Korong–lyuk-modell

Az előbbi modell szemléletes változata. A korong a lyukba helyezve nullát jelent. A számolás során „nullából" bármennyi lehet az asztalon. Például a következő kivonást ezzel a modellel így szemléltethetjük: (– 3) – (– 5) = 2.

A korongot vastagabb anyagból célszerű elkészíteni, mint a lyukat, hogy könnyen ki lehessen emelni azt a lyukból.

Kis autós modell

Tartós modellt készíthetünk 30–40 cm-es vonalzó hátoldalára ragasztott öntapadó ragasztószalagra rajzoltatva a számegyenest, a fát és a házat. A legfeljebb 8–10 mm hosszú, 4–5 mm széles kis autót legegyszerűbb törlőgumiból (radírból) kifaragni. (Egy radírból 15–20 kis autót is készíthetünk néhány perces munkával.) Lényeges, hogy a kis autó elejét egyértelműen meg tudjuk különböztetni a végétől.

Az első egy-két órán a számegyenesen való tájékozódás gyakorlását szolgálja. Ezeken az órákon még nem fordíttatjuk le a tevékenység eredményét a matematika nyelvére, hanem (a készpénz–adósságcédula-modellel együtt) kötetlen kísérletezéssel készítjük elő az egész számok összeadását, kivonását, szorzását.

A további órákon az összeadás és méginkább a kivonás begyakorlásának, az összefüggések felismertetésének legfontosabb eszköze lehet. A szemlélettől nehezen elszakadó tanulóknak addig engedélyezzük az eszköz használatát, amíg azt szükségesnek érzik.

Az első látásra bonyolultnak tűnik a modell használata a számegyenesen való lépegetéssel szemben. Ám ez a „bonyolultság" a fogalomrendszer tartalmi sajátossága, és nem a modellé. Meg kell különböztetnünk az előjelet a műveleti jeltől. Ha például csak a ceruza hegyével lépegetünk a számegyenesen, akkor éppen a nehezebben tanítható műveletet, a kivonást már nem tudjuk közvetlenül szemléltetni.

Számolóléc

Jól kiegészítheti az előző modellt. A kivonóskála használata igen szembetűnően világít rá az összefüggésekre. Alkalmas a modell az egyszerű egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásának a szemléltetésére (lásd később).

A tananyag-feldolgozás áttekintése

Nem elég a természetes szám

Többféle modellel tevékenykedtetve feleleveníthetjük a tanulók alsó tagozatban szerzett tapasztalatait.

A szemléletre támaszkodva elfogadják, hogy egyes mennyiségek egy kezdő értékhez (nullához) viszonyítva kétféle irányban vehetnek fel értékeket. Megállapodás szerint az egyik irányban (egyesével lépegetve) a *pozitív* egész számokkal, ellenkező irányban lépegetve a *negatív* egész számokkal fejezhetjük ki a mennyiség mértékét.

Az ismertetett modellekkel tevékenykedve a tanuló *szemléleti szinten* belátja, hogy a természetes számok rendezését terjesztjük ki az egész számokra. Például ha a +12-től lépegetünk a 0 felé, akkor *csökkenő* számsorozatot kapunk, csökkenő marad a sorozat akkor is, ha a lépegetést a negatív számok körében folytatjuk. Hasonlóan vizsgáljuk a számok növekedését. (Ebben az életkorban és ezen a képzettségi szinten semmiképp sem javasoljuk a „kisebb", „nagyobb" reláció definiálását az egész számokra.)

Néhány megjegyzés az *előjelek írásával kapcsolatban:*

A gyakorló pedagógusok többsége egyetért abban, hogy az előjeleknek a műveleti jelektől való megkülönböztetése elősegíti a fogalom kialakítását. Ezért a fogalmak kialakításának a fázisában célszerű másképpen írnunk az előjelet és a műveleti jelet.

A korábban alkalmazott megemelt írásmód ($^{+}2$, illetve $^{-}2$) azonban sokszor több kárral járt, mint amennyi haszon származott belőle. Egyrészt a fogalom kialakulásakor rögzítettünk egy nem szabványos írásmódot, amelyet később nagyon nehezen lehetett „kiirtani". Másrészt az előjelek megemelt írása „feleslegessé tette" a zárójelek használatát a műveletekben. Elterjedt a következő $^{-}5 - {}^{+}3 + {}^{-}7$ típusú írásmód a helyes írásmóddal összeegyeztethető $^{-}5 - (^{+}3) + (^{-}7)$ helyett. (Hogy ezt a hibát elkerüljük, az első órától kezdve ragaszkodjunk a zárójelek alkalmazásához.)

A fentiek miatt nem tartjuk célszerűnek az előjelek megemelt írását. Ugyanakkor színesen nyomtatva megkülönböztetjük az előjelet a műveleti jeltől.

A kivonás és az összeadás közti összefüggések felismerése után viszont feleslegessé válik a megkülönböztetés, ekkor javasoljuk a szokványos írásmódra való áttérést. Ezért már tudatosítsuk, hogy az előjelek megkülönböztetése a műveleti jelektől ideiglenes.

Az egész számok abszolútértéke

Az abszolútérték fogalmának a bevezetése feltételezi a szemléleti szinten kialakuló fogalomrendszer kissé magasabb absztrakciós szintre fejlesztését, logikai rendezését. Az osztály színvonala alapján döntsük el, hogy milyen mélységben foglalkozunk ezzel a résszel.

A számok abszolútértékének a fogalmát összekapcsolhatjuk a számok nagyság szerinti összehasonlításával. Ezzel mindkét szemléletes fogalom matematikai tartalmát mélyebben tárhatjuk fel.

Az egész számok összeadása, kivonása

Az egész számokon végzett négy alapműveletet (a program szerint) két év alatt kell megtanítanunk. Ötödik osztályban a természetes számokon értelmezett összeadást és kivonást általánosítjuk a negatív egész számokra.

A korábbi módszertani könyvek az összeadás és kivonás tanításának olyan módszerét javasolták, amely a 8. osztályos tanuló fejlettségének felelt meg. Kísérleteink azt mutatták, hogy ha ragaszkodunk ehhez, a 14 éves tanulóknál esetleg bevált módszerhez, akkor a negatív számok kivonását nem tudjuk ötödik osztályban megtanítani. Azokban az osztályokban viszont, amelyekben legalább három órán át tevékenykedtek a tanulók például a kis autós modellel, az összeadás és a kivonás tanításának eredményessége között nem láttak különbséget a kollégák.

Az összefüggések megfogalmazását 6. osztályban követeljük meg. Ötödikben nem erőltetjük az elvonatkoztatást és az általánosítást, ám ez nem jelenti azt, hogy jobb képességű tanulóink nem juthatnak el erre a szintre.

Az összeadás és kivonás közti kapcsolatok felismertetése után rátérhetünk az előjelek szokványos írására.

Az összeadás és kivonás tanításának javasolt szakaszai:

1. A tanuló sokféle eszközzel dolgozva, a legkülönbözőbb tartalmú és absztrakciós szintű feladat megoldása során olyan tapasztalatokat szerez, amelyek előkészítik az összeadás és a kivonás tanítását. Az eszközhasználat során még nem fordítjuk le a matematika nyelvére a feladatot, nem törekszünk az összefüggések megláttatására. Ez a szakasz foglalja magában az alsó tagozatos előzményeket is. Ebben a (az összeadás és a kivonás szempontjából kötetlen) tevékenységben a tanulóban szemléletes kép alakul ki az egész számok egymáshoz való viszonyáról. Például a hőmérőmodellel végzett óra eleji „bemelegítő foglalkozásokkal” elősegíthetjük azt, hogy a tanulók „meglássák” az egész számok egymástól való *irányított távolságát,* ami a különbség tanításának legfontosabb lépése (**Mgy. 4.14–4.22.**).
2. A tanulóknak az eszközhasználattal kapcsolatos feladatokat adunk, de a tevékenységet a tanuló *lefordítja a matematika nyelvére* (lásd a tankönyv kidolgozott mintapéldái, valamint a **7.12–7.13.** feladat).

A kísérletek azt mutatták, hogy ebben az életkorban a tanári szemléltetés nem helyettesítheti a tanuló saját tevékenységét. A szemléltetéssel támogatott magyarázat alapján a tanuló pillanatnyilag „megérti", de még nem „sajátítja el" az összeadást. *A többféle modellel végzett azonos matematikai tartalmú feladat megoldása előmozdíthatja az elvonatkoztatást.*

A számok összeadásának vektorokkal való ábrázolása nemcsak szemlélteti a feladat megoldását, hanem a későbbi, magasabb absztrakciós szintű tevékenységeket (például a műveleti tulajdonságok vizsgálatát) is előkészíti.

3. A tanulók számfeladatokat oldanak meg, *a megoldást a szemléletre támaszkodva indokolhatják* (**Tk. 7.14.; Mgy. 4.24–4.25.**). Javasoljuk, hogy a tanulók csoportmunkában dolgozva különböző eszközökkel oldják meg a számfeladatokat, hasonlítsák össze eredményeiket, fogalmazzanak többféle szöveget a feladathoz.

Ennek a szakasznak a végén *a modell technikai segédeszközzé válik.* Nem várhatjuk el, hogy a tanulók rutinosan dolgozzanak minden eszközzel, nem az eszközhasználat begyakorlása a cél, hanem a szemléleti megalapozás. A gyermek azzal a modellel tevékenykedjék, amelyik leginkább megnyerte a tetszését, és csak akkor használja azt, ha szükségesnek érzi.

4. Eszközhasználattal begyakoroltatjuk a kivonást. A feladatok megfelelő egymás mellé helyezésével előkészítjük, majd egy feladatsorral (**Tk. 7.15–7.18.; Mgy. 4.26–4.29.)** beláttatjuk a következő összefüggéseket:

   egész számot kivonni ugyanazt jelenti, mint a kivonandó ellentettjét hozzáadni a kisebbítendőhöz;

   a negatív szám hozzáadását helyettesíthetjük ellentettjének kivonásával.

A feladatsor feldolgozása után térhetünk rá az előjelek szokványos írására.

5. Az előző szakaszban felismert összefüggésekre támaszkodva egyszerűsíthetjük az összeg felírását, a számegyenesen való lépegetéssel előkészíthetjük az összevonás fogalmát (**Tk. 7.19., 7.32–7.33.; Mgy. 4.30.**). Az összevonás megtanítása 6–7. osztályos feladat. Az ötödikes tanuló szintjén (a biztonságot növelendő) „szabályokat" fogalmaztathatunk meg.
6. A kialakult ismereteket alkalmazzuk a sorozatok, függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek, kombinatorika témakörén belül (**Tk. 7.20., 7.22–7.23., Mgy. 6.24–6.31.**).
7. Majd 6. osztályban a műveleti tulajdonságokról, az összeg és a különbség változásairól, az összeadás és a kivonás közti összefüggésről tanultak érvényességének a kiterjesztésével deduktív módon is alátámasztjuk azokat az összefüggéseket, amelyeket ebben az évben a szemlélet alapján fogadtunk el.

Az összeadás és kivonás tanítását hátráltathatja a tanulók gyenge számolási képessége. A kis autós modell és a számolóléc segíthet ennek a gondnak a felszámolásában is. A számolási képesség fejlesztése érdekében és az egész számok összeadásáról és kivonásáról tanultak gyakorlására célszerű a későbbiekben is szóbeli feladatokat adni ebből a témakörből (például az óra bevezetéseként).

Az ötödikes gyerek gondolkodása erősen támaszkodik a szemléletre, ezért ha a tanuló szükségét érzi (főképp a kivonás elvégzésére), használhassa az eszközöket a feladatok megoldása során. „Adminisztratív úton" később se tiltsuk el a tanulót az eszköz-

használattól, hanem olyan feladatokat adjunk, amelyek „kikényszerítik” a gondolkodás magasabb szintre lépését.

A derékszögű koordináta-rendszer

A derékszögű koordináta-rendszer tanítását egyrészt a grafikonok, ezen belül a pontdiagramok értelmezésével, készítésével, másrészt a mezőkre osztott térképeken való tájékozódással készítjük elő. A bevezető példa szintén pontdiagram, de bevezetjük a negatív mérőszámokkal adott számpárok ábrázolását is, így általánosítjuk a grafikonoknál tanultakat. Ezen túlmenően a legtöbb osztályban a **Mgy. 6.23.** szemléletes feladata mellett más játékos feladatot is szükséges megfogalmaznunk.

Legkézenfekvőbb a tanulók szokásos ülésrendjének a meghatározására bevezetnünk egy „koordináta-rendszert”. Sorszámozzuk a padsorokat, illetve az oszlopokat. *Megállapodunk* abban, hogy az *első jelzőszám* például az oszlopot, a *második jelzőszám* a padsort jelenti. Fedeztessük fel a következőket:

az ugyanabban az oszlopban ülőknek megegyezik az első jelzőszáma;

az ugyanabban a sorban ülőknek megegyezik a második jelzőszáma;

ha felcseréljük a két jelzőszámot, akkor más tanuló helyét jelöljük meg.

A **Mgy. 6.25–6.30.** feladat, valamint a tankönyv **7.25–7.27.** feladatai a koordináta-rendszerről tanultak alkalmazásán kívül a következő célokat szolgálják:

Az egész számokról tanult ismeretek megszilárdítása, alkotó alkalmazás szintű gyakorlása, „összeszövése” a matematika egyéb témaköreivel (függvények, függvénytranszformáció; geometriai transzformációk; halmazok, logika).

A függvényekről eddig tanultak kibővítése a tapasztalatszerzés szintjén. Ezt az oktatási célt az egész számok tanítása során végig szem előtt kell tartanunk.

A fentieket figyelembe véve az oktatási célkitűzéseinknek és az osztály színvonalának megfelelően válogassunk a feladatok közül.

Gyakorló feladatok

A gyakorlás során elmélyítjük és bővíthetjük az eddig tanultakat.

A problémák megoldása során mélyebb összefüggéseket fedezhetnek fel a tanulók, így a matematikai tevékenységük tudatosabbá válhat.

Törd a fejed!

A tankönyv bővített változatában szereplő fejezet. Az egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása az egész számok körében ne legyen követelmény ötödik osztályban. Ennek ellenére javasoljuk, hogy minél több egyszerű feladatot oldjanak meg a tanulók ebből a témakörből. Elsősorban azzal a céllal tesszük ezt, hogy elmélyítsék, kibővítsék és problémaszituációban gyakorolják az összeadásról és kivonásról tanultakat, másrészt minél több tapasztalatot szerezzenek az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásával kapcsolatosan. (**B7.06–B7.11.**)

Közismert, hogy az egyenletek, egyenlőtlenségek tanításával komoly gondok voltak és vannak. 8. osztály végére a tanulók jelentős része a viszonylag egyszerűbb egyenletek megoldásával nehezen vagy egyáltalán nem boldogul. Ez azt jelenti, hogy felül kell vizsgálnunk tanítási stratégiánkat és módszereinket.

A gondok csökkentésére javasoljuk, hogy a lehető legkorábban ismerkedjenek az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásával a gyerekek, és igen kis lépésekben, a gyengébb tanulók számára is követhetően haladjunk tovább. Így 5. osztálytól 8. osztályig az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása szinte minden órán napirenden lehet, hogy biztosíthassuk a szükséges jártasságok és képességek kialakulását. Például ötödik osztályban a gyengébb csoportokban is megoldathatjuk az egy lépésben megoldható egyenleteket a műveletek összefüggései alapján.

Külön felhívjuk a figyelmet a *koordináta-rendszerrel* kapcsolatos feladatokra (**Tk. 7.38., B7.01–B7.05.**). Ezekkel a pontok ábrázolásán és a szögmérésen kívül gyakorolhatják a tanulók a kerület- és területszámítást, a hasonlóságot, a négyszögekről tanultakat, ezen túlmenően megsejthetik a háromszög és a négyszög belső szögeinek összegét.

8. Összefoglaló

Az ismétlés, rendszerezés, összefoglalás tematikáját úgy állítsuk össze, hogy pótoljuk, megerősítsük azokat a minimumkövetelményekhez kapcsolódó anyagrészeket, amelyekben bizonytalannak, hiányosnak érezzük a tanulók tudását, illetve amelyek nélkülözhetetlenek a hatodik osztályos tananyag feldolgozása során.

ÁLTALÁNOS MÓDSZERTANI JAVASLATOK

Az elmúlt fél évszázadban *alapvetően megváltozott a tudásról, a műveltségről és a képességről alkotott elképzelésünk.* A tudomány és a technika robbanásszerű fejlődése, a társadalom átalakulása a jövő (sőt már a jelen) emberétől megköveteli, hogy a tanultaktól eltérően is tudjon látni és dolgozni, önálló és konstruktív legyen, képes legyen folyamatosan megújulni.

A korszerű matematikatanítás nemcsak (és nem elsősorban) a tananyag bővítésével, új témák feldolgozásával, hanem a nevelési célrendszer újragondolásával alkalmazkodhat ezekhez a változásokhoz. *Nem a matematikai gondolatok elsajátíttatása az elsődleges célunk, hanem a matematikai gondolkodás fejlesztése.* Ezért nagy hangsúlyt kell fektetnünk *a kreativitás és az alkotóképesség* fejlesztésére. Megjegyezzük, hogy a kreativitásra nevelés azért is nehéz feladat, mert a pedagógiai beállítottság, amelyet megkíván, nincs összhangban az általánosan elterjedt tanítási eljárásokkal, a tanórák legkényelmesebbnek és talán leghatékonyabbnak tűnő felépítési módjával.

Ugyanakkor az elmúlt évek csalódásai, balsikerei arra is figyelmeztetnek bennünket, hogy nem hanyagolhatjuk el *a szilárd és alkalmazásképes ismeretrendszer felépítését, a fegyelmezett gondolkodásra nevelést* sem.

A nevelési célrendszer átalakulása megváltoztatta a tanításról vallott felfogásunkat, a matematikaórákon a tanításról a tanulásra tevődött át a hangsúly. Ez a korábbinál sokkal változatosabb óravezetést, más időbeosztást kíván. A konkrét fejlesztési feladatoknak megfelelően kell variálnunk módszereinket, a tanulási folyamat megszervezését. Ebben a részben néhány ezzel kapcsolatos általános javaslatot, gondolatot vázolunk fel. A konkrét módszertani megoldások ajánlásával a tananyag-feldolgozás foglalkozik.

A matematikatanítás megújítására való törekvések az elmúlt évtizedekben egymástól igen különböző utakat, sokszor szélsőségesen egyoldalú megoldásokat jelöltek ki. A pedagógiai gyakorlat – az adott körülményekhez igazodva – transzformálta, csiszolta, továbbfejlesztette ezeket az elképzeléseket, sokszor az egymástól eltérőket is ötvözve.

Az általunk ajánlott program nem kötődik valamelyik speciális pszichológiai vagy tantárgypedagógiai irányzathoz, nem íróasztal mellett született, hanem a *pedagógiai gyakorlat tükörképe,* amely figyelembe veszi a gyerekek teherbíró képességét, az országos és nemzetközi felmérések eredményeit, valamint a gyakorló pedagógusok véleményét.

Ez a tanítási program és a hozzá kapcsolódó taneszközrendszer a *Nemzeti alaptanterv figyelembevételével kidolgozott* **kerettantervre épül**, annak egy lehetséges didaktikai kifejtése. A *kerettanterv* sokféle eltérő programmal, *helyi tantervvel* megvalósítható, ezért az ebben a könyvben leírtak csupán módszertani ajánlásoknak tekinthetők.

A tanulási folyamatról

A tanulási folyamat megtervezése, a feltételek biztosítása, a munka irányítása, az elért eredmények diagnosztizálása, értékelése, a tapasztalt hiányosságok felszámolása igen *összetett pedagógiai tevékenység.* Ezért célszerű áttekintenünk és részletesen elemeznünk e folyamat fázisait. Természetesen az egyes szakaszok nem elkülönülten jelennek meg, hanem sokszor egymásba mosódnak, egymást elfedik, de mindegyiknek van valamilyen, a többitől különböző domináns szerepe, amit az elnevezése is tükröz. A tanulásnak ezt a leírását olyan *modellnek* tekinthetjük, amely bár leegyszerűsíti a valóságos folyamatot, mégis segíthet e folyamat megszervezésében és irányításában.

1. Előkészítő szakasz

Törekedjünk arra, hogy a tanuló ne készen – közölve – kapja az ismereteket, hanem a valóságból, esetleg kísérletből, tárgyi tevékenységből kiindulva, vagy feladatsorok feldolgozása során lássa meg, fedezze fel azokat. *A fogalom megértését, az ismeretek elsajátítását sok és sokféle tapasztalatszerzés előzze meg.*

A következőkben megvizsgáljuk a tapasztalatszerzés összetevőit:

A tanulók előző ismeretei

Egy-egy új, megértendő fogalom, elsajátítandó ismeret előkészítése általában már az alsó tagozatban elkezdődik. Győződjünk meg arról, hogy az ott szerzett tapasztalatokból mennyire emlékeznek, mennyi épült be eddigi ismereteikbe. Ezt a „gyökérképződést" gyerekenként kell feltárnunk. Ne tévesszen meg bennünket az, hogy a jobbak a tapasztalatszerzés folyamatában is előbbre vannak, mert lehet, hogy a gyengéknek nincsenek meg az alapismereteik sem. Ez a hiány okozza sokszor a további lemaradásukat.

Például a törtek értelmezésének, összehasonlításának, rendezésének előkészítésekor győződjünk meg arról, hogy a gyerekek megfelelnek-e az alsó tagozatos elvárásoknak:

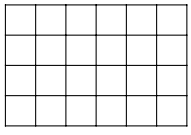
értik-e a törteket kifejező fél, harmad, ..., 2 harmad, 3 harmad, ... kifejezéseket;

elő tudják-e állítani adott egység esetén az egységtörteknek és többszöröseiknek megfelelő mennyiségeket hajtogatással, rajzzal, színezéssel;

le tudják-e olvasni konkrétan megjelenített törtek többféle „nevét";

a konkrétan előállított, megjelenített törteket tudják-e nagyság szerint rendezni?

Nézzünk egy feladatot!



a) Másold le a téglalapot! Színezd ki a felét, 2 negyedét, 3 negyedét, harmadát, 2 harmadát, 3 harmadát, hatodát, 2 hatodát, 3 hatodát, 4 hatodát, 5 hatodát!

b) A beszínezett téglalaprészek között van-e azonos nagyságú?

c) Melyik a legkisebb, melyik a legnagyobb színezett rész? A színezés alapján írd fel a törteket nagyságrendben!

Amelyik gyerek nem tudja az ilyen és ehhez hasonló konkrét feladatokat megoldani, annak most 5. osztályban kell biztosítani a sokoldalú tapasztalatszerzést, eszközzel, rajzzal stb., pótolni kell a leírt elvárásokat. De ne essünk abba a hibába, hogy az eredménytől függetlenül teljesen elölről kezdjük a törtfogalom előkészítését. Építsünk

a meglévő tapasztalatokra, ne vesszen kárba az alsó tagozatban végzett sokoldalú tevékenység.

Győződjünk meg arról is, hogy az előkészítést szolgáló ismeretek mennyire „működőképesek". Konkrét feladatunkkal kapcsolatban például vizsgáljuk meg, hogy elő tudják-e állítani adott szakasznak mint egységnek a felét, negyedét, harmadát, 2 harmadát stb. Ennek segítségével meg tudják-e jelölni a számegyenesen a szakasszal előállított törtek helyét?

A környezetük, a mindennapi életük

Ebben a fázisban is fordítsunk gondot a matematika és a gyakorlat kapcsolatának alakítására. Érezzék azt a gyerekek, hogy az elsajátított ismeretekre szükségük van, azok jól hasznosíthatók a mindennapi életükben.

Példánkkal kapcsolatban felvethetjük:

Hány perc alatt ér haza az, akinek negyed óra, fél óra stb. kell az utazásra?

Ki ér haza leghamarabb, legkésőbb?

Mennyi az ára fél kg, negyed kg, háromnegyed kg, másfél kg stb. kenyérnek?

Tapasztalatszerzés eszközökkel, modellekkel végzett kísérletek során

A munkaeszköz-használatról pszichológiai és didaktikai szempontból a módszerek között külön is szó lesz. Most csak röviden. A munkaeszközökkel ebben a fázisban a felfedező ismeretszerzést akarjuk szemléletileg megalapozni. Szükséges-e, hogy minden gyerek manipuláljon? Biztosan vannak olyan gyerekek, akiknek az előző években és a környezetükben szerzett tapasztalataik elegendőek az új ismeretek maradandó befogadásához. De számukra is hasznos lehet olyan – mindenki által végzett – tevékenység, amelyre szükség esetén később is hivatkozni lehet. Az ő fejlődésüket is kedvezően befolyásolhatja az összefüggések *tudatos megfigyelése, gondolati feldolgozása.*

Vigyázzunk arra, hogy

az eszközhasználat ne váljon öncélúvá;

minden gyerek gondolkodva dolgozzon;

munkájuk eredményéről, a fogalom, ismeret előkészítésének szintjéről legyen megfelelő információnk;

a lassabban gondolkodókat, a gyengéket eszközhasználat közben is segítsük közbevetett kérdéssel, újabb utasítással.

Lehetőleg jussunk el odáig, hogy a gyerekek az eszközzel előállított matematikai modellen felismerjék az összefüggéseket, és a maguk nyelvén fogalmazzák is meg a felfedezésüket. A megfogalmazásukat esetleg pontosíthatjuk, példát mutatva a logikus, szabatos, az általános iskolás számára is érthető matematikanyelv használatára.

Különböző vizsgálatok azt mutatják, hogy *ha az előkészítő szakasz nem kellően alapos, nem adunk elegendő időt a szemléleti megalapozásra, akkor a későbbi ismeretelsajátítás hatásfoka alacsony lesz, a tanulók ismeretei bizonytalanok és nehezen alkalmazhatók lesznek.* Ebben a szakaszban a tanulópárokban, kiscsoportokban szervezett közös munkát javasolhatjuk. (A törtek nagyságrendjének eszközzel való közvetlen előkészítését a tananyag leírásában találjuk.)

2. Intenzív szakasz

Ebben a szakaszban a tanítási óra gerincét a kitűzött oktatási cél, a fogalom, ismeret határozza meg. A megoldott feladatok a matematikai modellen megfigyelt összefüggéseket tartalmazzák.

Az óra eleji folyamatos ismétlés, gyakorlás során az eddig tanultakból tudatosan azokat az elemeket szedjük össze, hozzuk a gyerekekben felszínre, amelyek feltételei az új befogadásának. Arra törekedjünk, hogy a feladatok a tanterv különböző témaköreiből tartalmazzák a már ismert legfontosabb követelményeket. Az természetes, hogy ez a belső koncentráció a tárgyalt témakörrel a legerősebb.

Ebben a szakaszban fogadtatjuk el, gyakoroltatjuk be a fogalommal, ismerettel kapcsolatos szóhasználatot, jelölési módot, megállapodásokat. Itt beszéljük meg az alapfogalmakat és alapfeltételeket, amelyeket meghatározás, illetve bizonyítás nélkül felhasználhatunk.

A tanulási folyamat eredményességét ez a szakasz befolyásolja a legjobban. Törekedjünk arra, hogy lehetőleg minden gyerek a maga szintjén magas intenzitással dolgozzon. A különböző módszerek segítségével tudatosan vonjuk be a gyengébbeket is a munkába, tegyük őket érdekeltté képességeikre szabott megbízásokkal. Minél több tanulót aktivizáljunk. Így mi is visszajelzést kapunk, és egymás tudásából, tévedéséből is tanulhatnak. Alakuljon ki vita, aminek eredményeként kitisztulhat, megfogalmazódhat pontosan és érthetően a célul kitűzött ismeret.

Ebben a szakaszban a visszajelzés, az egyes gyerekek tudásszintjének ismerete nagyon fontos. Ezért alkalmazzuk a visszajelzés sokféle módját. Egy-egy megértést tükröző egyszerű feladat megoldása, vagy csak egy-egy szám, kapcsolat leírása; a kapcsolat, összefüggés eszközzel való megjelenítése, a matematika nyelvén való leírása már információt jelenthet a számunkra.

Ne féljünk a tanári példamutatástól sem. Ebben a szakaszban a többi fázishoz képest *nagyobb szerepet kaphat a tanár közvetlen irányítása,* a „frontális munka". Amikor hasznosnak látjuk, fogalmazzuk meg mi is az ismereteket, összefüggéseket. A táblai munkánk során mutassunk mintát az áttekinthető, rendezett feladatmegoldáshoz.

3. Erősítő szakasz

Ezt a szakaszt a mindennapi szóhasználattal gyakorlásnak is nevezhetnénk. De ez a gyakorlás nem csak a tanult matematikai elem rutinfeladatokon való egyszerű alkalmazása, sokkal inkább jellemző rá az a törekvés, hogy *az új elem beépüljön a gyerek matematikai műveltségébe.* Ezért oldassunk meg olyan feladatsorokat, amelyek visszahatnak a többi témakörből tanultakra, ugyanakkor pedig az új elem erősítését is szolgálják.

Ebben a szakaszban jellemző a tanulók önálló, egyéni munkája.

Ezzel kapcsolatban Pólya György ezt írja A gondolkodás iskolája című könyvében:

„A feladatmegoldás éppen olyan gyakorlati készség, mint mondjuk az úszás. Gyakorlati készségeket utánzással és gyakorlással sajátíthatunk el. Ha úszni szeretnénk megtanulni, utánozzuk azokat a mozdulatokat, amelyeket mások végeznek kezükkel lábukkal, hogy fenntartsák magukat a víz színén; de végül is úgy tanulunk meg úszni, hogy úszunk. Ha feladatmegoldó készséget szeretnénk szerezni, utánoznunk kell azt, ahogyan mások oldanak meg feladatokat, de végül is úgy tanulunk meg feladatot megoldani, hogy feladatokat oldunk meg."

Mivel az új befogadását döntően befolyásolja a régi ismeretek mennyisége és alkalmazási szintje, ezért lehetőségünk és szükségünk van a *differenciálásra.* A tankönyv és a Matematika gyakorló feladatrendszerei lehetőséget nyújtanak az új fogalmak kialakításához, az ismeretek beépítéséhez, differenciált begyakorlásához.

4. Alkalmazó szakasz

Ebben a szakaszban már a fogalmak, ismeretek automatikusan mozgósíthatók. A fogalomrendszer szilárd, így a figyelmet nem az egyes elemek felidézése köti le, hanem a feladatokban rejlő probléma.

Az alkalmazási szint gyerekenként igen különböző. A feladatok sokféleségével, jól megválasztott differenciáló módszerrel ebben a szakaszban lehet a legjobban figyelembe venni a tanulók széles képesség- és tudásskáláját.

Az alkalmazás különböző szintjei a tanulási folyamat előző szakaszaiban is működtek, hiszen mind az ismeretek befogadása, mind a bevésése, gyakorlása feladatok megoldásán keresztül történt.

A tananyag-feldolgozás általános szerkezete

Tekintsük át, hogy az előző részben bemutatott tanulási modell hogyan tükröződik a tankönyv felépítésében.

1. Az ismeretelsajátítás előkészítése

A tankönyv a legtöbb témakörben az alsó tagozatban tanultakból indul ki. Az ott megoldottakhoz hasonló feladatokkal elevenítjük föl a korábbi ismereteket, készítjük elő az új ismeretek tanulását. Mivel ebben a szakaszban főszerepet kaphat a tapasztalatszerző, felfedező tevékenység, ilyen jellegű feladatsorok is tartoznak ezekhez a bevezető részekhez. Az alsó tagozatos alapoktól függően ez a szakasz 1–4 óra tananyagát foglalhatja magában.

Ha ezt a tapasztalatszerzést valamilyen okból elnagyoljuk, akkor az nemcsak a következő órák sikerét veszélyezteti, hanem évekre gátolhatja az eredményes munkát. Vizsgálataink egyértelműen kimutatták ezt például a negatív számokkal végzett műveletek és a térgeometria tanításánál.

Előfordulhat, hogy a tulajdonképpeni előkészítés több témakörön keresztül, hosszú ideig folyik, és esetleg a további lépcsőfokokra csak a következő években lép a tanuló. Így oldjuk meg például az egyenletek, a geometriai transzformációk, a függvények tanítását.

2. Az aktuális tananyag feldolgozása

A tanítási gyakorlat és az elméleti megfontolások egyaránt azt támasztják alá, hogy a viszonylag kötetlen felfedező tevékenységet egy irányítottabb, célratörőbb tanulási folya-

matnak kell követnie, amelynek során a tanuló tudatosítja a megfigyelt összefüggéseket, elsajátítja a fogalmakat, jelöléseket, megtanulja például a szerkesztési, számolási eljárásokat stb.

Ehhez a tanulási szakaszhoz kapcsolódnak a tankönyv kidolgozott és magyarázatokkal ellátott mintapéldái. Ezek rögzítik azokat az ismereteket, amelyeket az előző tapasztalatszerző szakaszban a tanulók önállóan felismertek, és amelyeket minden tanulónak el kell sajátítania.

Az elsajátítandó tananyagot a tankönyv tömören, a fontossági fokozatokat nyomdatechnikailag megkülönböztetve tartalmazza.

3. A tanultak megszilárdítása, begyakoroltatása

Az elsajátított ismereteket nem elég megérteni, azok úgy épülhetnek be a tanuló tudásrendszerébe, ha a legkülönbözőbb feladathelyzetekben ismételten alkalmazza azokat.

A tanulás és felejtés törvényei szerint

a gyakorlást nem szabad későbbi időpontra halasztani, mivel az első napokban a leggyorsabb a felejtés;

a gyakorlás kezdeti szakaszában a tanult fogalomnak, összefüggésnek, eljárásnak viszonylag szembetűnően kell a feladatokban megjelenniük, és csak fokozatosan válhatnak bonyolultabbá a problémák. Ezért vannak a fejezetek végén matematikailag „érdektelen", de a tanultak megszilárdításához nélkülözhetetlen gyakorlatok.

4. A tanultak beépítése a tanuló matematikai műveltségébe

A tanár és a tanuló számára is nyomasztó, ha a tanultak begyakorlása nélkül lépünk tovább. A nem kellően szilárd ismereteket a következő anyagrészek „kisöprik", de az új ismeretek megtanulása is egyre reménytelenebbé válik a bizonytalan alapozás miatt.

Ugyanakkor a tananyag elég nagy ahhoz, hogy ne időzhessünk tetszőleges ideig egy-egy anyagrésznél. (Ez a tanulók számára is előbb-utóbb érdektelenné válna!)

Ezt az ellentmondást *a tanultak folyamatos ismétlésével*, „összeszövésével", az anyagrészek közti koncentráció megteremtésével próbáljuk megoldani. A tanultak lényegében minden későbbi fejezetben újra és újra megjelennek, hol azért, hogy az új ismerethez kapcsolva kiegészítsük, általánosítsuk azokat, hol eszközként alkalmazzuk őket az új ismeret, összefüggés feltárásánál. Az alapvető cél a komplex, rugalmas és alkalmazásképes ismeretrendszer kialakítása.

A folyamatos ismétlés és a koncentrálás lehetőségeire minden témakör feldolgozásánál részletesen kitér a program azért, hogy a konkrét osztálynak megfelelő tartalommal és szinten tervezhessük meg azt.

A tudáspróbák feladata

A pedagógia az értékelés három funkcióját különbözteti meg:

A diagnosztikus értékelés során tudáselemenként vizsgáljuk, hogy a korábban tanultakból mire építhetünk, milyen hiányosságokat kell pótolnunk, hogyan szervezzük meg az ismétlést, illetve felzárkóztatást. A diagnosztikus értékelés esetén *nem osztályozzuk* a tanulót.

A fejlesztő értékelés nemcsak motiválja és irányítja a tanulási folyamatot, hanem a sikeres tanulás előfeltétele. Lényege, hogy a tanuló folyamatos visszajelzést kapjon munkájáról, eredményeiről. Az irányított felfedeztető tanulás a tanuló önálló munkájára épül, ezért a fejlesztő értékelésben is előtérbe kerül az *önértékelés.* A tankönyvben ezt egyrészt úgy oldjuk meg, hogy jelöljük a feladatok nehézségi fokát, tudáspróbákat iktatunk be, másrészt külön könyvben megjelentetjük a tankönyv feladatainak megoldását. Így a tanuló önállóan is ellenőrizheti teljesítményét. A tankönyv tudáspróbái, illetve a **Matematika 5. Gyakorló 10.** fejezetének témazáró feladatsorai is fejlesztő értékelés céljából készültek. A fejlesztő értékelés során általában nem osztályozunk.

A minősítő értékelés egy-egy anyagrész lezárása után ellenőrzi és minősíti a tanuló tudását, teljesítményét. Ezt a célt szolgálják például a **Témazáró felmérő feladatsorok** című füzetek.

Szemléltetés, eszközhasználat

A szemléltetés, szemléletesség ősi pedagógiai alapelv. A matematikatanítás fejlődésével a szemléltetés eszközei és módszerei is fejlődtek.

1. *Az előre elkészített rajzokkal, eszközökkel történő szemléltetés*

   Ha az elkészítés folyamatát nem kívánjuk szemléltetni, akkor egyszerűbb összefüggések bemutatására ez a módszer a legalkalmasabb. (Gondoljunk például a tankönyvi ábrákra.)

2. *A tanuló előtt megszerkesztett, felépített ábrák és eszközök*

   Ide sorolhatjuk a több transzparensből felépíthető, írásvetítővel bemutatható ábrákat is. Előnyük, hogy a tanár elképzelései szerint, a pillanatnyi pedagógiai helyzetnek megfelelően alkalmazhatók.

3. *Az oktatófilm és a videoszemléltetés modernebb változatai*

Az előző módszerek közös fogyatékossága, hogy a tanuló viszonylag passzívan vesz részt az ismeretszerző folyamatban. Mindig arra figyel, amire figyelmét irányítják, a tanár mutat rá arra, amit észre kell vennie, nem akadhat fenn az esetleges buktatókon. Mivel az ismeretszerzés nem önálló munka eredménye, az ismeretet nem érzi magáénak, nem örülhet a saját sikereinek, ezért érzelmileg nem kötődik a tanultakhoz. Ha valamit nem ért meg, vagy rosszul figyel meg, általában észre sem veszi, sem ő, sem a tanár.

Az előzőekben felsorolt módszereknek másik hibája az, hogy viszonylag rövid idő alatt jut el a tanár a fogalom, eljárás, összefüggés bemutatásától, szemléltetésétől az absztrak-

cióig. Ezért a korszerű matematikatanítás arra törekszik, hogy a szemléltető eszközöket, modelleket a tanuló kezébe adja. Ez a módszer olyankor is célravezető, amikor az előző szemléltetési módok nem hatékonyak.

Az eszközöket különböző didaktikai céllal adhatjuk a gyerekek kezébe.

Új ismeretek szemléleti megalapozása

Ennek a módszernek a pszichológiai hátterét *Piaget* vizsgálatai tárták fel. Ezek szerint az absztrakt fogalmak a gyakorlati tevékenységből fokozatosan belsővé válva alakulnak ki. *Piaget* eredményeit *Dienes Zoltán* fejlesztette tovább a matematikatanításra, és *Varga Tamás* honosította meg nálunk.

A tárgyi tevékenységből, kísérletekből kiinduló felfedeztető tanulást elsősorban az egész számok, a törtek, a felszín- és a térfogatszámítás, valamint az adott tulajdonságú ponthalmazok tanításánál javasoljuk. A kísérleteink és felméréseink szerint ezekben a témakörökben ötödik osztályban más módszerrel igen csekély eredményre számíthatunk.

Vizsgálatainkból az is kitűnt, hogy önmagában a „szabad játékon" alapuló manipulálgatás nem vezet el a matematikai fogalomalkotáshoz. Didaktikailag lépésről lépésre ki kell dolgoznunk ezt az utat. A tankönyvben ezt meg is tettük, és a program későbbi fejezeteiben, a konkrét tananyag sajátosságait figyelembe véve foglalkozunk az eszközhasználat lehetőségeivel. Ezért itt csak vázlatosan tekintjük át a tárgyi tevékenységből kiinduló felfedeztető tanulás általános modelljét:

1. *szakasz*

A tanuló többféle eszközzel (modellel) ismerkedik meg. Ezekkel játékos feladatokat megoldva tevékenykedik. A kísérleteit és a megfigyeléseit lényegében nem irányítjuk. Ehhez az alapozó szakaszhoz sorolhatjuk, hogy több témakörben már az anyag tanítását megelőző években elkezdik a megfigyeléseket, a tapasztalatgyűjtést a gyerekek.

Ebben a szakaszban jól bevált a kiscsoportos foglalkozás vagy a tanulópárban végzett tevékenység. Így a tanulók közvetlenül elleshetik egymástól az eszközhasználat fortélyait, segíthetnek egymásnak, kicserélhetik tapasztalataikat, sejtéseket fogalmazhatnak meg, azt megvitathatják stb.

2. *szakasz*

A kísérletek irányítottá válnak, és a megfigyeléseket értelmezik a tanulók. A különböző modellekkel (például az adósságcédula–készpénz–modellel, illetve a kis autós modellel) önállóan tevékenykedve észreveszik a közös vonásokat, felismerik az összefüggéseket.

Ennek a szakasznak a lezárásaként hasznos lehet a frontális tevékenység. A tanári demonstrációval párhuzamosan a tanulók is elvégzik a kísérleteket. Közösen elemzik a tapasztaltakat, megállapodnak abban, hogy az eredményeket hogyan fordíthatják le a matematika nyelvére stb.

3. *szakasz*

A tanulók nem az eszközhasználathoz kapcsolódva kapják a feladatokat. A matematikai problémát szükség esetén konkretizálják, és segédeszközként alkalmazzák azt a modellt, amelyre leginkább tudnak támaszkodni.

A tevékenység egyre inkább belsővé válik, a tényleges eszközhasználatot felválthatja

a rajzos modell, az eszköz elképzelése stb. Ám semmiképp sem célszerű erőltetni az eszközhasználat nélküli munkát. A tanuló magától tolja félre az eszközt, ha már anélkül is boldogul, de növeli a biztonságérzetét, ha tudja, hogy bármikor ellenőrizheti az eredményt az eszközzel.

Ebben a szakaszban a differenciált egyéni munkát javasoljuk.

4. *szakasz*

A tanulókban kialakult az új ismeretrendszer. A tevékenység teljesen belsővé vált. Az ismeretek alkalmazásához, illetve a megoldások ellenőrzéséhez nem igényli az eszközök használatát. Az új fogalmak a további ismeretszerző folyamatban már eszközként szerepelhetnek.

Elvont problémák megközelítése szemléletes modellel

A már megszilárdult ismeretrendszerhez kapcsolódva is megfogalmazhatunk olyan feladatokat, amelyek elvontságuk, bonyolultságuk miatt modellezés nélkül megközelíthetetlenek a tanulók számára. Ötödik osztályban a következő témakörökben találkozhatnak ilyen feladatokkal:

Kombinatorika. A számkártyák, szívószáldarabok tényleges rakosgatása a tanulók mintegy felének segítséget jelent a rajzzal szemben.

Síkidomok csoportosítása különböző szempontok szerint. A síkgeometriai modellezőkészletet célszerű kiegészíteni további síkidomokkal.

A derékszögű koordináta-rendszer modellezése lyukastáblával. Sokkal dinamikusabbá és hatékonyabbá tehetjük a munkát, ha rajzolgatás helyett az eszközöket használják a tanulók. Olyanok is önállóan tevékenykedve kapcsolódnak be a munkába, akik a rajzzal csak nagyon lassan és bizonytalanul boldogulnak.

Térgeometria. A térelemek egymáshoz való viszonyával, a testek hálójának elkészítésével kapcsolatos feladatokat modellezés nélkül nem képes megoldani a 10-11 éves tanuló. Ha a tanár kihagyja ezeket a foglalkozásokat, akkor a későbbi években egyre nehezebben tudja bepótolni az itt elszalasztott alkalmakat. *Térszemléletet csak tényleges térbeli tevékenységgel alakíthatunk ki.* (Ezt a kérdéses anyagrészeknél újra és újra hangsúlyozni fogjuk!)

Gyakorlati tevékenység matematikai jellemzése

A matematikatanítás fontos feladata a gyakorlatra nevelés, beleértve a fizika, technika, kémia stb. tanulásának matematikai megalapozását. Ezzel kapcsolatban például a következő témakörökben szükséges különböző eszközök használata:

Mérések. Különböző tárgyak hosszúságának, területének, térfogatának, űrtartalmának mérése, meghatározása. Távolság- és szögmérés terepen. Időmérés.

Testek ábrázolása (elölnézete, felülnézete, oldalnézete).

Valószínűségi kísérletek.

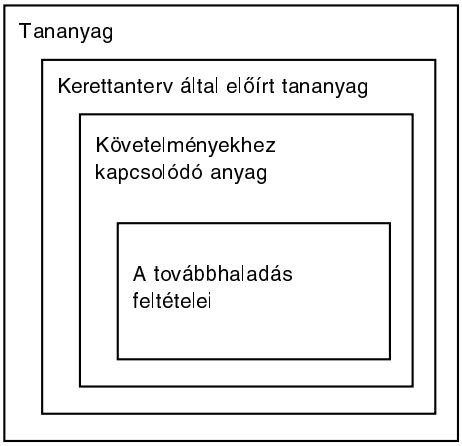
Az ezekhez a témakörökhöz tartozó feladatokban az a közös, hogy a tanulónak meg kell találnia a gyakorlati feladatnak megfelelő matematikai eszközt, azt alkalmazva megoldja

a gyakorlati problémát úgy, hogy közben a matematikai fogalomrendszere és eszköztára is jelentősen bővül és alkalmazhatóbbá válik.

Figyeljük meg a különbséget a tanári magyarázattal kísért bemutatással szemben: a tanuló maga tervezi meg a kísérletet, mér, összehasonlít, ellenőrzi az eredményt. A készen kapott magyarázattal szemben rá hárul a probléma megoldása. Önállóan jön rá arra, amit tanítani akarunk neki, ezért sikerélménye van, magáénak érzi a felfedezett ismeretet. Közben az évek folyamán fokozatosan kialakul az a képessége, amelynek birtokában önállóan is végig tudja járni az ismeretek felfedezésének, a szokatlan problémák megoldásának az útját.

A tananyag és a követelmények értelmezéséről

Ebben a részben *a tantervi témaköröket* követve fogalmazunk meg ajánlásokat a tananyaggal, illetve a követelményekkel kapcsolatosan. Elsősorban azokkal az *anyagrészekkel* foglalkozunk részletesebben, amelyeket a tankönyvben nem önálló fejezetként, hanem a többi anyagrésszel „összeszőve" dolgozunk fel (halmazok, logika; relációk, függvények, sorozatok; kombinatorika, valószínűség, statisztika). Nagyon fontos, hogy egész évre előre átgondoljuk, hogyan oldhatjuk meg sikeresen ezeknek a témaköröknek a tanítását úgy, hogy közben az aktuális tananyag tanítására helyezzük a hangsúlyt.



Vegyük figyelembe, hogy átlagos vagy az átlagosnál jobb osztályban a tananyag általában bővebb lehet, mint amit a követelményekben előírunk. A törzsanyaghoz tartozhatnak olyan anyagrészek, amelyekkel föltétlenül célszerű foglalkoznunk, hogy kellően előkészítsük a későbbi munkát, de amelyeket még nem követelünk meg tanulóinktól. Más, a törzsanyaghoz nem tartozó anyagrészekkel csak „színezzük" a tanítást.

A helyi tantervben a 4., az 5. és a 6. osztályra vonatkozó követelményeket, az alsó tagozatos munkaközösséggel közösen, mint **egységes követelményrendszert célszerű kidolgoznunk**. Egyrészt az alsó tagozatos kollégáknak is világosan látniuk kell, hogy 5. és 6. osztályban mire szeretnénk építeni, mivel nem kívánunk már foglalkozni, melyek lesznek a fejlesztés fő irányai stb. Másrészt a felső tagozatos szaktanárnak is tisztában kell lennie azzal, hogy mit, milyen mélységben taníthat meg az alsó tagozat. Csak így kerülhetők el az átmenetből fakadó nehézségek és ellentmondások.

Halmazok, logika, kombinatorika

A „Gondolkodási módszerek” címen összefoglalt követelményekhez kapcsolódó anyagrészek.

Felső tagozatban nem tanítunk halmazelméletet, hanem a tanulókban halmazszemléletet akarunk kialakítani, fejleszteni úgy, hogy eszközként használjuk a többi témakörrel kapcsolatos feladatok megoldásához, az új ismeretek kialakításához és a gondolkodási képességek fejlesztéséhez.

Erre a témakörre különösen igaz az, hogy nem elszigetelten, nem külön tanítjuk, hanem a többibe beépülve. Példaanyaga kiterjed a teljes általános iskolai matematikára, segít a témák „összeszövésében”, az egységesebb matematikai szemlélet alakításában. Ezért nem is lehet meghatározni, hogy az egy-egy tanévre, évfolyamra szánt matematikaórák hány százalékát fordítjuk a halmaz, logika témakör tanítására, a tanultak alkalmazására. Lehet hogy főtémaként, egyetlen órában sem foglalkozunk vele, de alig van olyan anyagrész, amely ne igényelne valamilyen szintű halmazelméletet. Különösen *a folyamatos ismétlés* és *az ismeretek rendszerezése* ad sok lehetőséget a halmazelméleti és logikai ismeretek gyakorlására, alkalmazására.

Tanítási tapasztalatok, felmérési eredmények alapján – e témakör kapcsán – szeretnénk felhívni a figyelmet néhány olyan gondolatra, amelyet a tanulók félreérthetnek.

A halmaz fogalmáról:

Már alsó tagozatban is használjuk a „halmaz”, az „elem”, az „eleme” fogalmakat. Ezeket nem definiáljuk, alapfogalmak. A gyerekben a konkrét feladatok megoldása során alakulnak ki ezek a fogalmak.

A „halmaz” elnevezésről:

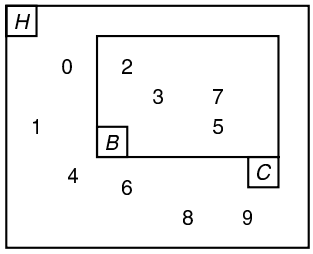
Ügyeljünk arra, hogy nem az elnevezésen van a hangsúly. A halmaz szó sok esetben el is hagyható vagy más szóval helyettesíthető. Például „a 10-nél kisebb természetes számok” megfogalmazás a „halmaz” szó nélkül is a 0, 1, 2, …, 8, 9 számok összességét jelenti. A geometriában sok esetben a halmaz helyett alakzatról beszélhetünk.

A jelölésekről:

A halmazokat nagybetűvel szokás jelölni. A halmaz elemeit kapcsos zárójelbe tesszük.

Például: $A = \{2;\ 3;\ 5;\ 7\}$.

Halmazok szemléltetésére gyakran használunk ábrákat. Körbe, téglalapba, egyéb síkidomba írjuk, rajzoljuk a halmaz elemeit (Venn-diagram).



Például: $H = \{$10-nél kisebb természetes szám$\}$.

Most H az *alaphalmaz,* vagyis a szóba jöhető dolgok halmaza. A halmazábrán mindig jelöljük az alaphalmazt.

Az alaphalmazon belül egy zárt görbe két halmazt szemléltet.

Például:

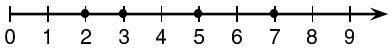
$B = \{$Törzsszám$\}$ és $C = \{$Nem törzsszám$\}$ (a H alaphalmazon belül).

A B és a C egymásnak *kiegészítő* (komplementer) halmazai.

Az *üres halmaz* jele: $\emptyset$. Ezt a jelölést ötödikben, hatodikban nem célszerű használni. Ugyanis az üres halmaz fogalmát legtöbbször a nyitott mondatok igazsághalmazával kapcsolatosan alkalmazzuk, és a gyerek könnyen keverheti azzal az esettel, amikor $x = 0$ a megoldás.

Vigyázzunk arra, hogy a gyerekek ne azonosítsák a jelölést a halmazzal. A felsorolt számok akkor is halmazt alkotnak, ha elhagyjuk a kapcsos zárójelet vagy nem diagramban ábrázoljuk. Ezért fontos, hogy más jelölést, illetve szemléltetést is alkalmazzunk, *például* táblázatot, számegyenest:

Törzsszám	Nem törzsszám
2; 3; 5; 7	0; 1; 4; 6; 8; 9



A halmaz megadásáról:

Egy halmaz megadása elemeinek a megadását jelenti.

A halmazt – egyszerű esetben – megadhatjuk elemeinek felsorolásával. *Például:*

$D = \{0;\ 1;\ 4;\ 9\}$. (Minden elemet csak egyszer írunk le.)

A halmazt megadhatjuk olyan tulajdonsággal, amely egy alaphalmazból pontosan a kívánt elemeket jelöli ki. *Például:*

$D = \{\text{Egyjegyű négyzetszám}\}$.

Nem minden halmaz adható meg elemeinek felsorolásával és tulajdonság megfogalmazásával. *Például:*

$K = \{\text{Négyzetszám}\}$. Ez a halmaz végtelen, az összes elem felsorolásával nem adható meg. Ha nem okoz félreértést, akkor elkezdhetjük az elemek felsorolását, és pontozással jelölhetjük azt, hogy végtelen sok elem van: $K = \{0;\ 1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25;\ \ldots\}$.

Nehezen adható meg tulajdonsággal például az

$F = \{\text{Magyarország, Budapest, Margit híd}\}$ halmaz.

Ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor azok egyenlők. A másféle sorrend vagy másféle alak nem teszi mássá a halmazt.

A kombinatorikai feladatok megoldásakor is alig lépünk túl az alsó tagozatos tananyagon és követelményeken. A tankönyvben nincs feldolgozva a kombinatorikával kapcsolatos ismeretanyag. Ennek oka, hogy 5. osztályban nem lehet célunk a kombinatorikai feladatok megoldási módjának mechanikus megadása, még kevésbé, hogy az elméleti háttérrel foglalkozzunk. Konkrét feladatokkal és a bennük rejlő utasításokkal szeretnénk elérni, hogy fejlődjön a gyerekek kombinatorikus szemlélete, merjenek belevágni olyan feladatok megoldásába is, amelyek számukra újszerűek, szokatlanok, esetleg nem is szorosan a matematika világából valók. Fejlődjön bennük a több megoldás keresésének igénye. A feladatok megoldása során bizonyosodjanak meg arról, hogy valamennyi lehetőséget megtalálták. Ez az igény igen hasznos például a geometriai szerkesztések megoldásában.

A kombinatorikus feladatokban a lehetőségek számát keressük adott feltételek mellett.

> Az első egy-két lehetőség megtalálása bizonyíthatja, hogy a gyerek megértette a feladatot, érti a feltételeket.

Az összes eset megkeresésekor célszerű valamilyen rend szerint dolgozni. Így könnyebben átlátható, hogy nem ismétlődik-e vagy nem hiányzik-e valamelyik lehetőség.

Rendezési forma lehet a fadiagram készítése. A kész fadiagramról úgy olvassuk le a lehetőségeket, hogy az ágakon végigmegyünk.
Annyi eset van, ahány ágvégződés.

Rendezési forma lehet a lehetőségek táblázatos elrendezése. A feladatok megoldásának leírásakor alkalmaztuk ezeket a formákat is.

Egy-egy rendezési forma segít abban is, hogy a gyerekek észrevegyék a különböző tartalmú feladatokban a közös matematikai gondolatot.

A kombinatorikai feladatok megoldása sok lehetőséget ad a többi témakör tananyagának megértéséhez, az ismeretek alkalmazásának színesítéséhez, mélyítéséhez, a témák összeszövéséhez.

Külön is megemlítjük a kombinatorika és a szorzás értelmezésének kapcsolatát. A szorzást legtöbbször úgy értelmezzük, mint azonos tagok összeadását. A szorzásnak egy másik értelme két halmaz elemeiből alkotható párok számának meghatározása. Például a **Tk. 1.57.** feladatában az egyik halmaz három különböző szoknya, a másik halmaz négy különböző blúz. A párosítás – a felöltözés – lehetőségének száma: $3 \cdot 4 = 12$.

Lehet, hogy már 5. osztályban is vannak olyan gyerekek, akiknek nincs szükségük az összes lehetőség felsorolására, hanem az összefüggést látva szorzással is ki tudják számítani az esetek számát. Arról azonban még győződjünk meg, érti-e, hogy miért oldható meg a feladat egyszerűen szorzással. A gyerek által elmondott indoklás a többiek számára is hasznos, lehet hogy hasznosabb, mint a tanári magyarázat.

A követelményekről:

Természetes, hogy az alsó tagozatos elvárások 5. osztályban is érvényesek. A témakör szemléletformáló szerepe és eszközjellege miatt azok a csomópontok, tevékenységek, feladatféleségek, amelyekkel a tanulók alsó tagozatban találkoztak, az 5. osztályos tanterv tananyagában és követelményeiben is megfogalmazódnak, esetleg egy-egy feltétellel bővítve. Ezek közül a leggyakoribbakról részletesebben szólunk. Az alsó tagozatos és az ötödik osztályos követelmények közti különbség elsősorban nem a halmazelméleti, logikai és kombinatorikai ismeretek kibővítésével fogalmazható meg, hanem azzal, hogy ezeknek a (korábban tanult) ismereteknek a biztosabb tudását, elvontabb, összetettebb feladatokban történő alkalmazását várjuk el. Amit korábban csak a jobbaktól vártunk el, az most már minimumkövetelmény, vagy amit két halmaz esetében vizsgáltunk, azt most több halmazra is megnézzük stb. Bővül az alkalmazás területe is.

Számtan, algebra

A számtan, algebra tananyagot a tankönyv 1., 2., 5. és 7. fejezete tárgyalja. A tananyaggal kapcsolatos részletes ajánlásainkat ezen fejezetek módszertani feldolgozásában ismertetjük.

Ez a témakör a tananyag gerincét alkotja. Föltétlenül látnunk kell, hogy mit várhatunk

tanítványainktól ezen a területen, milyen előképzettséggel, mennyire begyakorolt ismeretekkel, milyen képességekkel rendelkeznek, milyen ütemben és milyen mélységben dolgozhatjuk fel az új anyagot.

Ehhez térképezzük fel, hogy milyen tankönyvből (tankönyvekből) mit, milyen követelményszinten tanultak tanítványaink. Kérdések lehetnek:

Mely számkörig jutottak el 4. osztály végére a tanulók?

A tanult számkörben mennyire teljes a kialakult számfogalom? (kerekítés, számszomszédok, ábrázolás stb.)

A tanult számkörben milyen a tanulók számolási rutinja?

Tanulták-e a kétjegyű osztóval való írásbeli osztást?

Mennyire gyakorolták be a tanult írásbeli műveleteket?

Kellő rutint szereztek-e az összetett számfeladatok megoldásában?

Képesek-e a szöveges feladatok értelmezésére, megoldására?

Tudják-e a tanultakat problémahelyzetben alkalmazni? (Arányos következtetések, mértékváltás, grafikonok értelmezése stb.)

Ezért fontosnak tartjuk, hogy év elején (de ne az első héten!) mérjük fel a szám- és műveletfogalom, a számolási képesség, valamint a szövegértelmezési és szövegelemzési képesség fejlettségét.

Bár a *Hajdu Sándor* által szerkesztett alsó és felső tagozatos tankönyvek egységes koncepció és követelményrendszer alapján dolgozzák fel a tananyagot, még ebben az esetben is javasoljuk, hogy a helyi tanterv biztosítson átfedést, fokozatos átmenetet a 4. osztályos és az 5. osztályos követelmények között. Ezt az átfedést tanítási tapasztalatokkal (a tanulók egyenlőtlen fejlődésével, a felejtéssel, a tagozatváltással kapcsolatos problémákkal stb.) és elméleti megfontolásokkal („a hosszú érlelés elvével") egyaránt indokolhatjuk. Az ötödik osztályos tankönyv első fejezete tükrözi ezt a törekvést.

Relációk, függvények, sorozatok

A tankönyv 3. fejezetében foglalkozunk ezzel az anyagrésszel, ennek ellenére ötödik osztályban nem célunk a relációk, függvények és sorozatok elméleti hátterének lényeges bővítése. Az alsó tagozatban tanultakat eszközszerűen alkalmazzuk a számtan, algebra, a mérések és a geometria, valamint a valószínűség-számítás és a statisztika témaköreben az ismeretek feltárása és elmélyítése során. Az alkalmazás körének kibővítésével a tanulók további tapasztalatokat szereznek, amelyekkel előkészíthetjük a függvények 6. és 7. osztályos tanítását.

Relációk

A *reláció* szó kapcsolatot, összefüggést jelent. A H halmazon értelmezett szűkebb értelemben vett biner reláción a H halmaz elemeiből képzett (egymással kapcsolatban lévő) rendezett elempárok egy halmazát értjük. (Röviden a reláció a $H \times H$ Descartes-szorzat egy részhalmaza.) Bár alig van olyan matematikai téma, amelyben ne lenne szerepe a

relációknak, magát *a fogalmat az általános iskolában nem célszerű definiálnunk, és a kifejezést sem fontos használnunk.*

Ügyeljünk arra, hogy ez a fogalom ne szűküljön le a számok, mennyiségek nagyság szerinti összehasonlítására, hiszen végtelen sokféle kapcsolatot jelenthet.

A relációt általában nyitott mondattal, szöveggel, diagrammal, grafikonnal és táblázattal adhatjuk meg.

A relációtulajdonságok tudatosítását, megfogalmazását, értelmezését sem célszerű megkövetelni, de konkrét kapcsolatok elemzésénél sokszor foglalkozhatunk ezekkel az összefüggésekkel anélkül, hogy a kifejezéseket használnánk. Ötödik osztályban is vizsgálhatjuk a relációk következő tulajdonságait:

Reflexivitás: minden elem kapcsolatban van saját magával.

Például az „egyenlő", „egybevágó", „hasonló", „osztható" relációk reflexívek; a „kisebb", a „merőleges" nem reflexívek.

Szimmetria: ha az a elem kapcsolatban van a b elemmel, akkor a b elem is (az adott) kapcsolatban van az a elemmel.

Például az „egyenlő", „egybevágó", „hasonló", „párhuzamos", „merőleges", „van közös osztójuk" szimmetrikus reláció; a „kisebb", a „többszöröse" nem szimmetrikus.

Tranzitivitás: egy adott relációt vizsgálva, ha egy a elem kapcsolatban van egy b elemmel, és a b elem kapcsolatban van egy c elemmel, akkor az a elem is kapcsolatban van a c elemmel.

Az „egyenlő", „nagyobb", „osztható", „egybevágó" tranzitív, de például a térbeli egyenesekre: ha $a \perp b$ és $b \perp c$, akkor a és c nem biztos, hogy merőlegesek. Tehát a „merőleges" reláció nem tranzitív.

Függvények

Az A és a B halmaz elemei közti relación (hozzárendelésen) az $A \times B$ Descartes-szorzat egy részhalmazát értjük, vagyis a reláció az A és B halmaz elemeiből képzett rendezett elempároknak egy halmaza. *A függvény speciális reláció.*

A függvényfogalom több év alatt alakul ki. Ötödik osztályban a tapasztalatgyűjtés szintjén maradunk, ezért sem az általános reláció fogalmát, sem a függvény fogalmát ne értelmezzük, ne emeljük ki az A és a B halmaz elemei közti egyéb kapcsolatok vizsgálata közül a függvénykapcsolatokat. Ennek ellenére a konkrét feladatokban (az elnevezések használata nélkül) minden esetben tisztázhatjuk az eredeti elemek halmazát, az *értelmezési tartományt* és a képelemek halmazát, az *értékkészletet.* Vizsgáltathatjuk (ugyancsak az elnevezések használata nélkül), hogy a hozzárendelés több-többértelmű, egy-többértelmű, több-egyértelmű, egy-egyértelmű-e.

A függvényeket megadhatjuk táblázattal, szöveggel, nyitott mondattal, grafikonnal. Mindegyik megadási módot célszerű alkalmaznunk, mindegyiknek megvan a maga didaktikai és nevelési haszna, feladata.

A *gyakorlatra nevelés* fontos eszköze *a tapasztalati függvények* feldolgozása. Kapcsolatot teremthetünk a környezetismeret tantárggyal. Mérési adatokat táblázatba rendezünk, arról grafikont készítünk, vagy adott grafikonról adatokat olvasunk le, az adatsokaságot

megfigyeljük, megállapítjuk néhány jellemzőjét (számtani közepét; leggyakoribb adatot; legkisebb, legnagyobb eltérést; stb.). Ismertessük föl a tanulókkal (konkrét példákban) a valóság és a függvény mint *a valóság matematikai modellje* közti kapcsolatot.

A *szám-szám függvényeket* eszközként használjuk a számfogalom kiterjesztéséhez, bővítéséhez, a műveletek értelmezéséhez és gyakorlásához. Részletesen tárgyaljuk a műveletek eredményeinek a komponensek változásától való függését. A *derékszögű koordináta-rendszer* megismerésével előkészíthetjük a szám-szám függvények ábrázolását és függvénytranszformációk vizsgálatát. Ezeknél a feladatoknál is tisztáznunk kell, hogy melyik számhalmazból választhatjuk az eredeti elemeket és a képelemeket. A legtöbb esetben célszerű abban megállapodnunk, hogy mindkét halmaz a tanult számok halmaza.

A kreativitásra nevelés fontos eszközének tartjuk az ún. *szabályjátékokat.* Mivel néhány elempárhoz keresnek a tanulók szabályt, ezért sok megoldást ismerhetnek fel. Mindenképpen tudatosítsuk, hogy ezeknek a feladatoknak végtelen megoldásuk van. A tanításban fordítsunk nagy hangsúlyt *a szöveggel megadott függvényekre,* az adatok közötti kapcsolatok megállapítására, lejegyzésére. Ezzel javíthatjuk a szaknyelv megértésének és használatának, valamint a szöveges feladatok értelmezésének, a megoldási terv készítésének, a megoldásnak, ellenőrzésnek a képességét.

Kiemelten foglalkozunk az *egyenes és a fordított arányossággal,* de a fogalmak tudatosítása 6. osztályra maradhat.

A geometriában például a *sokszögek területe* olyan függvénynek tekinthető, amelynek az értelmezési tartománya a sokszögek halmaza, az értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza. Ezért a területfogalom kialakítása, a téglalap területének meghatározása stb. során (a tudatosítás igénye nélkül) építhetünk tanulóink függvényszemléletére, és fejleszthetjük is azt.

Sorozatok

Az alsó tagozatban sokféle eszközzel, rajzzal is készítettek sorozatokat. Ötödik osztályban zömmel csak számsorozatokkal foglalkozunk. Eszközként használjuk a számfogalom alakításához, a műveletek tulajdonságainak vizsgálatához, a műveletvégzés gyakorlásához. A sorozatot mint *pozitív egész számokon értelmezett függvényt* az általános iskolában legfeljebb csak a 7. osztályban értelmezzük.

Sorozatot készítünk adott szabály alapján a tanult számkörökben, és szabályt keresünk néhány elemmel megadott sorozatokhoz. Ez utóbbi típusú feladatoknak végtelen sok megoldásuk van. Ezt ismertessük fel tanulóinkkal. Sorozatot építünk a kombinatorikus feladatok feltételeinek és megoldásainak számából, valamint a geometriai alakzatok tulajdonságainak felhasználásával is.

Mérés, geometria

A tankönyv 1., 2., 4., 6., továbbá (ismétlésként) a 8. fejezete foglalkozik a mérés, geometria tananyag feldolgozásával. Ezen túlmenően az aktuális tananyaghoz kapcsolódva

a többi fejezetben is megfogalmazunk geometriai problémákat, mint ahogy a geometria tanulása során gyakoroljuk, elmélyítjük, kibővítjük, esetleg előkészítjük a más témakörökhöz tartozó ismereteket.

Mire építhetünk?

Alsó tagozatban a tanulók különböző síkidomokat állítottak elő hajtogatással, nyírással, testeket építettek, bontottak szét. Vizsgálták az alakzatok tulajdonságait, összefüggéseket kerestek, szétválogatták az alakzatokat a felismert tulajdonságaik alapján.

Megbecsülték, majd megmérték különböző tárgyak, illetve alakzatok hosszúságadatait. Elsősorban szemléletes példákban (például kerítés hosszúsága) kiszámították *konkrét sokszögek kerületét*.

A *területet* lefedéssel, hálón való megszámlálással mérték. A 4. osztályban hangsúlyt kapott *a téglalap területének* kiszámítása a kirakást felidéző magyarázat kíséretében (konkrét esetekben). Követelmények megfogalmazása nélkül foglalkoztak *a térfogatméréssel.* Egységkockákból, színes rudakból felépítettek testeket, megszámlálták, hogy hány egységkocka fér egy-egy konkrét téglatestbe stb.

Így *szemléletes szinten megalapoztak* szinte minden olyan fogalmat, amelyre a felső tagozatban építünk. Ugyanakkor tisztában kell lennünk azzal, hogy az alsó tagozatos geometriai foglalkozások elsődleges célja a *szemléletfejlesztés, a problémaérzékenység kifejlesztése.* Az életkori sajátosságokból adódóan sem várhatjuk el, hogy a tanulók tudatos és alkalmazásképes ismeretrendszerrel rendelkezzenek.

Vannak olyan ismeretek, amelyekkel a tanulók már az alsó tagozatban is találkoznak, de az 5. osztályban sem támasztunk ezekkel kapcsolatos követelményeket.

Ilyen anyagrészek például:

- az egybevágósági transzformációk,
- a tengelyes szimmetria,
- a hasonlóság,
- a topológiai alapismeretek.

A tankönyvben sok olyan feladat van, amely eszközhasználathoz, rajzos kísérletezgetéshez stb. kapcsolódva feleleveníti ezeket az ismereteket, további tapasztalatszerzésre ad lehetőséget, esetenként ki is bővíti, elmélyíti a tanultakat. Ám *nem tűzzük ki célul ezeknek a fogalmaknak az értelmezését, a felismert összefüggések általános megfogalmazását és bizonyítását.*

A geometria tanításának megtervezésekor azt is figyelembe kell vennünk, hogy ezen a téren a legpolarizáltabb a tanulók tudása. Többségüknek gondot jelent a vonalzó és a körző használata. Nagyon nagy különbségek vannak az egyes osztályok között attól függően, hogy az alsó tagozatos pedagógus mennyire tartotta fontosnak a geometriai látásmód kifejlesztését, elvezette-e tanulóit (az eszközhasználat segítségével) az összefüggések „felfedezéséhez", *a tapasztaltak gondolati feldolgozásához*, vagy sem. A képességek egyenlőtlen fejlődése miatt is lényeges eltérések lehetnek a tanulók között. Ezért a legtöbb osztályban *a tanórák mintegy felében javasoljuk a tanulók optimális fejlődését biztosító differenciálást.*

Valószínűség, statisztika

Valószínűség

Sem alsó, sem felső tagozatban nem valószínűségi ismereteket tanítunk, hanem valószínűségi gondolkodásmódot fejlesztünk. A tankönyv egy alfejezete foglalkozik a valószínűséggel. Ezen túlmenően javasoljuk, hogy a számtan, algebra témakör feldolgozása során (vagy különleges alkalmakkor, például a 100. órán) szervezzünk valószínűségi játékokat, kísérleteket, házi feladatként figyeltessünk meg különböző „tömegjelenségeket".

Jobb csoportban eljuthatunk (egyszerűbb esetekben) a valószínűség kiszámításához, a kiszámított valószínűség és a relatív gyakoriság összehasonlításához.

A tanulók a kísérletek alapján

- különbséget tesznek biztos, lehetetlen és lehetséges, de nem biztos események között;
- a lehetséges eseményeket összehasonlítják, melyik a valószínűbb;
- tapasztalják, hogy amelyik esemény nem fordul elő, abból még nem következik, hogy sohasem fordulhat elő;
- megtanulják megkülönböztetni a kiszámított valószínűséget és a relatív gyakoriságot;
- megfigyelik, hogy minél többször végzik el a kísérletet, annál kisebb a relatív gyakoriság ingadozása.

Statisztika

Az általános iskolában a statisztika elemeit részben a valószínűségi kísérletek eredményeinek elemzésére használjuk, részben a környezet megfigyelésével, a jellemzők leírásával kapcsolatosan alkalmazzuk.

Amikor a valószínűségi kísérletekben az események kimenetelét lejegyezzük, táblázatba foglaljuk, összehasonlítjuk, grafikont készítünk, akkor statisztikai elemzést végzünk.

A környezet statisztikai megfigyelése az osztály adatainak elemzésével kezdődhet, majd a bővülő környezet – az iskola, a lakóhely – jellemzőinek vizsgálatával folytatódhat. Különböző, a gyermekek által javasolt szempontok, illetve kategóriák szerint táblázatba rendeztethetjük az adatokat. A gyerekek például összehasonlíthatják a fiúk és a lányok osztályzatainak vagy testmagasságának az *eloszlását*. Az adatokat oszlopdiagrammal, milliméterpapírra rajzolt szalagdiagrammal stb. szemléltethetjük, megkerestethetjük a legkisebb, illetve a legnagyobb értéket. A tizedestörtek tanulásához kapcsolódva az adatokat századrészben is számolhatják.

Sor kerülhet a számtani közép fogalmának elmélyítésére, alkalmazására, de az adatsokaság egyéb jellemzőit (például az adatok „szóródását") is vizsgálhatják.